Задачи студенческих математических олимпиад
Иркутский научно-исследовательский технический университет (ИрНИТУ)
с 2008 года
(*в обратном хронологическом порядке*)

Май 2017

I курс

Задача 1. Пусть квадратная матрица A такая, что $A + A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ и $A^2 = 0$. Найти матрицу A.

Задача 2. Исследовать на непрерывность и построить график функции
$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{2n}\cos 2\pi x + x^2}{x^{2n}+1}$.

Задача 3. Прямоугольный $\triangle ABC$ с катетами $a > b$ и с вершиной C прямого угла, направленного в противоположную от начала координат сторону, скользит вершинами A и B по осям координат в первой четверти. Найти геометрическое место вершин прямого угла.

Задача 4. Найти $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\big(\cos(e^x - e^{-x}) - \cos(e^x + e^{-x})\big)$.

Задача 5. Вычислить $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \sin^{2016} x\, \cos 2018x\, dx$.

Задача 6. В шахматном турнире участвовало 8 человек, и все они набрали разное число очков. Шахматист, занявший второе место, набрал столько же очков, сколько четыре последних вместе. Как сыграли между собой шахматисты, занявшие третье и седьмое места? Победа приносит 1 очко, ничья — по 1/2 очка.

II курс

Задача 1. Известно частное решение $y_1 = e^{-x} + x + 2$ уравнения $y'' + py' + qy = 4x + 8 + 5e^{-x}$ ($p, q \in \mathbb{R}$). Найти другое частное решение этого уравнения, имеющее экстремум при $x = 0$, равный 1. Что это будет: максимум или минимум?

Задача 2. Найти область сходимости и сумму ряда $S(x)$, если общий член ряда

$$u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}(2n+1)x^{n+1}}{n(n+1)}.$$

Задача 3. Вычислить площадь фигуры, заданной неравенством
$|z+1| + |z-i| < 2$, где $z = x + iy$.

Задача 4. Уходя из квартиры, N гостей, имеющие одинаковые размеры обуви, надевают калоши в темноте. Каждый из них может отличить правую калошу от левой, но не может отличить свою от чужой. Найти вероятность того, что каждый гость наденет свои калоши.

Задачи 5, 6 такие же, как у I курса.

III—V курс

Задача 1. Из точки $M(1,1)$ проведены касательные к двум ветвям гиперболы $y = k/x$ $(k < 0)$, касающиеся этих ветвей в точках A и B. Известно, что $\triangle MAB$ равносторонний. Найти значение параметра k.

Задачи 2—6 такие же, как у II курса.

Май 2016

I курс

Задача 1. Парабола с вершиной на оси Oy проходит через точки $A(1,0)$ и $B(4,3)$. Составить уравнение параболы, если известно, что оно не содержит xy.

Задача 2. Дана система уравнений с неизвестными $x_1,\dots,x_n$:

$$\begin{cases} ax_1^2+bx_1+c=x_2 \\ ax_2^2+bx_2+c=x_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ ax_{n-1}^2+bx_{n-1}+c=x_n \\ ax_n^2+bx_n+c=x_1, \end{cases}$$

где $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$. Доказать, что система

а) не имеет вещественных решений, если $(b-1)^2-4ac<0$,

б) имеет 1 вещественное решение, если $(b-1)^2-4ac=0$,

в) имеет >1 вещественных решений, если $(b-1)^2-4ac>0$.

Задача 3. Функция $y=ax^3+bx^2+cx+d$ имеет два экстремума. Прямая, проходящая через обе экстремальные точки, проходит через начало координат. Найти зависимость между a, b, c, d.

Задача 4. Вычислить $\int\limits_0^{\pi}\dfrac{x\,\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

Задача 5. Дан $\triangle ABC$ площади 1. Первый игрок выбирает точку X на стороне AB, второй — Y на стороне BC, затем первый — Z на стороне AC. Цель первого — получить $\triangle XYZ$ наибольшей площади, второго — наименьшей. Какую наибольшую площадь может обеспечить первый?

Задача 6. Участнику интернет-олимпиады прислали задание из 20 задач. За каждую верно решённую задачу 8 баллов, за каждую неверно решённую минус 5 баллов, за которую не брался 0 баллов. Участник заработал 13 баллов. Сколько задач он брался решать и сколько решил правильно?

II курс

Задача 1. Доказать, что функция $y=e^{x^2}\int\limits_0^x e^{-t^2}dt$ монотонно возрастает. Решением какого дифференциального уравнения с какими начальными условиями она является?

Задача 2. В урне 4 шара, среди которых один белый, остальные могут быть белыми и чёрными[1]. Наугад вытащили два шара, которые оказались белыми. Какова вероятность, что следующий вытащенный шар тоже будет белым?

[1]априорная вероятность шара быть белым считается по умолчанию 1/2.

Задача 3. Определить характер сходимости и сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$.

Задача 4. Вычислить $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{d\varphi}{a+\sin\varphi}$, $a \in \mathbb{R}$.

Задача 5. Такая же, как у I курса.

Задача 6. Такая же, как у I курса.

III—V курс

Задача 1. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta_n$, где

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \cos(a/n\sqrt{n}) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \cos(2a/n\sqrt{n}) & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & \cos(3a/n\sqrt{n}) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & \cos(na/n\sqrt{n}) \end{vmatrix}$$

Задача 2. Такая же, как у II курса.

Задача 3. Такая же, как у II курса.

Задача 4. Такая же, как у II курса.

Задача 5. Такая же, как у I курса.

Задача 6. Такая же, как у I курса.

Май 2015

I курс

Задача 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n & = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 + \ldots + 2nx_n & = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ kx_1 + 2kx_2 + \ldots + (k^2+1)x_k + \ldots + nkx_n & = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ nx_1 + 2nx_2 + 3nx_3 + \ldots + (n^2+1)x_n & = 0 \end{cases}$$

Задача 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[1-\cos x]{1 + \sin x + \sin^2 x + \ldots}$.

Задача 3. Построить график $F(x)$, если

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad x < 0, \\ 1 & \text{при} \quad 0 \le x < 1, \\ 2 & \text{при} \quad x \ge 1, \end{cases} \qquad F(x) = \int\limits_{-2}^{x} f(y)dy.$$

Задача 4. Найти геометрическое место точек на ровной местности, из которых выстрел и удар пули в окно будут слышны одновременно.

Задача 5. Найти все значения α, для каждого из которых последовательность

$$\cos\alpha,\ \cos 2\alpha,\ \cos 4\alpha,\ \cos 8\alpha,\ \ldots,\ \cos 2^n\alpha,\ \ldots$$

состоит только из отрицательных чисел.

Задача 6. В теннисном турнире участвовали n женщин и $2n$ мужчин. Каждые два участника встретились один раз. Ничьих не было. Отношение числа побед женщин к числу побед мужчин равно $7:5$. Найти n.

II курс

Задача 1. Вычислить сумму ряда $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2n+1}{4^n}$.

Задача 2. В уравнении $ax = b$ параметры a, b выбираются наудачу из отрезков $[1, m]$, $[1, n]$. Какова вероятность того, что корень данного уравнения больше 1, если a, b, m, n натуральные?

Задача 3. Вычислить вычет функции $f(z) = \dfrac{z^2 \sin^2(1/z)}{z^2 - 3z + 2}$ в точке $z = 0$. Ответ представить в конечном виде.

Задача 4. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$.

Задачи 5 и 6 такие же, как у I курса.

III—V курс

Задача 1. Найти область сходимости и сумму ряда $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2\sin^2(17n/2x)}{n!}$

Задачи 2 и 3 такие же, как у II курса.

Задачи 4, 5 и 6 такие же, как у I курса.

Май 2014

I курс

Задача 1. Найти все решения системы уравнений

$$\frac{x-y}{x+y}=\frac{y+z}{y-z}=\frac{x+z}{x-z}$$

Задача 2. Дан эллипс $x^2+y^2+xy=3$. Провести на плоскости прямую так, чтобы сумма квадратов расстояний от вершин эллипса до неё была минимальной.

Задача 3. Вычислить $\displaystyle\int_0^1 \ln^n x\,dx$.

Задача 4. С отвесной скалы высотой 300 м одна за другой упали две капли. Вторая начала падать, когда первая успела пролететь 0,001 мм. На каком расстоянии одна от другой будут капли, когда первая достигнет подножия скалы? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Задача 5. Доказать, что решение $y(x)$ задачи Коши

$$y'=\frac{0{,}5+\sqrt{xy}}{1+x+y}+\frac{\sin^2(xy+1)}{2},\qquad y(0)=0$$

при $x>0$ удовлетворяет неравенству $0\leqslant y(x)<x$.

Задача 6. Дядька Черномор каждый вечер из 33 богатырей назначает на дежурство 9 или 10 по своему усмотрению. Через какое наименьшее число дней может оказаться, что каждый богатырь выходил на дежурство одинаковое число раз?

II курс

Задача 1. 6 ниточек девушка зажимает в руке так, чтобы концы торчали кверху и книзу; подруга связывает концы сверху попарно и снизу попарно. Найти вероятность того, что связанные нити образуют кольцо.

Задача 2. Какой интеграл больше: $\displaystyle\int_0^1 x^x dx$ или $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 (xy)^{xy}dxdy$?

Задача 3. Вычислить сумму ряда $\displaystyle S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}$

Задача 4. Найти площадь области на комплексной плоскости, заданной неравенством $|z+1|+|z-i|<2$.

Задача 5. См. задачу 1-2.

Задача 6. См. задачу 1-6.

III—V курс

Задача 1. Найти $y(x)$ из уравнения $x \int_0^x y\,dx = (x+1) \int_0^x xy\,dx$.

Задача 2. См. задачу 2-3.

Задача 3. См. задачу 2-1.

Задача 4. См. задачу 2-4.

Задача 5. См. задачу 1-2.

Задача 6. См. задачу 1-6.

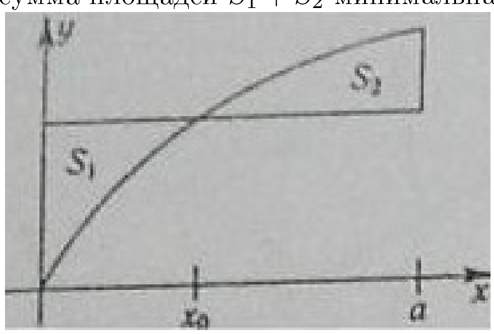
Май 2013

I курс

Задача 1. При каких n совместна система
$$\begin{cases} x_2 + x_3 + \ldots + x_n = 1 \\ -x_1 + x_3 + \ldots + x_n = 1 \\ -x_1 - x_2 + x_4 + \ldots + x_n = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -x_1 - x_2 - x_3 - \ldots - x_{n-1} = 1 \end{cases}$$

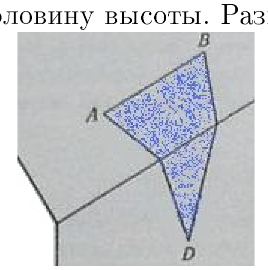
Задача 2. Пусть матрицы A и B таковы, что матрица $E - AB$ имеет обратную. Доказать, что матрица $E - BA$ также обратима.

Задача 3. На отрезке $[0, a]$ задана функция $y = f(x)$, непрерывная и дважды дифференцируемая, причём $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$ на $[0, a]$. Проведена прямая $l = \{y = f(x_o)\}$, $0 \le x_o \le a$; пусть S_1 и S_2 — площади, ограниченные l, графиком и прямыми $x = 0$, $x = a$. При каком значении x_o сумма площадей $S_1 + S_2$ минимальна и максимальна?



Задача 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{3\pi}\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi}\dfrac{x\,dx}{\operatorname{arctg} nx}\right)^n$.

Задача 5. Треугольный лоскут съезжает со стола под действием силы тяжести так, что сторона AB параллельна краю стола. Определить скорость лоскута в момент, когда AB окажется на краю стола. В начале движения лоскут был неподвижен и свешивался на половину высоты. Размеры лоскута заданы, $AD = BD$, трения нет, стол высокий.



Задача 6. По трём прямым дорогам с постоянными скоростями идут три пешехода. В начальный момент они не находились на одной прямой. Какое максимальное число раз они могут оказаться на одной прямой?

II курс

Задача 1. В урне находятся n белых и m чёрных шаров, рядом с урной — ящик с большим запасом шаров. Из урны наугад убирают два шара, и если они оказались одноцветными, то из ящика в урну добавляют чёрный шар, а если оказались разноцветными, то в урну возвращают белый шар. Такую операцию повторяют, пока в урне не останется один шар. С какой вероятностью он будет белым?

Задача 2. При каких значениях $m > 0$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n}\right)^m$ сходится?

Задача 3. Найдите все непрерывные функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, если

$$\iint\limits_D x\, f\Big(\frac{ay}{\sqrt{x^2+a^2}}\Big)dxdy = \frac{a^2(f(a)+\sin a - 1)}{3} \quad \forall\, a \geq 0,$$

где $D = \{x^2 + y^2 \leq a^2,\ |y| \leq x/\sqrt{3},\ x \geq 0\}$.

Задача 4. Найти $\max|az^n + bz^k|$, где k и n — натуральные, a и b — комплексные числа, а максимум берётся по кругу $\{|z| \leq 1\}$.

Задача 5. См. задачу 1-5.

Задача 6. См. задачу 1-6.

III—V курс

Задача 1. Пусть p — натуральное число. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1-0}(1-x)^{p+1}\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^p x^n$.

Задача 2. См. задачу 1-3.

Задача 3. См. задачу 2-4.

Задача 4. См. задачу 2-1.

Задача 5. См. задачу 1-5.

Задача 6. См. задачу 1-6.

Май 2012

I курс

Задача 1. Доказать, что при любых векторах $\vec{a}, \vec{b}$ уравнение $\vec{x} = \vec{a} \times \vec{x} + \vec{b}$ имеет единственное решение. Найти это решение и записать в векторной форме.

Задача 2. Решить уравнение $X^{2012} = X^2$, где $X = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}$, $x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 + y^2 > 0$.

Задача 3. Доказать, что для $0 < \varphi < \pi/2$ выполняется $2 < \dfrac{1}{\sqrt{\varphi}} \displaystyle\int\limits_0^{\varphi} \dfrac{dx}{\sqrt{\sin x}} < \sqrt{2\pi}$.

Задача 4. Вычислить $\dfrac{\partial r}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r} + \dfrac{\partial \theta}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \theta}$, где $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

Задача 5. Шар переменного радиуса касается двух данных перпендикулярных непересекающихся прямых. Найти геометрическое место центров шаров.

Задача 6. Несколько человек сидят по кругу так, что у каждого из них по 1 соседу справа и слева. Каждый из сидящих имеет несколько рублей. У 1-го на 1 ₽ больше, чем у 2-го, у 2-го на 1 ₽ больше, чем у 3-го, и т.д. Первый отдаёт 1 ₽ 2-му, 2-ой — 2 ₽ 3-му, и т.д., каждый отдаёт на 1 ₽ больше, чем получил, пока это возможно. В результате у одного из играющих оказывается в 4 раза больше монет, чем у его соседа. Сколько было игроков и сколько денег было сначала у самого бедного?

II курс

Задача 1. Случайная величина x равномерно распределена на $(0;1)$. Какова вероятность, что из отрезков, имеющих длины x, $1-x$, $1/2$ можно составить остроугольный треугольник?

Задача 2. Найти сумму ряда $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)2^n}$

Задача 3. Найти все решения уравнения $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(1 - e^{-x})^n = x$.

Задача 4. Решить дифференциальное уравнение $(3y' - y'')\sin y + (2 - (y')^2)\cos y = 0$.

Задачи 5 и 6 — те же, что для 1 курса.

III—V курс

Задача 1 — та же, что для 2 курса. Задачи 2 и 3 — те же, что для 1 курса.

Задача 4. Вычислить интеграл $\displaystyle\oint\limits_{|z|=r} z^n e^{2/z} dz, \qquad n \in \mathbb{Z}$.

Задачи 5 и 6 — те же, что для 1 курса.

Апрель 2011

I курс

Задача 1. Коэффициенты системы из n уравнений с n неизвестными ($n \geq 2$)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

образуют арифметическую прогрессию: $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, b_1, a_{21}, \ldots, a_{2n}, b_2, \ldots, a_{nn}, b_n$. При каких условиях система имеет единственное решение? Найдите его.

Задача 2. Найти все решения уравнения $(ix+1)^{100} = (x+i)^{100}$, где $i = \sqrt{-1}$.

Задача 3. Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{k^2+3k+1}{(k+2)!}$

Задача 4. Найти треугольник с наибольшей площадью, если известно, что произведение длин его сторон равно 1.

Задача 5. Пусть $r \in \mathbb{N}$. Вычислите интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{\sin(2r+1)\varphi}{\sin\varphi} d\varphi$

Задача 6. Куб со стороной a вращается вокруг своей диагонали. Вычислить объём тела, получающегося при этом.

II курс

Задача 1. Оценить интеграл $\iint\limits_D (x^2-y^2)dxdy$, где D – область, ограниченная окружностью $x^2+y^2=2x$.

Задача 2. Вдоль прямого шоссе, на расстоянии 500 м друг от друга стоят 2 дома, в каждом из них можно поселить до 20 чел. Как следует расселить 30 чел. и где выбрать на шоссе место для остановки автобуса, чтобы минимизировать суммарную ходьбу жильцов до неё ?

Задача 3. Случайно выбраны три числа $a \geq b \geq c \geq 0$. С какой вероятностью[2] уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет действительные корни?

Задача 4. Вычислить интеграл $\oint\limits_L \dfrac{z}{z^4+1}dz$, где контур $L: \quad 4x^2+y^2+8x+4y=0$.

Задача 5. Найти область сходимости ряда ($x \in \mathbb{R}$) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\Big(1+\dfrac{(-1)^n}{n^x}\Big)$

[2]Задача некорректна, ибо в неограниченной области $a \geq b \geq c \geq 0$ не существует равномерное распределение.

Задача 6. Куб со стороной a вращается вокруг своей диагонали. Вычислить объём тела, получающегося при этом.

III—V курс

Задача 1. Оценить интеграл $\iint\limits_D (x^2 - y^2)dxdy$, где D – область, ограниченная окружностью $x^2 + y^2 = 2x$.

Задача 2. Куб со стороной a вращается вокруг своей диагонали. Вычислить объём тела, получающегося при этом.

Задача 3. Найти область сходимости ряда ($x \in \mathbb{R}$) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\Big(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^x}\Big)$

Задача 4. Случайно выбраны три числа $a \geq b \geq c \geq 0$. С какой вероятностью[2] уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет действительные корни?

Задача 5. Шарообразная капля падает без трения под действием силы тяжести в атмосфере, насыщенной паром. В начале движения радиус c, скорость V_0. Вследствии конденсации масса капли растёт со скоростью $\alpha \cdot S_{\text{поверх}}$ (следовательно, $dr/dt = const$). Найти зависимость скорости капли V от радиуса r.

Задача 6. Вдоль прямого шоссе, на расстоянии 500 м друг от друга стоят 2 дома, в каждом из них можно поселить до 20 чел. Как следует расселить 30 чел. и где выбрать на шоссе место для остановки автобуса, чтобы минимизировать суммарную ходьбу жильцов до неё ?

Апрель 2010

I курс

Задача 1. Коэффициенты системы n уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

удовлетворяют условиям: а) a_{11}, $a_{22}, \ldots, a_{nn} > 0$; б) остальные $a_{ij} < 0$,
в) в каждом уравнении сумма коэффициентов положительна.
Доказать, что $(0, 0, \ldots, 0)$ – единственное решение системы.

Задача 2. Первый член последовательности $a_1 = 3^{2010}$; $\forall\ n \geq 1 \quad a_{n+1}$ равен сумме цифр числа a_n. Найдите a_{10}.

Задача 3. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принадлежат отрезку $[a; b]$, $0 < a < b$. Доказать неравенство

$$(x_1 + \ldots + x_n)\Big(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}\Big) \leq \frac{(a+b)^2}{4ab} n^2.$$

Задача 4. Вычислить $\displaystyle\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin\sin x - x\sin x + x^2 \sin 2x - \cos x}{x^2 + \cos^2 x} dx.$

Задача 5. На поверхности $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ заданы точки $M_1(2; 0; 2)$ и $M_2(0; 7; 7)$. Найти наименьшее расстояние между точками по данной поверхности.

Задача 6. Найти предел $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \prod_{k=1}^{2n} \big(n^2 + k^2\big)^{1/n}.$

Задача 7. Решить уравнение $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

II курс

Задача 1. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{(x^2 + 1/2)^2} dx.$

Задача 2. Получить дифференциальное уравнение парабол, пересекающих ось абсцисс только однажды.

Задача 3. Определите характер сходимости и найдите сумму $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \ln\Big(1 + \frac{1}{k}\Big).$

Задача 4. Внутри области, ограниченной непрерывной выпуклой замкнутой кривой, взята точка O и через неё проведены хорды. Доказать, что если хорда отсекает сегмент min или max площади, то O является серединой хорды. Справедливо ли обратное утверждение ? Какие результаты вытекают из данного утверждения для окружности ?

Задача 5. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0;1]$. Докажите, что

$$\left(\int\limits_0^1 f(x)dx\right)^2 = 2\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x)f(y)dy.$$

Задача 6. Доказать тождество

$$\cos^n \frac{\pi}{n} - \cos^n \frac{2\pi}{n} + \ldots + (-1)^n \cos^n \frac{(n-1)\pi}{n} = 1 - \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Задача 7. Имеются две монеты со смещёнными центрами: на первой орёл выпадает в $2/3$ случаях, на второй — в $1/4$ случаев. Какова вероятность того, что игрок, подбрасывая по очереди обе монеты (начиная с первой), увидит два герба подряд прежде, чем две решки подряд ?

III—V курс

Задача 1. Найти все решения в целых числах уравнения $y^2 + y = x^4 + x^3 + x^2 + x$.

Задача 2. Преподавателю и студентам некоторой группы задают вопросы (ответ „да" или „нет"). Вероятность правильного ответа преподавателя равна α, студента-парня β, девушки γ. Вероятность того, что ответ слдучайно выбранного студента совпадёт с ответом преподавателя, равна $1/2$. Найти отношение числа парней к числу девушек в группе.

Задача 3. Пусть $\Phi(x)$ – сумма ряда Фурье функции $f(x) = \dfrac{|x^3-1|}{x-1}$ на интервале $(-2;2)$. Постройте график $\Phi(x)$.

Задача 4. Найти область сходимости ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\ln^n x}$.

Задача 5. Тяжёлый шар осторожно кладут в наполненную водой вазу, имеющую форму сегмента параболоида вращения. Размеры вазы заданы. Определить радиус шара, чтобы он вытеснил как можно больше воды.

Задача 6. У грузовика передние покрышки (по одной на колесе) стираются через 15000 км пути, задние (по две на колесе) – через 25000 км. Как нужно менять покрышки на колёсах, чтобы проехать на одних и тех же покрышках наибольшее расстояние ? Найдите это расстояние.

Задача 7. Вычислить $I = \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{x/11}}{e^x+1}dx$.

Сентябрь 2009

I курс

Задача 1. Дана квадратная матрица A порядка n. Пусть $P(\lambda)$ – её характеристический полином и $P(0) \neq 0$. Характеристический полином $R(\lambda)$ обратной матрицы A^{-1} выразить через λ, $P(\lambda)$ и $P(0)$.

Задача 2. Составить уравнение параболы, касающейся эллипса $4x^2 + y^2 = 5$ в точках с $y = -1$.

Задача 3. Решить интегральное уравнение $f(x) = x + 2\displaystyle\int_0^1 (xy^2 + x^2y)f(y)dy$.

Задача 4. Вычислить $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{a}{n}\right)^n$ при любом значении a.

Задача 5. При каком значении n величина $\dfrac{\lg 2 \cdot \lg 3 \cdot \ldots \cdot \lg n}{10^n}$ принимает наименьшее значение ?

Задача 6. Решить уравнение $y(x) = \displaystyle\int_0^x y(t)\cos(x-t)dt + \sin x$.

Задача 7. На плоскости заданы гипербола $xy = a^2 = const$ и окружность $x^2 + y^2 = R^2$. Найти предел отношения площади фигуры, содержащей начало координат и ограниченной дугами гиперболы и окружности, к площади круга при $R \to \infty$.

II курс

Задача 1. Вычислить $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^3dx}{e^x - 1}$

Задача 2. Вычислить сумму $S = \dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \dfrac{3}{4!} + \ldots$.

Задача 3. Первый блок работает без сбоев период x, дальше выходит из строя, второй блок работает период y и выходит из строя. Оба блока входят в прибор, который выходит из строя, если не работает хоть один блок. Известны $P(x = T)$, $P(y = T)$, $P(\max(x, y) = T)$. Найти вероятность того, что прибор проработает T часов.

Задача 4. Отрезок нормали к поверхности $z^2 = 2a\sqrt{x^2 + y^2} + b$, заключённый между поверхностью и плоскостью xOy, проецируется на плоскость xOy. Доказать, что величина проекции постоянна.

Задача 5. Вычислить $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{1 + x^2}$.

Задача 6. Дано $a \geq 1$. Решить уравнение $z + a|z + 1| + i = 0$, если z комплексное.

Задача 7. Малыш может съесть торт за 10 минут, банку варенья за 13 минут и выпить кастрюльку молока за 14 минут. Карлсон может это за 6, 6 и 7 минут, соответственно. За какое наименьшее время они могут покончить с завтраком ?

III—V курс

Задача 1. Задано уравнение $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ при $x > 0$, $y > 0$. Показать, что решением уравнения является $f(x,y) = g(y/x)$, где $g(t)$ – произвольная дифференцируемая функция, и что других решений нет.

Задача 2. Найти преобразование Лапласа от $f(t) = \begin{cases} B, & \text{если } 0 < t \leq \tau, \\ 2B, & \text{если } \tau < t \leq 2\tau, \\ \dots & \dots\dots\dots\dots \\ nB, & \text{если } (n-1)\tau < t \leq n\tau, \\ \dots & \dots\dots\dots\dots \end{cases}$

Задача 3. Решить уравнение $(1-x^3)y'' - 6x^2y' - 6xy = 0$ при условии $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Задача 4. Вычислить интеграл

$$\int_{AO} (e^x \sin y - by)dx + (e^x \cos y - b)dy,$$

где дуга AO – верхняя часть окружности $x^2 + y^2 = ax$, $A(a;0)$, $O(0;0)$.

Задача 5. Каждая из двух урн содержит белые и чёрные шары, причём общее число шаров в обеих урнах равно 25. Из каждой урны наугад вынимают по одному шару. Зная, что вероятность того, что оба шара окажутся белыми, равна 0,54, найти вероятность того, что оба шара окажутся чёрными.

Задача 6. Вычислить интеграл $\oint\limits_{\mathcal{L}} \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, где $\mathcal{L}$ – граница односвязной области.

Задача 7. Пусть события $A_1, A_2, \dots, A_n$ — независимые, а вероятность каждого $P(A_k) = p_k$. Оценить вероятность непоявления ни одного из событий A_k.

Апрель 2008

I курс

Задача 1. Пусть $(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j)$ скалярные произведения линейно зависимых векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n$. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) & \ldots & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_n) \\ (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2) & \ldots & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_2) & \ldots & (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_n) \end{vmatrix}$$

Задача 2. Доказать, что для любых трёх точек параболы с вертикальной осью симметрии выполняется: $k_1 = k_{12} + k_{13} - k_{23}$, где k_1 — угловой коэффициент касательной к параболе в произвольной точке x_1, k_{ij} — угловой коэффициент хорды, проходящей через точки на параболе с абсциссами x_i и x_j.

Задача 3. К дуге окружности проведены касательные в её концах и середине. Получается два треугольника, один образован хордой дуги и двумя касательными к её концам, другой образован тремя касательными. Найти предел отношения площади большего треугольника к площади меньшего, если длина дуги стремится к нулю.

Задача 4. Вычислить предел

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}.$$

Задача 5. Точка двигается по прямой OA с постоянной скоростью v. Вне этой прямой точка движется со скоростью kv. Точка B не лежит на прямой OA. Под каким углом к прямой OA надо свернуть, чтобы попасть в точку B, двигаясь по двум отрезкам прямых, за наименьшее время?

Задача 6. Найти объём тела, в основании которого лежит равнобедренный треугольник с высотой h и с основанием a. Поперечное сечение тела — сегмент параболы с хордой, равной высоте сегмента.

Задача 7. В большом бочонке 8 вёдер кваса. Требуется разлить этот квас пополам в две ёмкости, если имеется ещё два пустых бочонка, в один входит 5 вёдер, в другой 3 ведра. Как разлить квас не больше чем за 7 переливаний?

II курс

Задача 1. Вычислить и сравнить интегралы $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$ и $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1+x^4}$.

Задача 2. Доказать, что если $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi(x, y, C_1)$ — первый интеграл уравнения $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = f(x, y)$, то общий интеграл уравнения примет вид

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial C_1}(\mathrm{d}y - \varphi \mathrm{d}x) = C_2,$$

где C_1, C_2 — постоянные.

Задача 3. Вычислить

$$\oint\limits_C \left(\frac{\mathrm{e}^x}{x^2+y^2}(x\cos y + y \sin y)\mathrm{d}y + \frac{\mathrm{e}^x}{x^2+y^2}(x \sin y - y\cos y)\mathrm{d}x \right),$$

где C — замкнутая кривая, окружающая начало координат и не пресекающая себя.

Задача 4. Найти все непрерывные $f(x)$, если $x \in \mathbb{R}$, и

$$\iint\limits_{\mathfrak{D}} xf(\frac{ay}{\sqrt{x^2+y^2}})\mathrm{d}x\mathrm{d}y = a^2(f(a) + \sin a - 1)/3,$$

$$a \geqslant\ 0,\ \mathfrak{D}:\ x^2+y^2 \leqslant a^2,\ \mid\ y\ \mid \leqslant x/\sqrt{3},\ x \geqslant 0.$$

Задача 5. Подводная лодка атакует корабль, выпуская по нему последовательно и независимо одна от другой n торпед. Каждая торпеда попадает в корабль с вероятностью p с одинаковой вероятностью в каждый из k отсеков подводной части корабля. Корабль идет ко дну, если поражено не менее двух отсеков. Найти вероятность того, что корабль будет пущен ко дну.

Задача 6. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, если $a_0 = 1$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{4} + (-1)^n \frac{1}{2}$

Задача 7. Однажды двое пастухов продали стадо волов, получив при этом за каждого вола столько рублей, сколько в стаде волов. На вырученные деньги купили стадо овец по 10 ₽ за овцу и одного ягненка. При дележе поровну одному досталась лишняя овца, другой же взял ягненка и получил с товарища доплату. Как велика доплата (она выражается целым числом рублей)?

III—V курс

Задача 1. Имеются две урны. В одной из них находится шар, о котором известно, что он либо белый, либо черный. В другой урне находится 1 белый шар и 2 черных шара. В первую урну кладут белый шар, после чего ее хорошенько встряхивают и извлекают из нее один шар, который оказывается белым. Как следует действовать, чтобы вероятность извлечь шар после проделанных операций была наибольшей: вытаскивать шар, не зная из какой урны мы его извлекаем, или сначала пересыпать содержимое одной урны в другую и лишь затем тащить шар?

Задача 2. По известному общему решению линейного дифференциального уравнения $y = C_1 x + C_2 \operatorname{ch} x + C_3 \operatorname{sh} x - \alpha(x^2+2)$, где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а α — параметр, восстановить само уравнение.

Задача 3. Вычислить $\int\limits_0^{\pi} \dfrac{d\varphi}{a + b\cos\varphi}$, если $a > b > 0$.

Задача 4. Найти геометрический образ области сходимости ряда на комплексной плоскости: $1 + (z^2+1) + (z^2+1)^2 + (z^2+1)^3 + \cdots + (z^2+1)^n + \ldots$

Задача 5. Найти $y = y(x)$, если $y(0) = 0, y'(1) = 1$, а интеграл $F(y) = \int\limits_0^1 \left(y^2 + y'^2\right) dx$ принимает наименьшее значение.

Задача 6. Вычислить $\dfrac{2}{\sqrt{2}} \dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \ldots$

Задача 7. Вычислить $A = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} \prod\limits_{m=1}^{n} (n^2+m^2)^{1/n}$