Задачи студенческих математических олимпиад
ЮРГТУ (НПИ) им. М.И. Платова, с 2005 года
(*в обратном хронологическом порядке*)

11 мая 2017

Задача 1. Существует ли такая определённая на $\mathbb{R}$ функция f, что $f(\sin(x + \cos x)) = \cos(x + \sin x)$?

Задача 2. Найти какой-нибудь многочлен $P(x)$, $x \in \mathbb{R}$, степени выше второй, имеющий целые коэффициенты, и один из его корней $x = \sqrt[5]{3 + \sqrt{8}} + \sqrt[5]{3 - \sqrt{8}}$.

Задача 3. Найти предел последовательности $U_n = \int_0^1 x^n (e^{-\cos x} + \sin x) dx$.

Задача 4. Может ли уравнение $1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots = 0$ при условии, что $|a_n| \leq 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$, иметь корень, модуль которого меньше $1/2$?

Задача 5. Решить уравнение $\cos^7 x - \sin^7 x = 1$.

Задача 6. Через точку касания двух сфер проведена секущая прямая, пересекающая сферы в точках A и B соответственно. Будут ли касательные плоскости, проведённые к сферам в точках A и B, параллельны?

Задача 7. Решить уравнение $y'' - e^x y = y^3$ при условиях $0 \leq x \leq 1$, $y(0) = y(1) = 0$.

12 мая 2016

Задача 1. Доказать, что $\dfrac{b-a}{b} < \int\limits_a^b \dfrac{dx}{x} < \dfrac{b-a}{a}$, если $0 < a < b$.

Задача 2. Разделить параллелограмм на три равновеликие части прямыми, выходящими из одной вершины.

Задача 3. Функция $y(x)$ на $[a;b]$ удовлетворяет уравнению: $yy' = 1 + x^2 + y^4$. Доказать, что $b - a < \pi/4$.

Задача 4. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \exp \int\limits_1^n \ln[x]dx$.

Здесь $[x]$ — целая часть числа x, т.е. $[x] = \max\bigl(\mathbb{Z} \cap (-\infty; x]\bigr)$.

Задача 5. Решить уравнение: $y'(x) - x \int\limits_0^1 y(sx)ds = 0$, $y(0) = 1$.

Задача 6. Найти сумму коэффициентов многочлена $f(x) = (x^{10} - x - 1)^{2016} + (x^9 - x + 1)^{2016}$ при чётных степенях x.

Задача 7. $X^2 - 7X = \begin{pmatrix} 0 & 12{,}25 \\ 24{,}5 & 0 \end{pmatrix}$.

21 апреля 2015

Задача 1. Существует ли матрица X такая, что $X + SX + XS = A$, где $S^2 = 0$?

Задача 2. Изобразить на плоскости множество точек (a, b), для которых существует решение системы с неотрицательными x, y :

$$\begin{cases} 2x + y = a \\ x + y = b^2. \end{cases}$$

Задача 3. Точка $M(x, y, z)$ принадлежит эллипсоиду $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{5/9} + \dfrac{z^2}{5} = 1$. Какие значения может принимать сумма $x + 3y + z$?

Задача 4. Пусть функция f имеет конечную производную в точке x; пусть $k \in \mathbb{N}$. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(f\Big(\dfrac{1 + xn^k}{n^k}\Big) - f(x)\Big)n$.

Задача 5. Какой наибольший угол могут образовать между собой вектора $\vec{a} = (x, -y, 3)$ и $\vec{b} = (y, x, -1)$, где $x, y \in \mathbb{R}$?

Задача 6. Пусть f определена и дифференцируема на $[1, +\infty)$, $f(1) = 1$, $|f(x)| \leqslant 1/x$. Доказать, что при некотором x_o $f'(x_o) = -x_o^{-2}$.

Задача 7. Вычислить $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1 + e^{\operatorname{tg} x}}$.

16 апреля 2014

Задача 1. Найти отношение

$$\frac{1 + e^{-2}/3 + e^{-4}/5 + e^{-6}/7 + \dots}{1/2 + e^{-2}/4 + e^{-4}/6 + e^{-6}/8 + \dots}$$

Задача 2. Решить уравнение

$$1 + \left(\int_0^x y(t)dt \right)^2 = y(x)$$

Задача 3. Сколько различных пар (x, y) целых чисел удовлетворяет уравнению

$$\prod_{k=0}^{n} \Big(1 - (x - 5k - 1)^2 - y^2\Big)\Big(1 - (x - 5k - 3)^2 - y^2\Big) = 0 \ \ ?$$

Задача 4. Доказать или опровергнуть утверждение: „в сечении некоторой плоскостью поверхности куба может получиться правильный пятиугольник".

Задача 5. Изобразить на плоскости kOp множество точек $(k; p)$ таких, что прямая $y = kx$ не пересекает параболу $p^2x^2 + y + 1 = 0$.

Задача 6. Известно, что три различных корня уравнения $x^5 + px + q = 0$ действительны. Что можно сказать о знаке коэффициента p ?

Задача 7. Доказать, что при любом расположении 7 точек в прямоугольнике 3×4 найдётся круг радиуса 6/5, накрывающий хотя бы две из данных точек.

23 апреля 2013

Задача 1. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на $[0;1]$ и удовлетворяет условиям: $f'(1) < 2f(1)$, $f''(x) > 0\ \forall x \in (0;1)$. Доказать: $\int_0^1 f(x)dx > 0$.

Задача 2. Доказать, что уравнение $x^6 - 6x - C = 0$ имеет не более двух действительных корней.

Задача 3. Доказать, что на окружности, центр которой имеет иррациональные координаты, не существует трёх различных точек с рациональными координатами.

Задача 4. Какова точная верхняя оценка для суммы s косинусов двугранных углов произвольного тетраэдра?

Задача 5. При каких $p, q \in \mathbb{R}$ сходится последовательность: $x_0 = p$, $x_n = 1 + qx_{n-1}\ \forall n \in \mathbb{N}$? В случае существования предела найти его.

Задача 6. Найти все пары действительных чисел x, y, удовлетворяющих неравенству $y^2 + y^3 + \sqrt[4]{y^3 - x^2 - 3xy} \leq 5xy$.

Задача 7. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет уравнению $f^3(x) + 2f(x) - x = 0$. Вычислить интеграл $S = \int_0^3 f(x)dx$.

11 октября 2011

Задача 1. Существует ли целочисленная матрица размера 3×3 с определителем, равным 1, все элементы которой по абсолютной величине больше 1000 ?

Задача 2. Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} y' = y^2 + z \\ z' = z^2 + y \end{cases}$
с начальным условием $y(0) = z(0) = 1$.

Задача 3. Существует ли в трехмерном пространстве треугольник с площадью $\sqrt{3}$, вершины которого имеют целочисленные координаты ?

Задача 4. Известно, что функция $y(x) = e^{(1-\sqrt[3]{2})x}$ является решением линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными целыми коэффициентами. Найти хотя бы одно такое уравнение.

Задача 5. Изобразить множество точек на плоскости, координаты x, y которых удовлетворяют соотношению $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{2n} - |y|^n}{x^{2n} + |y|^n} < 0$.

Задача 6. Докажите, что положительный корень уравнения
$x(x+1)(x+2)\dots(x+n) = 1$ меньше, чем $1/n!$

Задача 7. Найти непрерывную кусочно-гладкую функцию, для которой интеграл $\displaystyle\int_{-3}^{3} \sqrt{1+(y')^2}dx$ принимает min значение, если: $y(\pm 3) = 0$; $y(x) \geq 1$ при $|x| \leq 1$.

30 сентября 2010

Задача 1. Решить уравнение $X^{2011} = X$, где $X = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}$, $x, y \in \mathbb{R}, x \neq 0, y \neq 0$.

Задача 2. На плоскости Π даны точки A и B. Два шара S_A и S_B касаются Π в точках A и B и касаются между собой в точке M. Для всех таких пар шаров (S_A, S_B) найти множество точек M в пространстве.

Задача 3. Найти

$$\lim_{n\to\infty} n\Big(\frac{1}{n^2+1^2} + \frac{1}{n^2+2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2+n^2}\Big)$$

Задача 4. Найти дифференцируемую функцию $f(x)$ при $|x| < 1$, если:

$$\frac{df(\sin t)}{dt} = -\sin 2t, \qquad f(\sin t) + f(\cos t) = 1.$$

Задача 5. Исследовать ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ на сходимость, если $a_0 = a \neq 0$, и для $n > 0$: $a_n = \dfrac{1}{a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}}$.

Задача 6. Что является образом окружности $x^2 + y^2 = y/3$ при отображении $w = 1/z$, $z = x + iy$, $w = u + iv$?

Задача 7. Решить задачу Коши: $xy'' - y' - x^2yy' = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 2$.

2 октября 2009

Задача 1. Доказать, что для любых натуральных $m \neq 1 \neq n$ хотя бы одно из чисел $\sqrt[m]{n}$, $\sqrt[n]{m}$ не превосходит $\sqrt[3]{3}$.

Задача 2. Длина вектора, равного сумме 10 данных ненулевых векторов, больше длины суммы любых девяти из них. Доказать, что существует ось, на которую проекция каждого из данных 10 векторов положительна.

Задача 3. Функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, дифференцируема на $(a; b)$ и $f(a) = f(b) = 0$. Доказать, что найдётся такая точка $c \in (a; b)$, что $f(c) = f'(c)$.

Задача 4. Существует ли 4-угольная пирамида, две противолежащие боковые грани которой препендикулярны плоскости основания пирамиды?

Задача 5. Последовательность задана такими равенствами:

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 1; \qquad \frac{2}{a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}, \quad n \geq 2.$$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Задача 6. Найти все возможные значения аргумента комплексного числа z, удовлетворяющего условию $\left|z + \dfrac{1}{z}\right| = \sqrt{2}$.

Задача 7. Найти все решения бесконечной системы линейных уравнений

$$x\Big(1 - \frac{1}{2^n}\Big) + y\Big(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\Big) + z\Big(1 - \frac{1}{2^{n+2}}\Big) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

24 сентября 2007

Задача 1. Можно ли изменить порядок перехода к пределу в выражении:

$$\lim_{x\to\,0}\left[\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}\right)\right]?$$

Задача 2. Чему равно число k в равенстве: $\sum\limits_{i=1}^{4} p(z_i) = kp(s)$, если известно, что:
1) $p(z) = z^2 + az + b, \quad z, s, a, b \in \mathbb{C}$;
2) точки, изображающие числа
$z_1, \ldots, z_4 \in \mathbb{C}$, расположены в вершинах квадрата с центром в точке s.

Задача 3. Решить уравнение:

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2-2y+6z+10}+\sqrt{x^2+y^2+z^2-4x-8y-6z+29}=7, \qquad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Задача 4. Как выбрать точку C на графике строго возрастающей дифференцируемой функции f, чтобы сумма площадей фигур, лежащих между графиком и горизонтальной прямой, проведённой через C, была наименьшей?

Задача 5. Найти все $x \in \mathbb{R}$, при которых сходится ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(1-e^{sin(kx)}\right)\operatorname{arctg}(kx)$.

Задача 6. Для того, чтобы уравнение $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ имело действительный корень, достаточно, чтобы уравнение $ax^2 + (c-b)x + e - d = 0$ имело действительный корень, больший 1. Доказать.

Задача 7. Решить уравнение:

$$\int\limits_0^x (x-t)y(t)dt = 2x + \int\limits_0^x y(t)dt.$$

18 октября 2006

Задача 1. Пусть C – центр равносторонней гиперболы на плоскости, S – множество точек плоскости, симметричных точке C относительно касательных, проведённых в каждой точке гиперболы. Найти уравнение линии L, множество точек которой состоит из точки C и множества S. Пользуясь этим уравнением, построить L.

Задача 2. Доказать, что если $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$ на $[0;1]$, то справедливо неравенство:

$$\int\limits_0^1 x^n f(x)dx \leq \frac{1}{n+1}\int\limits_0^1 f(x)dx, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Задача 3. Найти x из уравнения:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\pi^n}{n!} \cos\Big(\pi\big(x + \frac{n}{2}\big)\Big) = 1.$$

Задача 4. Доказать, что не существует функции $y(x)$, непрерывно дифференцируемой на интервале $(\alpha;\beta)$, включающем интервал $(0;\pi/2)$, и удовлетворяющей на $(\alpha;\beta)$ уравнению:

$$y' = (2 + \sin x) \cdot y^2 + \frac{2x+4}{x+1}.$$

Задача 5. Пусть D – односвязное квадрируемое замкнутое множество в $\mathbb{R}^2$ с известной площадью S, симметричное относительно прямой $y = x$. Для функции $f : D \to \mathbb{R}$, непрерывной и положительной в D, вычислить интеграл:

$$\iint\limits_D \frac{f(x,y)}{f(x,y) + f(y,x)} dx\ dy.$$

Задача 6. Найти все непрерывные на $\mathbb{R}$ функции, удовлетворяющие соотношению:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

<u>Замечание</u>: Все непрерывные на $\mathbb{R}$ функции, удовлетворяющие соотношению Коши: $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, имеют вид: $f(x) = cx$, $c = const$.

Задача 7. Для последовательности $\{a_n, n \geq 1\}$ действительных чисел ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, и $a_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$, $\forall n \geq 1$. Найти последовательность $\{a_n, n \geq 1\}$.

19 апреля 2005

Задача 1. Найти $y(x)$ из уравнения $y(y''+y')=(y')^2(xy^2-1)$, $y(0)=y'(0)=1$.

Задача 2. Найти все числа $\lambda>0$ и решения $\varphi(x)\not\equiv 0$, $x\in\mathbb{R}$, дифференциального уравнения $\varphi''(x)+\lambda\varphi(x)=0$, удовлетворяющие условиям:

$$\varphi'(0)=0, \qquad \varphi(0)=(1-\lambda)\int_0^{\pi}\varphi(t)\sin t\,dt.$$

Задача 3. Точка $M(x;y;z)$ движется по закону: $x'_t=z-y$, $y'_t=x-z$, $z'_t=y-x$. Найти траекторию точки M, если в начальный момент $M(0)=(1;-1;1)$.

Задача 4. Вычислить $\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 nx}{4n^2-1}\Big)dx.$

Задача 5. Найти сумму ряда $S=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{f^{(2k-1)}(0)}$, где $f(x)=x\cdot e^{-x}$.

Задача 6. Найти x из уравнения $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a^n\frac{\cos nx}{n}=0,$
где $-1<a<1$.

Задача 7. Найти среднее значение квадрата расстояния точки круга $x^2+y^2\le 2(x+y)$ до начала координат.

Задача 8. Найти непрерывную функцию $f(x)$, если известно, что

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(2x_0,y_0)} f\Big(\frac{y}{x}\Big)\frac{ydx-xdy}{x^2}=-\Big(\frac{y_0}{x_0}\Big)^2, \qquad (x_0\ne 0).$$

Задача 9. Изобразить на плоскости $Oab=\mathbb{R}^2$ множество точек $(a;b)$, для которых имеет решение уравнение

$$\Big(\frac{i\cos x+\sin x}{\cos x+i\sin x}\Big)^n=a+bi \qquad (n\in\mathbb{N}),$$

и найти это решение.

Задача 10. Точка $(\alpha;\beta)$ равномерно распределена в квадрате $|\alpha|\le 1$, $|\beta|\le 1$. Определить плотность вероятностного распределения коэффициента p квадратного трёхчлена $x^2+px+q=(x-\alpha)(x-\beta)$.

Задача 11. Случайная величина ξ принимает значения из $\mathbb{N}$, причём вероятности $P(\xi=n)=2^{-n}$. Найти распределение, матожидание и дисперсию случайной величины $\eta=\cos\frac{\pi\xi}{2}$.