Задачи студенческих математических олимпиад
Рязанского государственного радиотехнического университета (РГРТУ)
с 2016 года
(*в обратном хронологическом порядке*)

25 марта 2017 (*межрегиональная*)

Задача 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $a_k = 1/C_n^k$, $b_k = 2^{k-n}$, где $C_n^k = n!/k!(n-k)!$ — число сочетаний из n по k. Доказать, что

$$\frac{a_1 - b_1}{1} + \frac{a_2 - b_2}{2} + \ldots + \frac{a_n - b_n}{n} = 0.$$

Задача 2. Существует ли непрерывно дифференцируемая функция $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ такая, что для любого $x \in \mathbb{R}$ выполнено $f(x) > 0$ и $f'(x) = f(f(x))$?

Задача 3. Пусть $z_1 = i, z_2 = 1 + i, z_3 = 1 - i$. Найти кривую, задаваемую уравнением

$$\begin{vmatrix} |z|^2 & z & \bar{z} & 1 \\ |z_1|^2 & z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ |z_2|^2 & z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ |z_3|^2 & z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Задача 4. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема для любого $x \in \mathbb{R}$. Может ли f' иметь разрывы а) 1-го, б) 2-го рода?

Задача 5. Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$. Найти $\exp A$.

Задача 6. Найти точки экстремума $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + \sqrt{2}\,x - 1$.

Задача 7. Вычислить $I_n = \int\limits_0^\pi \dfrac{\sin nx}{\sin x} dx$.

Задача 8. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln \dfrac{k}{n}$.

Задача 9. Представить функцию $f(x) = (\operatorname{ch} x)^{\sin x}$ формулой Тейлора в окрестности 0 с точностью до 5-й степени.

Задача 10. Решить уравнение $\sum\limits_{k=0}^{2016} z^k = 0$.

Задача 11. Предложить решение дифференциального уравнения $xy'' = y\big(x(\ln x + 1)^2 + 1\big)$, удовлетворяющее условию $y(1) = 2017$.

Задача 12. Хладнокровный стрелок при каждом выстреле попадает в мишень с вероятностью p. Эмоциональный стрелок при первом выстреле попадает с вероятностью p, но в случае попадания вероятность при следующем выстреле возрастает на d, а в случае промаха вероятность при следующем выстреле снижается на d. Найти p, при котором математическое ожидание M_i числа попаданий при 3 выстрелах для обоих спортсменов одинаково.

9 апреля 2016 (*межрегиональная*)

Задача 1. Вычислить $\sin^4 \dfrac{\pi}{16} + \sin^4 \dfrac{3\pi}{16} + \sin^4 \dfrac{5\pi}{16} + \sin^4 \dfrac{7\pi}{16}$.

Задача 2. Пусть квадратные матрицы из действительных чисел A и B такие, что

$$A^{-1} + B^{-1} = (A+B)^{-1}.$$

1) Предложить матрицы A и B, удовлетворяющие этому уравнению;
2) Доказать, что $\det A = \det B$.

Задача 3. Доказать, что $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} < 2$.

Задача 4. Разложить функцию $f(x) = e^x \cos x$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x = 0$. Рассчитать коэффициент a_{2016} при x^{2016}.

Задача 5. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to 0} \bigl(3^x + x\bigr)^{1/\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \bigl(1 + \operatorname{tg}^2 x\bigr)^{1/\ln\cos x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$.

Задача 6. Дан эллипс $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.
1) Предложить уравнение гиперболы, имеющее такие же координаты фокусов;
2) Показать, что таких гипербол бесконечно много;
3) Показать, что эти гиперболы ортогональны данному эллипсу.

Задача 7. Найти все корни уравнения $z^{2016} = 2016^{2016}$.

Задача 8. Накануне Рио-де-Жанейро-2016 решено проверить всех спортсменов на употребление мельдония. Современные методы позволяют обнаружить мельдоний, даже если анализируется смесь проб нескольких спортсменов. Поэтому, чтобы уменьшить количество проб и расходы, было предложено смешивать пробы k спортсменов, и если проба дала отрицательный результат, то все спортсмены допущены к соревнованиям. Если же результат допинг-пробы положительный, берётся ещё по пробе у каждого. Найти оптимальную численность группы k, если вероятность того, что спортсмен принимал мельдоний $1/4$. Считать, что число спортсменов достаточно велико.

Задача 9. При каких значениях параметра a предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a\operatorname{tg}(x/a) + \sin x - 2x}{x^5}$ будет конечным и ненулевым? Найти этот предел.

Задача 10. Найти производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если[1] $z = \sqrt{x^2+y^2}\,\ln \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Задача 11. Вычислить площадь фигуры, заданной условиями: $x^2 + y^2 \le 25$, $|y| \le 5 - \sqrt{|x|}$.

[1] Это „задача-ловушка”: неявно заданная функция не имеет точек существования. Если студенты указали в решении, что функция не существует, то они получают дополнительные баллы за задачу.

Задача 12. Вычислить интегралы:

$$\text{а)}\quad \int\limits_0^{4\pi} x\,\operatorname{sign}\sin x\,dx; \qquad \text{б)}\quad \int\limits_0^{4\pi} x[\cos x]dx; \qquad \text{в)}\quad \int\limits_0^{\pi} [x]\operatorname{sign}\operatorname{tg} x\,dx.$$

Здесь $[a]$ — целая часть числа a, $\operatorname{sign} b$ — знак числа b.

Задача 13. 1. Показать, что функция $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ удовлетворяет функциональному уравнению $f(x)f(y\,f(x)) = f(x+y)$ для любых $x, y \in [0, +\infty)$.
2. Найти все дифференцируемые функции $f : [0, +\infty) \mapsto [0, +\infty)$, удовлетворяющие данному функциональному уравнению для любых $x, y \in [0, +\infty)$.

Задача 14. Решить дифференциальное уравнение $x^3(xy)'' - 4x^2y' + 3y = 0$. *Указание*: использовать замену $t = 1/x$.

Задача 15. Сборная России по футболу насчитывает 28 человек, каждый из которых является рыцарем (всегда говорит правду) или лжецом (всегда лжёт). Во время пресс-конференции у каждого спросили, сколько в сборной рыцарей. 1-й сказал: „Число рыцарей — делитель 1". 2-й сказал: „Количество рыцарей — делитель 2" и т. д. до 28-го, который сказал: „Количество рыцарей — делитель 28". Определите, сколько в сборной России рыцарей.