Задачи студенческих математических олимпиад
УГАТУ, Уфа, с 2007 года
(*в обратном хронологическом порядке*)

Апрель 2016

Задача 1. Доказать равенство $tg 20^o - \operatorname{tg} 40^o + \operatorname{tg} 80^o = 3\sqrt{3}$.

Задача 2. Найти наименьшее значение функции

$$f(x,y) = \left(\sqrt{x^2+3} - x + y\right)^2 + \left(\sqrt{y^2+3} - y + x\right)^2 \qquad \text{при} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Задача 3. Дана функция $f(x)$, определённая на $[0, +\infty)$, непрерывная, положительная и монотонно убывающая, причём $\int\limits_0^\infty f(x)dx$ сходится. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty} x\, f(x) = 0$.

Задача 4. Доказать, что функция $\Phi(t) = \int\limits_0^1 \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{|x-t|}}$ непрерывна на отрезке $[0,1]$.

Задача 5. Определить вероятность того, что три случайно выбранные точки на плоскости не являются вершинами остроугольного треугольника.

Задача 6. Пронумеруем грани произвольного тетраэдра числами, и пусть φ_{ij}, $i \neq j$ — внутренний двугранный угол, образованный гранями с номерами i, j. Доказать, что

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos\varphi_{12} & \cos\varphi_{13} & \cos\varphi_{14} \\ \cos\varphi_{12} & -1 & \cos\varphi_{23} & \cos\varphi_{24} \\ \cos\varphi_{13} & \cos\varphi_{23} & -1 & \cos\varphi_{34} \\ \cos\varphi_{14} & \cos\varphi_{24} & \cos\varphi_{34} & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Задача 7. Матрицу A размера $(2n+1)\times(2n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, два игрока по очереди заполняют любыми не повторяющимися действительными числами. Доказать, что начинающий всегда может добиться того, чтобы определитель $|A|$ стал равен нулю.

Апрель 2015

Задача 1. Если $f(x)$ непрерывна на $[0,1]$, $b > a > 0$, то чему равен $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\displaystyle\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(x)dx}{x}$?

Задача 2. Найти уравнение кривой, которую описывает основание высоты, опущенной из вершины прямого угла на отрезок длины $2a$, концы которого скользят по сторонам данного угла.

Задача 3. Найдите все дифференцируемые функции, определенные на всей числовой прямой, для которых при любых вещественном x и целом положительном n выполняется равенство

$$f'(x) = \frac{f(x+n) - f(x)}{n}.$$

Задача 4. Какова вероятность, что прямая, наудачу брошенная на плоскость и пересекающая окружность радиуса $r = 10$, пересечет отрезок длины $2l = 4$, лежащий на диаметре симметрично относительно центра окружности.

Задача 5. Дано $y(0) = 0$ и $y' = \dfrac{1}{2}\Big(\sin^2(xy+1) + \dfrac{1+2\sqrt{xy}}{1+x+y}\Big)$. Доказать, что график $y = y(x)$ лежит в I четверти между прямыми $y = 0$ и $y = x$.

Задача 6. Касательные к параболе $y^2 = 2px$ в точках A, B, C образуют треугольник KLM. Доказать, что площадь треугольника ABC в два раза больше площади треугольника KLM.

Задача 7. Зная, что $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}/2$, найти $f(y) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2xy\,dx$.

Ноябрь 2011

Задача 1. Доказать, что уравнение

$$1 + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + 2010x^{2010} = 2011x^{2011}$$

имеет единственный положительный корень.

Задача 2. Найти сумму ряда $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\Big(1 - \frac{1}{n^2}\Big)$.

Задача 3. Найдите все функции $f(x)$ такие, что для любого многочлена $g(x)$ на всей числовой прямой выполняется тождество $f(g(x)) \equiv g(f(x))$.

Задача 4. Докажите, что хотя бы одна из сторон треугольника, расположенного в единичном квадрате, не больше $r = \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

Задача 5. В числовой таблице 5×5

$$\begin{bmatrix} 11 & 17 & 26 & 19 & 16 \\ 24 & 10 & 13 & 15 & 3 \\ 12 & 5 & 14 & 2 & 18 \\ 23 & 4 & 1 & 8 & 22 \\ 4 & 20 & 7 & 24 & 9 \end{bmatrix}$$

выберите 5 чисел (по одному из каждой строки и столбца) так, чтобы минимальное из них было максимально возможным. Обоснуйте предложенный выбор.

Задача 6. Пусть $f, g : [0;1] \mapsto \mathbb{R}$ — произвольные функции. Докажите, что найдутся числа $x, y \in [0;1]$ такие, что $|xy - f(x) - g(y)| \geq 1/4$.

Задача 7. Клад зарыт на необитаемом острове, там растёт всего две пальмы: маленькая и большая на расстоянии 400 м друг от друга. Расстояние от клада до маленькой пальмы в три раза больше, чем до большой. Какова L — длина траншеи, которую надо вырыть, чтобы найти клад ?

Задача 8. Найти наименьшую длину отрезка, проходящего через точку $M(1; 5\sqrt{5})$, концы которого лежат: один — на положительном направлении оси Oy, а другой на положительном направлении оси Ox.

Задача 9. Докажите, что не существует функции $f(x)$, определённой на множестве вещественных чисел, которая удовлетворяет равенству
$f(f(x)) = x^2 - 1$.

Задача 10. Найти интегральную кривую уравнения $y'' + ky = 0$, проходящую через точку $M(x_o, y_o)$ и касающуюся в этой точке прямой
$\ell = \{y - y_o = a(x - x_o)\}$.

Ноябрь 2010

Задача 1. Из чисел $1, 2, \ldots, 2010$ выбрали 1006 шт. Докажите, что одно из выбранных чисел делится на другое.

Задача 2. Найдите все вещественные функции $f(P)$, определённые на плоскости, удовлетворяющие условию: если A, B, C — вершины равностороннего треугольника, то $f(A)+f(B)+f(C) = 0$.

Задача 3. Докажите, что тригонометрический многочлен

$$T(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx), \qquad a_k \in \mathbb{R},$$

имеет больше одного корня на $[0; 2\pi]$.

Задача 4. Решите уравнение $X^n = E$, где $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 5. Пусть $x > 0$ иррациональное число, $y = 1/x$. Докажите, что $\forall\ N \in \mathbb{N}$ между N и $N + 1$ есть в точности одно число из одной из последовательностей

$$(1 + x), 2(1 + x), 3(1 + x), \ldots; \quad (1 + y), 2(1 + y), 3(1 + y), \ldots$$

Задача 6. Плоская замкнутая кривая называется выпуклой, если она является границей выпуклой области. Докажите, что если любая проекция замкнутой пространственной кривой выпукла, то сама кривая плоская.

Задача 7. Пусть ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ с положительными членами сходится.
Докажите, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{u_i}{r_i}$ расходится ($r_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} u_k$).

Задача 8. Пусть $P(x)$ — многочлен степени выше 1, не имеющий кратных корней. Найдите сумму величин, обратных разностям между всевозможными корнями многочлена P и всевозможными корнями многочлена P'.

Ноябрь 2009

Задача 1. Решить систему: $\left\{\begin{array}{rcl} (\vec{x},\vec{c})\vec{b} & = & (\vec{x},\vec{b})\vec{c} \\ (\vec{b},\vec{c},\vec{x}) & = & 1 \\ \vec{b}\times\vec{c} & \neq & \vec{0} \end{array}\right.$

Задача 2. Вычислить определитель матрицы $n \times n$:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Задача 3. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — выпуклая область с гладкой границей, причём $|\vec{MN}| < 1$ для любых M, $N \in \Omega$. Докажите, что площадь Ω не превосходит $\pi/4$.

Задача 4. Функция $f \in C^2(\mathbb{R})$ ограничена. Докажите, что существует x_0 такое, что $f''(x_0) = 0$.

Задача 5. Одинаковые кирпичи длины L кладут друг на друга без раствора. Какой длины навес можно получить таким образом?

Задача 6. Известно, что $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Вычислить $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos\alpha x\ dx$.

Задача 7. В единичном квадрате отмечено n точек. Докажите, что для достаточно больших n существует ломаная, проходящая через эти точки, длина которой не превосходит $2{,}5\sqrt{n}$.

Задача 8. Найдите выпуклый многоугольник минимальной площади, который пересекается с обеими ветвями гиперболы $xy = 1$ и с обеими ветвями гиперболы $xy = -1$.

Задача 9. Функция двух переменных $F(x,y)$ удовлетворяет тождеству $F(x,y) + F(y,z) + F(z,x) = 0$. Докажите, что существует такая функция $g(x)$, что $F(x,y) \equiv g(x) - g(y)$.

Задача 10. Какое наибольшее число рациональных точек может располагаться на окружности на плоскости, центр которой не является рациональной точкой? (Точка на плоскости называется рациональной, если рациональными являются обе ее координаты).

Декабрь 2008

Задача 1. Взаимным к базису $\{e_1, e_2, e_3\}$ называется базис:

$$e_1^* = \frac{e_2 \times e_3}{(e_1, e_2, e_3)}, \qquad e_2^* = \frac{e_3 \times e_1}{(e_1, e_2, e_3)}, \qquad e_3^* = \frac{e_1 \times e_2}{(e_1, e_2, e_3)}.$$

Докажите, что $e_1^{**} = e_1$, $e_2^{**} = e_2$, $e_3^{**} = e_3$.

Задача 2. положительная последовательность $\{a_n\}$ возрастает и ограничена. Докажите, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right) < +\infty.$$

Задача 3. Докажите, что $\left|\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{(n)}\right| \le \dfrac{1}{n+1}$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$.

Задача 4. Функция f непрерывна на $[a;b]$, и для любых $x_1 < x_2 < x_3$ из $[a;b]$ выполняется неравенство

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \end{vmatrix} \ge 0. \tag{1}$$

Докажите, что $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \ge f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$.

Задача 5. Докажите, что из числовой последовательности, состоящей из 2008 различных вещественных чисел, можно извлечь возрастающую подпоследовательность, содержащую 10 чисел, или убывающую подпоследовательность, содержащую 224 числа, или обе такие подпоследовательности.

Задача 6. Найдите все пары положительных чисел (a, b), при которых сходится интеграл

$$\int_a^{+\infty} \left(\sqrt{\sqrt{x+a} - \sqrt{x}} - \sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{x-b}}\right) dx.$$

Задача 7. Пусть $f(x)$ — многочлен ненулевого порядка с коэффициентами — натуральными числами. Докажите, что $f(n)$ при натуральном n является делителем числа $f(f(n)+1)$ тогда и только тогда, когда $n = 1$.

Задача 8. На плоскости расположен правильный тетраэдр. Раз в минуту он переворачивается через одно из рёбер, причём перевороты через разные рёбра равновероятны. Найдите вероятность того, что через n минут тетраэдр будет лежать на той же грани, что и в начале.

Апрель 2007

Задача 1. Найдите все функции, дифференцируемые на всей числовой прямой, для которых справедливо равенство $f'(x+y) = f(x)f(y)$ при любых x, y.

Задача 2. Докажите неравенство: $\sin\sqrt{x} < \sqrt{\sin x}$ при любых $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Задача 3. Четыре корабля A, B, C и D с постоянными и различными скоростями движутся прямолинейно и с различными курсами. Пять пар A и B, B и C, C и D, C и A, B и D прошли вплотную друг от друга (если считать их материальными точками, то они попарно одновременно прошли через одну точку). Докажите, что A и D должны пройти вплотную друг от друга. Океан считать плоским. Три сразу не встречаются.

Задача 4. Найдите все непрерывно дифференцируемые функции $y = f(x), f(0) = 0$ такие, что объемы тел, полученных вращением вокруг OY криволинейных трапеций, ограниченных графиками функций $x = 0,\ y = f(t),\ y = f(x)$ и $y = 0,\ x = t,\ y = f(x)$ совпадают для любого $t > 0$.

Задача 5. Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+t)}{(1+t^2)}dt$.

Задача 6. На плоскости xOy лежит сфера $S : x^2 + y^2 + (z-R)^2 = R^2$. Через точку $B(x,y) \in R^2$ и точку $A(0,0,2R)$ проводят прямую L, которая пересекает S в точке B'(это стереографическая проекция сферы S на плоскость R^2). Докажите, что угол между пересекающимися прямыми L_1 и L_2 на плоскости равен углу между их образами L_1' и L_2' на сфере S.

Задача 7. Пусть X и Y — две случайные независимые величины, равномерно распределенные на $(-b, b)$. Найти вероятность того, что уравнение $t^2 + tX + Y = 0$ имеет действительные корни. Найти предел этой вероятности при $b \to \infty$.

Задача 8. Найдите, для каких положительных чисел a существует положительная непрерывная функция $f(x)$ такая, что периметр и площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$ и прямыми $x = a,\ x = 0,\ y = 0$ численно равны.