**Задачи отборочных туров математических олимпиад**
**среди студентов МГТУ им. Н.Э.Баумана**
(*с 2005 года, в обратном хронологическом порядке*)

# Март 2017

**Задача 1.** В I четверти плоскости $Oxy$ изобразить геометрическое место точек, равноудалённых от отрезка $\{x = 0 \leqslant y \leqslant 2\}$ и луча $\{x \geqslant 1; y = 0\}$.

**Задача 2.** Дана рекуррентная последовательность: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 1/a_n$. Доказать, что $a_{1438} > 50$.

**Задача 3.** Составить неравенство, задающее фигуру на плоскости, полученную объединением всех отрезков $AB$ ($A \in Ox$, $B \in Oy$) длины 1.

**Задача 4.** Решить уравнение $A^2 - 3A + 2E = 0$, где $A$ — симметричная матрица $2 \times 2$ из действительных чисел.

**Задача 5.** (для I курса)Через точку $A(1;2;4)$ провести плоскость, отсекающую от октанта $\{x, y, z > 0\}$ тетраэдр минимального объёма.

**Задача 6.** (для I курса)Пусть многочлен $P(x) = x^7 + px^6 + qx^5 + \ldots$ имеет 7 разных действительных корней. Доказать, что $q < p^2/2$.

**Задача 7.** (для I курса)Пусть попарные расстояния между точками $A, B, C, D$ заданы таким образом, что для каждой тройки точек выполнено строгое неравенство треугольника. Всегда ли существует тетраэдр с заданными длинами рёбер?

**Задача 5.** (для II–V курсов)Пусть $y(x)$ – решение дифф. уравнения $xy'' + y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$. Доказать, что $0{,}2 < y(1) < 0{,}25$.

**Задача 6.** (для II–V курсов)Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \operatorname{tg}^9 x}$

**Задача 7.** (для II–V курсов)В 15 вёдер насыпали примерно по 10 кг песка. Доказать, что с вероятностью $P > 60\%$ найдутся два ведра, число песчинок в которых делится на 100 с одинаковым остатком.

# Ноябрь 2016

**Задача 1.** Придумать выпуклый многогранник, имеющий столько же граней, рёбер и вершин, как куб, причём в каждой вершине сходятся 3 ребра, однако не все его грани 4-угольники.

**Задача 2.** Найти 1234512345-й член последовательности, заданной рекуррентно:
$a_0 = 1000$, $a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 3 & \text{если } a_n \geqslant 48 \\ 2a_n & \text{если } a_n < 48. \end{cases}$

**Задача 3.** Какова сотая цифра после запятой в числе $(3 + \sqrt{10})^{2016}$ ?

**Задача 4.** Найти площадь множества тех точек, где равны силы притяжения Земли и Луны, когда расстояние между ними $D = 400\,000$ км. Земля тяжелее Луны в 81 раз.

**Задача 5.** (для I курса)Найти порядок малости $f(x) = \cos\sin x - \cos\operatorname{tg} x$ при $x \to 0$.

**Задача 6.** (для I курса)Лыжник вышел 1 мая с Северного полюса и идёт с постоянной скоростью 3 км/ч, держась направления своей тени. На какое максимальное расстояние от полюса он уйдёт?

**Задача 7.** (для I курса)Нарисовать область определения функции
$$f(x,y) = \frac{\sqrt{\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}}{\ln\bigl(1 - \log_4(x^2+y^2)\bigr)}.$$

**Задача 5.** (для II–V курсов)Пусть $(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, \ldots, 20$ — вершины правильного додекаэдра, вписанного в сферу $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Найти $x_1^2 + \ldots + x_{20}^2$.

**Задача 6.** (для II–V курсов)Невесомый сосуд в форме правильной 4-угольной призмы (отношение высоты к ребру основания $2 : 1$ ) заполнен жидкостью наполовину. Составить уравнение для нахождения угла, на который надо наклонить сосуд, чтобы он упал набок.

**Задача 7.** (для II–V курсов)Составить дифференциальное уравнение, общее решение которого имеет вид $y = x + C_1 \sin x + C_2 \sin 2x$.

# Март 2016

**Задача 1.** Колесо малого размера катится по горизонтальной дороге без проскальзывания со скоростью 10 м/с. На какое максимальное горизонтальное расстояние может улететь камень, отвалившийся от колеса? Считать $g = 10$ м/с$^2$.

**Задача 2.** Пусть $x, y, z$ — точки комплексной плоскости. Доказать, что $S(\triangle xyz) = \pm\frac{i}{4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ \overline{x} & \overline{y} & \overline{z} \end{vmatrix}$

**Задача 3.** Доказать, что существует не менее 20 симметричных матриц $X$ размера $3 \times 3$, удовлетворяющих уравнению $4X^2 - X^4 = B$, где $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

**Задача 4.** Привести к общему знаменателю сумму дробей $\sum\limits_{k=1}^{20} \frac{1}{(z-a_k)^2}$ где $a_1, \ldots, a_{20}$ – все (с учётом кратности) корни многочлена $P(z) = z^{20} + z^3 + 1$.

**Задача 5.** (для I курса) Можно ли разместить 68 непересекающихся кругов диаметра 1 внутри квадрата со стороной 8 ?

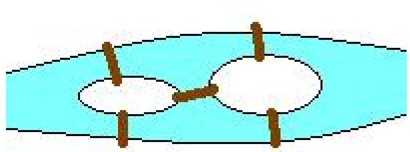
**Задача 6.** (для I курса) Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{|x|} \arccos \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2}$

**Задача 7.** (для I курса) Дана рекуррентная последовательность: $a_0 = 0$;
$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 243, & \text{если } a_n \le 0, \\ a_n - 343, & \text{если } a_n > 0. \end{cases}$ Найти $\min\{n \in \mathbb{N} : \quad a_n = 1\}$.

**Задача 5.** (для II–V курсов) Найти длину кривой, в которую отобразится отрезок $[0, 1]$ под действием функции $z(t) = e^{(1+2i)t}$.

**Задача 6.** (для II–V курсов) Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\sqrt{n}}{n}$ ?

**Задача 7.** (для II–V курсов)На реке два острова и пять мостов: по одному с каждого острова на каждый берег реки и один между островами. От цунами каждый мост, независимо от других, разрушится с вероятностью $p$. С какой вероятностью нельзя будет перейти реку?



# Ноябрь 2015

**Задача 1.** Даны три раствора:
  $A$) 2% сахара и 10% соли,
  $B$) 7% сахара и 2% соли,
  $C$) 6% сахара и 6% соли.
Можно ли получить раствор с 3% сахара и 8% соли?

**Задача 2.** Доказать, что на любом отрезке гиперболы $x^2 - y^2 = 1$ найдётся бесконечно много точек с рациональными обеими координатами.

**Задача 3.** Правильный тетраэдр с длиной ребра 1 ортогонально проецируется на плоскость. Доказать, что сумма квадратов площадей проекций его граней не зависит от выбора плоскости, и найти эту сумму.

**Задача 4.** Вычислить дробную часть числа $a = 2024\sqrt{2024} + 2026\sqrt{2026}$ с относительной погрешностью $< 1/1000$.

**Задача 5.** (для I курса) Сколько различных векторов длины $5\sqrt{2}$ с целочисленными координатами существуют в 3-мерном пространстве?

**Задача 6.** (для I курса) Найти площадь, оганиченную кривой

$$x = \arcsin \sin t + 2 \arcsin \cos t, \quad y = 3 \arcsin \sin t - \arcsin \cos t.$$

**Задача 5.** (для II–V курсов) Вычислить $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$, где $f(x) = \inf\limits_{n \in \mathbb{Z}} |x - 2^n|$.

**Задача 6.** (для II–V курсов) *Найти* $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_x y(x)$, *если* $y(x)$ *— решение задачи Коши* $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 3.$

# Март 2015

**Задача 1.** Дан эллипсоид $\{x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1\}$. Провести через точку $O(0, 0, 0)$ плоскость, пересекающую его по окружности.

**Задача 2.** Среди матриц $3 \times 3$, элементы которых только 0 и 1, найти все матрицы с максимальным определителем.

**Задача 3.** Найти центр тяжести однородной плоской пластины $\left\{\dfrac{e^x}{2} < y < 4 - e^{-x}\right\}$.

**Задача 4.** Найти сумму кубов всех 2014 корней многочлена
$P(z) = z^{2014} + 2z^{2013} + 3z^{2012} + \ldots + 2014z + 2015$.

**Задача 5.** (для I курса)Найти объём наименьшего выпуклого многогранника, содержащего все целочисленные точки, лежащие внутри шара с центром $(0, 0, 0)$ и диаметром 7.

**Задача 6.** (для I курса)Пусть $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1 + a_n^2}$. Доказать, что $\exists\ n:$
$0{,}099 < a_n < 0{,}1$.

**Задача 7.** (для I курса)Вычислить $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x \cos(2x) \cos(4x) \ldots \cos(2^n x) - 1}{x^2}$.

**Задача 5.** (для II–V курсов)Для функции $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
найти $f^{(2015)}(0)$.

**Задача 6.** (для II–V курсов)Вычислить интеграл $\displaystyle\int_0^1 |\sin \ln x| dx$.

**Задача 7.** (для II–V курсов)Кубик с цифрами от 1 до 6 подбрасывают неограниченное число раз. Найти вероятность того, что „1” выпадет впервые раньше, чем впервые выпадет чётная цифра.

# Ноябрь 2014

**Задача 1.** Пусть $z_1, \ldots, z_7$ – корни многочлена $x^7 + x^4 + x + 1 = 0$. Найти многочлен 7 степени с корнями $z_1^2, \ldots, z_7^2$.

**Задача 2.** Каждую полночь апельсин рождает 2 банана, а банан рождает 1 апельсин. Первоначально был один банан. Найти:
а) сколько чего будет через $n$ ночей,
б) предел отношения числа бананов к числу апельсинов.

**Задача 3.** С поверхности бассейна бьёт струя со скоростью $v$ под углом $\alpha$ к поверхности. При каком $\alpha$ максимальна площадь под струёй? Сопротивлением воздуха пренебречь.

**Задача 4.** На плоскости даны $(n+1)^2$ точек $(x;y)$, $x, y \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Сколькими способами из них можно выбрать 4 точки, являющиеся вершинами квадрата ?

**Задача 5.** (для I курса)Существует ли в 3-мерном пространстве треугольник площади $\sqrt{7}$, вершины которого имеют целочисленные координаты?

**Задача 6.** (для I курса)Найти предел $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\arccos x^x}{\sqrt{x}}$

**Задача 5.** (для II–V курсов)Найти отношение $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt[2015]{x}}dx : \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt[2014]{x}}dx.$

**Задача 6.** (для II–V курсов)Найти центр тяжести однородной пластины
$\{x^2 + y^2 - |x|y \le 1\}$.

# Март 2014

**Задача 1.** Расположить грузы 1 г, 2 г,…, 2014 г в вершинах правильного 2014-угольника так, чтобы центр тяжести совпал с его центром.

**Задача 2.** Найти точку самопересечения кривой $x^y = y^x$.

**Задача 3.** Вычислить сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k k^3$.

**Задача 4.** На плоскости начерчены все окружности радиуса 2014 с целочисленными координатами центров. Доказать, что найдётся круг радиуса $a = 0{,}00003$, не пересечённый этими окружностями.

**Задача 5.** (для I курса) Вагон массой $M = 128$ т имеет помещение $20 \times 2 \times 2$ м; центр тяжести посередине. Вагон заполняют кирпичами плотности $\rho = 2$ т/м$^3$, начиная от переднего конца. При каком % заполнения вагона его центр тяжести будет максимально смещён?

**Задача 6.** (для I курса) Найти все матрицы, коммутирующие с матрицей $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

**Задача 7.** (для I курса) Функция непрерывна на отрезке $[-1, 1]$ и дифференцируема на интервале $(-1, 1)$, причём $f(x^2) - f^2(x) = x(x-1)$. Чему равна $f'(0)$?

**Задача 5.** (для II–V курсов) От однородной пластинки $x, y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1$ отрезана часть $x + y < 0{,}5$. Где находится центр масс оставшейся части?

**Задача 6.** (для II–V курсов) Сколько монет надо подбросить, чтобы вероятность выпадения ровно 12 орлов была максимальна ?

**Задача 7.** (для II–V курсов) Доказать, что

$$X := \underbrace{\sin\ \sin\ \sin \ldots \sin}_{\textit{2014}\ \text{раз}} 1 < \frac{1}{12}$$

# Ноябрь 2013

**Задача 1.** Придумать функцию $f$, непрерывную на $[0;1]$, такую, что $f(0)=f(1)=0$, и не найдётся $x: \quad f(x+0{,}4)=f(x)$.

**Задача 2.** Ошейник кролика скользит по 4-метровой верёвке, концы которой привязаны на высоте 1 м к столбам, между которыми 2 м. Какая площадь травы доступна кролику ?

**Задача 3.** Пусть $a^2+b^2+c^2=1$. Вычислить матрицу $M^{2013}$, если

$$M=\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

**Задача 4.** Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}$.

**Задача 5.** (для I курса)12 туристов остановились на привал. Нужно послать троих за водой и четверых за дровами. Сколькими способами их можно выбрать?

**Задача 6.** (для I курса)Прямоугольник $ABCD$ $(AB=20, BC=116)$ составлен из единичных квадратов. Сколько квадратов целиком лежат внутри $\triangle ABC$ ?

**Задача 7.** (для I курса)На какую максимальную величину может измениться угол между прямыми на плоскости, если растянуть её: $(x;y)\mapsto(x;cy)$, $c>1$ ?

**Задача 5.** (для II–V курсов)Пять параллельных плоскостей пересекают шар так, что получились 2 сегмента, а между ними 4 слоя одинаковой толщины, объёмами $V_1$, $V_2$, $V_3$, $V_4$. Доказать, что $V_1+3V_3=3V_2+V_4$.

**Задача 6.** (для II–V курсов)Доказать, что функция

$$f(x,y,z)=xyz(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)$$

имеет на сфере $\Sigma=\{x^2+y^2+z^2=1\}$ более 10 точек условного максимума.

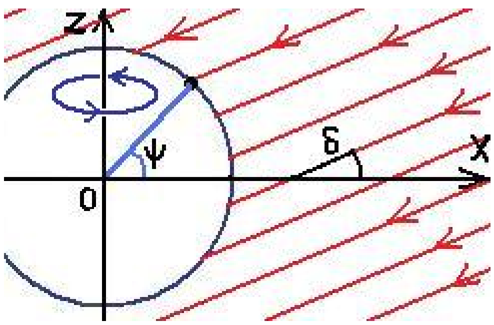
**Задача 7.** (для II–V курсов)При каких значениях константы $\alpha>0$ сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\big(1-n^{-\alpha}\big)^n$ ?

# Март 2013

**Задача 1.** Сколькими способами можно переставить буквы О,Л,И,М,П,И,А,Д,А так, чтобы не было идущих подряд в таком порядке букв Л,И,П,А ?

**Задача 2.** Последовательность задана рекуррентно:
$x_{n+2} = 4(x_{n+1} - x_n)$. Каким может быть предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ ?

**Задача 3.** Лучи Солнца 21 июня падают под углом $\delta = \arcsin(2/5)$ к плоскости экватора Земли. На какой широте $\psi$ надо стоять в этот день, чтобы как можно дольше видеть Солнце выше $45^o$ над горизонтом?




**Задача 4.** (для I курса) Пусть $A$ – матрица $3\times 3$, такая, что сумма модулей её элементов равна 1. Каково максимальное возможное значение её определителя ?

**Задача 5.** (для I курса) Пусть функция $f(t) > 0$ дважды дифференцируема, и $\forall\ x > 0$ $f''(x) \le (f'(x))^2/f(x)$. Доказать, что если $f(0) \ge 6$, $f(12) \le 7$, то $f(48) < 12$.

**Задача 6.** (для I курса) На плоскости даны $n$ ненулевых векторов, не коллинеарные в совокупности. Пусть $Q$ – число способов выбрать из них два неколлинеарных вектора. Найти наименьшее и наибольшее возможные значения $Q$.

**Задача 7.** (для I курса) Пусть $k > 0$. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(n \cdot \max\limits_{0\le x\le 1}(x^n - x^{n+k})\Big)$.

**Задача 4.** (для II–V курсов) Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{(1-x^2)^5}{(1+x^2)^6}dx$.

**Задача 5.** (для II–V курсов) На комплексной плоскости найти площадь множества тех $z$, при которых сходится ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\Big(z^{2n} - 2^{-n}(z-1)^{2n}\Big)$.

**Задача 6.** (для II–V курсов) Сколько несовпадающих частных производных 2013-го порядка имеет функция $f(x,y,z) = \sin x \sin y \sin z$ ?

**Задача 7.** (для II–V курсов) На экзамене дают два вопроса из 40 возможных. Каждый вопрос предусматривает три варианта ответа. К скольким вопросам надо подготовиться, чтобы сдать экзамен с вероятностью $> 1/2$ ?

# Ноябрь 2012

**Задача 1.** Доказать, что $|\cos^7 x - \cos^7 y| \le 2|x-y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

**Задача 2.** Дана правильная пятиугольная пирамида с вершиной $T$ и основанием $ABCDE$, в которое вписана окружность радиуса 1. Какова должна быть высота $h$ пирамиды, чтобы углы между любыми двумя из пяти плоскостей $TAB, TBC, TCD, TDE, TEA$ были одинаковы ?

**Задача 3.** (для I курса)Сколько различных параллелепипедов можно составить из 7 кирпичей $2 \times 3 \times 4$ ?

**Задача 4.** (для I курса) По внутренней стороне неподвижной окружности радиуса 2 катится без проскальзывания окружность радиуса 1. Какой путь пройдёт точка катящейся окружности между двумя соприкосновениями с неподвижной окружностью?

**Задача 3.** (для II–V курсов)При каком $\alpha$ существует конечный ненулевой предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^\alpha \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n^2+k^2}\right)$ ? Чему он равен?

**Задача 4.** (для II–V курсов)В ящике $n$ белых, $n$ синих и $n$ красных шаров. При каком $n$ вероятность того, что три случайно вынутых шара окажутся разных цветов, наиболее близка к 25% ?

# Март 2012

**Задача 1.** Доказать, что существует натуральное число $n$ такое, что сумма $S(n)$ всех его натуральных делителей больше $3n$.

**Задача 2.** Даны константы $A$, $B \in \mathbb{R}$ и $m > k > 0$. Найти предел

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \big(A\sin kt + B\sin mt\big)^2 dt.$$

**Задача 3.** Изобразить на плоскости $Oxy$ множество $A$, состоящее из точек $(x;y)$, таких, что уравнение

$$\cos 2\varphi + x\cos\varphi + y = 0$$

имеет два корня $\varphi \in (0;\pi)$. Вычислить площадь $A$.

**Задача 4.** Остров, в центре которого круглое озеро, разделён на 4 страны, каждая имеет выход к морю и к озеру. Сколькими способами можно раскрасить карту острова (чтобы граничащие страны не были одного цвета), если имеются $n$ красок?

**Задача 5.** (для I курса)Пусть $M$ – правильный $n$-угольник; $R$ и $r$ – радиусы описанной и вписанной окружностей; $\rho$ – радиус круга, равного $M$ по площади. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{R-\rho}{\rho-r}$.

**Задача 6.** (для I курса)Найти предел

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{ctg}\Big(\pi(2+\sqrt{7})^n\Big).$$

**Задача 7.** (для I курса)Найти все целочисленные решения матричного уравнения
$A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$, $A^T = A$.

**Задача 5.** (для II–V курсов)Доказать, что $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{x}{1-e^{-x}} dx = \frac{\pi^2}{12}$.

**Задача 6.** (для II–V курсов)Доказать, что существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\Big).$$

**Задача 7.** (для II–V курсов)Решить задачу Коши

$$y^{(17)} = y; \quad y(0) = 1, \;\; y'(0) = y''(0) = \ldots = y^{(16)}(0) = 0.$$

# Март 2011

**Задача 1.** Сколько корней имеет уравнение $\ln\cos x = x^2 - 1000$ ?

**Задача 2.** Пусть $K$ – ограниченное множество на плоскости. Обозначим через $K_R$ множество точек, находящихся на расстоянии $< R$ от $K$. Вычислить предел $\lim\limits_{R\to+\infty} \dfrac{S(K_R)}{R^2}$.

**Задача 3.** Ночная температура участка лунной поверхности изменяется согласно дифференциальному уравнению $dy/dt = -a{\cdot}y^4,\ a = const > 0$. Сразу после захода Солнца температура была 250 $K$, в полночь 125 $K$. Какая температура будет перед восходом Солнца ?

**Задача 4.** Вычислить произведение всех некратных корней многочлена $P(z) = z^5 + 15z^3 - 2000z - 6016$.

**Задача 5.** (для I курса) Дана фигура на плоскости $\Pi = \{y \geq (x-6)^2, x \geq (y-6)^2\}$. Доказать, что $S(\Pi) \geq 20$.

**Задача 6.** (для I курса) Доказать, что $P(n) = n^{13} - n$ делится на 10 при всяком натуральном $n$.

**Задача 7.** (для I курса) Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}\arcsin x - \sin\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

**Задача 5.** (для II–V курсов) Составить однородное линейное дифференциальное уравнение и начальные условия, чтобы решением задачи Коши была сумма ряда

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^3}$$

**Задача 6.** (для II–V курсов) Стрелок $X$ попадает в мишень с вероятностью 0,3; стрелок $Y$ – с вероятностью 0,7. Найти вероятность того, что, сделав по $n$ независимых выстрелов, $X$ и $Y$ попадут одинаковое число раз.

**Задача 7.** (для II–V курсов) Пусть $ABC$ — равносторонний треугольник, вписанный в круг $U$ радиуса 1 на плоскости $Oxy$. Для функции $f(x,y) = ax + by + c$ доказать равенство

$$\iint\limits_U f(x,y)dxdy = \frac{\pi}{3}(f(A) + f(B) + f(C)).$$

# Март 2010

**Задача 1.** Доказать, что $\forall\ x \in \mathbb{R}$ $\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1) - \operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1) = \operatorname{arctg}(x^2) + C$. Найти константу $C$.

**Задача 2.** Кубическая коробка собирается из 6 квадратных досок разных цветов. У каждой доски на одной стороне несимметричный рисунок. Сколькими способами можно собрать куб так, чтобы все рисунки оказались снаружи?

**Задача 3.** Вычислить объём тела, ограниченого поверхностью

$$|x+y-z| + |x-y+z| + |-x+y+z| = 2$$

**Задача 4.** Пользуясь монотонностью функции, доказать, что

$$\frac{\pi}{12} \le \int_0^{\pi/2} (\cos x)^{1/x^2} dx \le \frac{\pi}{2\sqrt{e}}$$

**Задача 5.** (для I курса) На плоскости зафиксирован круг и точка $A$ на его границе. Через $A$ проведена касательная $\ell$. Если повернуть $\ell$ вокруг $A$ на малый угол $\varepsilon$, то каков порядок малости площади меньшего сегмента, отсекаемого от круга, по сравнению с малой $\varepsilon$ ?

**Задача 6.** (для I курса) Найти ранг матрицы $n\times n$, состоящей из элементов $a_{ij} = (i+2j-3)^2$.

**Задача 5.** (для II–V курсов) Пусть $\ell$ — линия пересечения сферы $x^2+y^2+z^2 = 1$ с плоскостью $x+y+z = c$. Вычислить интеграл

$$\int_\ell x^2\ ds.$$

**Задача 6.** (для II–V курсов) Вычислить интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2010} e^{-x^2/2} dx$.

# Март 2009

**Задача 1.** Точка движется по окружности радиуса $R$ с равномерно возрастающей скоростью. В начальный момент она покоилась. Какой путь она пройдёт до того момента, когда вектор её ускорения будет образовывать с радиусом окружности острый угол $\alpha$ ?

**Задача 2.** На плоскости даны точки $A$ и $B$, расстояние между ними равно $D$. Найти площадь множества тех точек $P$ данной плоскости, для которых выполнено неравенство $BP > 2AP$.

**Задача 3.** (для I курса) Последовательность задана рекуррентно: $a_{n+1} = 2a_n - n$. При каких значениях $a_1$ получится $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ?

**Задача 4.** (для I курса) На плоскости фиксированы пять точек, причём четыре из них являются вершинами квадрата. Доказать, что существует единственная кривая второго порядка, проходящая через эти 5 точек.

**Задача 5.** (для I курса) Найти неопределённый интеграл $\displaystyle\int \mathrm{tg}^{2009}\, x\; dx$.

**Задача 6.** (для I курса) Сколькими способами можно расставить на прямоугольной шахматной доске $n \times m$ двух коней – чёрного и белого так, чтобы они угрожали друг другу?

**Задача 3.** (для II–V курсов) Найти явное выражение для функции, заданной степенным рядом

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 - 1}$$

**Задача 4.** (для II–V курсов) Пусть $f(x, y, z)$ — непрерывно дифференцируемая функция. Обозначим $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Доказать, что векторное поле

$$\vec{V}(x, y, z) = f\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

является соленоидальным во всей своей области определения.

**Задача 5.** (для II–V курсов) Подбрасывают 7 белых и 7 чёрных кубиков с числами от 1 до 6 на гранях, затем подсчитывают сумму чисел, выпавших на белых, и сумму на чёрных. Доказать, что вероятность совпадения этих сумм больше, чем 1/36.

**Задача 6.** (для II–V курсов) Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $x^3 + y^3 = xy$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

# Март 2008

**Задача 1.** При каком значении параметра $k$ минимально расстояние между фокусами гиперболы $y = \dfrac{1}{x} + kx$ ?

**Задача 2.** Функция $f(x, y)$ непрерывна в круге $\{x^2 + y^2 < 2\}$. Доказать, что $\forall\ a \in (0; 2)\ \exists$ квадрат $ABCD$ со стороной $a$, такой, что $f(A) + f(C) = f(B) + f(D)$.

**Задача 3.** Пусть $A$ – матрица $n \times n$, все элементы которой равны $c$;
$I$ – единичная матрица $n \times n$. Вычислить $\det(I + A)$.

**Задача 4.** Скорость относительного прироста (% в год) населения острова пропорциональна числу, на которое население меньше числа $M$. Найти $M$, если известно, что в 1920 году на острове было 6 тыс. жителей, в 1960 — 10 тыс., а в 2000 — 15 тыс.

**Задача 5.** (для I курса) Дан треугольник $ABC$. Пусть $K$ – середина $AB$, $L$ – середина $AC$. Пусть прямая $\ell$ параллельна $CK$ и пересекает $AC$ в точке $P$, $KL$ в точке $Q$, $AB$ в точке $R$, при этом $PQ = QR$. Пусть $M$ – середина $BK$. Найти отношение $CM/PK$.

**Задача 6.** (для I курса) Найти 2008-ю производную функции $f(x) = e^x \cdot \cos(\sqrt{3} \cdot x)$.

**Задача 5.** (для II–V курсов) Вечером встретились 5 хамелеонов разных цветов. За ночь каждый поменял свой цвет на один из 4 других цветов, выбирая цвета с равными вероятностями и независимо от других хамелеонов. Найти вероятность того, что утром эти 5 хамелеонов вновь окажутся разных цветов.

**Задача 6.** (для II–V курсов) Вычислить сумму ряда $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2^n}$.

# Март 2007

**Задача 1.** На плоскости фиксируется точка $P$. Рассматриваются все правильные треугольники $ABC$ такие, что $AP = 3$, $BP = 2$. Найти среди таких треугольников максимальную длину $CP$.

**Задача 2.** Числа $a$, $b$, $c \in (0; \pi/2)$. Известно, что $\cos a = a$, $\sin(\cos b) = b$, $\cos(\sin c) = c$. Расположить $a$, $b$, $c$ в порядке возрастания.

**Задача 3.** Найти такие квадратные матрицы $X$ из уравнения $A^2X^2 + 2AX = 0$, которые перестановочны с заданной матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Задача 4.** Пусть $f \in C^2[a; b]$, $a > 0$; $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0 \; \forall x \in (a; b)$. Известно, что касательная к графику $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_o))$ отсекает от осей координат треугольник минимальной площади. Доказать, что точка касания лежит на середине гипотенузы.

**Задача 5.** Все 8 участников шахматного турнира набрали разное количество очков. Известно, что второй призёр набрал столько же очков, сколько вместе 4 последних шахматиста. Как сыграли между собой шахматисты, занявшие 3 и 7 места? (В шахматах победа = 1 очко, ничья = 1/2 очка, поражение = 0 очков. Турнир проводится в один круг, каждый участник играет один раз со всеми остальными).

**Задача 6.** (для I курса) Найти явную формулу для определителя матрицы $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

**Задача 6.** (для II–V курсов) Вычислить определённый интеграл $\int y^2 dx$, где $y(x)$ задана неявно: $xy - e^y = 0$, $x > 0$. Область интегрирования – интервал убывания $y(x)$.

**Задача 7.** (для II–V курсов) Существует ли решение дифференциального уравнения $y'' = xy$, которое касается $Ox$ ? (касается, но не совпадает. $y \equiv 0$ не годится).

# Март 2006

**Задача 1.** Показать, что матрица $A$ обратима и найти $A^{-1}$, если
$A^3 - 3A^2 + 4A - 7E = 0$.

**Задача 2.** Обратить матрицу $A$ ($a_{ij} = 1$, $i \neq j$; $a_{ii} = i$; $i, j = 1, \ldots, n$).

**Задача 3.** В прямоугольник $20 \times 25$ произвольно бросили 120 квадратов $1 \times 1$. Доказать, что круг диаметром 1 можно поместить в исходный прямоугольник так, что у него не будет ни одной общей точки ни с одним из 120 квадратов.

**Задача 4.** Известно, что у функции $f(x)$, положительной на $[a; b]$, на этом отрезке существует $f''(x) < 0$. Через некоторую точку $M_o(x_o, f(x_o))$ провели касательную. Рассмотрим трапецию со сторонами $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и вышеуказанной касательной. Найти такую точку $M_o$, чтобы у этой трапеции была минимальная площадь.

**Задача 5.** Найти $n$ из условия

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)(1+3x)\cdots\big(1+(2n-1)x\big) - 1}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \ldots + \operatorname{tg} nx} = \frac{7}{4}.$$

**Задача 6.** (для I курса) На плоскости имеется 2006 векторов, не все из которых коллинеарны. Известно, что сумма любых 2005 векторов параллельна оставшемуся 2006-му вектору. Найти сумму всех 2006 векторов.

**Задача 7.** (для I курса) Известно, что неравенство $a \cos x + b \cos 3x > 1$ не имеет решений. Доказать, что тогда $|b| \leq 1$.

**Задача 6.** (для II–V курсов) Найти $f^{(2005)}(0)$ и $f^{(2006)}(0)$ для $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

**Задача 7.** (для II–V курсов) Известно, что дифференциальное уравнение

$$y'' + py' + qy = 4x + 8 + 5e^{-x}$$

имеет частное решение $y(x) = e^{-x} + x + 2$. Найти другое частное решение $z(x)$, которое при $x = 0$ имеет экстремум $z(0) = 1$.

# Март 2005

**Задача 1.** (а) Доказать, что определитель кососимметричной матрицы нечётного порядка равен нулю. (б) Верно ли это для кососимметричных матриц чётного порядка?

**Задача 2.** Решить (при $x \neq 0$) дифференциальное уравнение
$x^2(y')^2 + 2x(y-1)y' + y^2 - 2y = 0$.

**Задача 3.** (для I курса) Пусть функция $y = f(x)$, определённая либо на всей числовой оси, либо на некотором полуинтервале вида $(a, +\infty)$, непрерывна и имеет строго положительную вторую производную на всей области определения. Доказать, что если $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, то на всей области определения функция $y = f(x)$ больше нуля.

**Задача 4.** (для I курса) При $|x| < 1$ вычислить предел $\lim\limits_{n \to \infty} \prod\limits_{k=0}^{n} \left(1 + x^{2^k}\right)$.

**Задача 5.** (для I курса) Существует ли непрерывно-дифференцируемая функция $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям: $|f(x)| < 2$ и $f(x) \cdot f'(x) \geqslant \sin x$ при всех действительных значениях $x$?

**Задача 6.** (для I курса) Найти геометрическое место точек плоскости $Oxy$, из которых эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ виден под прямым углом.

**Задача 3.** (для II–V курсов) Решить задачу Коши $\begin{cases} y'' \cos x - 2y' \sin x + 8y \cos x = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$

**Задача 4.** (для II–V курсов) Найти все такие непрерывные на всей числовой прямой функции $f$, что для всякой непрерывной на всей числовой прямой функции $g$ и для любых $a, b$ выполняется равенство

$$\int_a^b f(g(x))\, dx = \int_a^b g(f(x))\, dx.$$

**Задача 5.** (для II–V курсов) Пусть $A$ – самосопряжённый линейный оператор в $\mathbb{R}^m$, и пусть все собственные числа оператора $A$ попарно различны и больше нуля. Доказать, что для любых ненулевых векторов $\vec{x}, \vec{y}$ существует предел
$\lim\limits_{n \to \infty} \angle(A^n \vec{x}, A^n \vec{y})$. Указать все значения, какие может принимать данный предел.

**Задача 6.** (для II–V курсов) На единичной окружности комплексной плоскости $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ найти все точки, где сходится ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+1}(z - z^2)^n \quad (*)$