Задачи студенческих математических олимпиад в Якутске 1997—2015

1997

1. Найти наименьшее значение $|z-5|+|z-5i|$, где комплексные числа z удовлетворяют условию $z^2-\bar{z}^2=16i$.

2. Вычислить определитель порядка 1997, элементы которого заданы условиями $a_{ij}=\max\{i,j\}$.

3. Функция $y=f(x)$ определена при всех действительных значениях x, и при всех x выполнено равенство $2f(x)+f(1-x)=3x^2$. Найти $f(5)$.

4. Доказать, что касательная к гиперболе $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ вместе с асимптотами определяет треугольник постоянной площади.

5. Вычислить

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x-e^{-x}}{x}\,dx.$$

6. Доказать, что определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 1996 & 1997 \\ 2^2 & 3^2 & \dots & 1997^2 & 1998^2 \\ 3^3 & 4^3 & \dots & 1998^3 & 1998^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1997^{1997} & 1998^{1997} & \dots & 1998^{1997} & 1998^{1997} \end{pmatrix}$$

не равен 0.

1998

1. Не вычисляя сами определители n-го порядка, докажите равенство:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & n & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & n & \dots & 0 & 0 \\ 1 & n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = n^{n-2} \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

где $n \geqslant 2$.

2. Докажите, что если в тетраэдре два ребра соответственно перпендикулярны своим противоположным ребрам, то и ребра третьей пары противоположных — взаимно перпендикулярны.

3. Пусть отношение скорости автомобиля к пути равно $\ln 2$. На каком расстоянии от деревни находится автомобилист в 15 часов дня, если в полдень он находился на 10 км от деревни откуда он выехал?

4. Вычислите $\sqrt{A}$, где $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

5. Упростите выражение:

$$\left| \frac{xy + yz + zx}{x + y + z} \right|,$$

где x, y, z — комплексные числа и $|x| = |y| = |z| = r \neq 0$.

6. Вычислите интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 1998\varphi}{\sin \varphi}\, d\varphi.$$

7. Дан прямоугольник со сторонами 1 и 2. Не применяя аппарат математического анализа, покажите, что площадь эллипса наименьшей площади, описанного вокруг данного прямоугольника, равна π

1999

1. Доказать, что среди всех треугольников с заданным периметром наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.

2. Пусть S — сумма длин всех ребер произвольного тетраэдра, T — сумма их попарных произведений. Докажите неравенства

$$2{,}4T \leqslant S^2 < 3T.$$

3. Для любого натурального n доказать неравенство

$$\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-4}+\ldots+\sqrt{n^2-(n-1)^2} < 0{,}79\,n^2.$$

4. Используя комплексные числа и элементарный метод решения уравнения $x^5-1=0$, найдите точное значение $\cos 36^\circ$.

5. Пусть

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix},$$

где $\lambda \neq 0$. Найдите A^{-1}.

6. Докажите, что в любой арифметической прогрессии, члены которой натуральные числа, а разность $d \leqslant 1999$, простыми числами могут быть не более 10 последовательных членов. Постройте прогрессию, у которой первые 10 членов простые числа.

7. Для любого натурального n положим $f(n)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^n x\,dx.$

Показать, что при $n>2$ справедливо равенство $f(n)+f(n-2)=\dfrac{1}{n-1}$.

Вывести отсюда неравенства $\dfrac{1}{n+1}<2f(n)<\dfrac{1}{n-1}$.

8. Снегопад в городе начался еще до полудня и продолжался с одинаковой скоростью (по толщине) до вечера. Ровно в полдень бригада студентов вышла на дорогу и приступила к уборке снега. За первые 2 часа студенты продвинулись на 2 км, но за последующие 2 часа — только на 1 км. Студенты работали с одинаковой скоростью (по объему) и продвигались только вперед. В котором часу начался снегопад?

9. Найдите все дифференцируемые функции, удовлетворяющие ура нению $f'(x)+f(\pi-x)=1$.

10. Найдите интеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\cdot e^{-x}}{x}\,dx.$

2000

1. Пусть A и B – квадратные матрицы порядка n с действительными элементами и пусть

$$C = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$

квадратная матрица порядка $2n$. Докажите, что определитель матрицы C равен квадрату модуля определителя матрицы $A + iB$, где i — мнимая единица.

2. На плоскости лежат два касающихся друг друга шара радиуса 80 и 100. Пройдет ли в зазор между этими двумя шарами и плоскостью третий шар радиуса $\dfrac{200}{9}$?

3. В одной плоскости расположены две параболы с уравнениями $y = x^2$ и $y = x^2 + a^2$. Из произвольной точки A наружной параболы проведены два луча, пересекающие внутреннюю параболу. Пусть B и C ближайшие к A точки пересечения.

Докажите, что площадь треугольника ABC с "параболической" стороной BC не превосходит $\dfrac{2a^3}{3}$.

4. Найдите все натуральные n для которых число $\dfrac{1}{3}(n^3 + 5n + 6)$ — степень двойки.

5. Покажите существование 1000 натуральных чисел, меньших 2000 и таких, что ни одно из них не делится ни на какое другое из них.

6. Докажите интегральное неравенство:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi \sin 3\varphi}{\sqrt{1 + \sin^2\varphi}}\, d\varphi > 0.$$

7. Докажите, что в любом остроугольном треугольнике сумма радиусов вписанной и описанной окружностей не больше его наибольшей высоты.

2001

1. Пусть A – квадратная матрица порядка n, составленная из нулей и единиц таким образом, что в каждой строке и в каждом столбце содержатся ровно две единицы. Какое наименьшее и наибольшее значения может принимать определитель матрицы A?

2. В 2001 точке пространства стоят прожектора, каждый из которых освещает область, представляющую собой круговой параболоид с вершиной в этой точке. Можно ли направить прожектора так, чтобы они осветили все пространство?

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$$y = \arccos(x-1), \quad y = \arcsin(\frac{x+2}{3})$$

и осью ординат.

4. Дано множество, состоящее из 1025 натуральных чисел. Простые делители каждого числа из этого множества меньше 30. Докажите, что всегда найдется пара различных чисел из данного множества, произведение которых является квадратом некоторого целого числа.

5. Имеются гири массой 1 г, 2 г, ..., 2001 г. Докажите, что их можно разбить на 69 групп по 29 гирь так, чтобы все группы имели одинаковые массы.

6. Найдите решение функционального уравнения

$$\varphi(x+y) = \frac{\varphi(x) + \varphi(y) + \sqrt{2}\varphi(x)\varphi(y)}{1 - \varphi(x)\varphi(y)}$$

в классе функций с начальными условиями: $\varphi(0) = 0$ и $\varphi'(0) = \sqrt{2}$.

7. Дан треугольник ABC со сторонами 13, 20 и 21. Существует ли точка M плоскости этого треугольника, для которой треугольники MAB, MBC и MCA имели бы равные периметры?

2002

1. Палиндромом считается последовательность цифр или других символов, одинаково "читаемых" слева направо и справа налево. Нынешний год палиндромный: 2002. А 20 февраля этого года — "палиндром в квадрате". В какой ближайший день, месяц и год встретится аналогичное явление?

2. На стороне AC треугольника ABC существует точка K такая, что $AK = 2KC$ и $\angle ABK = 2\angle KBC$, F — середина стороны AC, L — проекция вершины A на BK. Докажите, что прямые FL и BC перпендикулярны.

3. Пусть $y = f(x)$ функция, у которой $y'' = 12k(x^2 - a^2)$, где $k > 0$ и $a > 0$. Тогда секущая, проведенная через точки перегиба, в графике данной функции, выделяет три "лунки". Докажите, что площадь одной "лунки" равна сумме площадей двух остальных "лунок".

4. Покажите, что число $\dfrac{1}{2002}$ можно представить в виде суммы конечного числа последовательных членов бесконечного ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}.$$

5. Даны два подмножества множества натуральных чисел:

$$F = \{f(n) = [n\alpha] : \ n \in \mathbb{N}\} \quad \text{и} \quad G = \{g(n) = [n\alpha^2] : \ n \in \mathbb{N}\},$$

где $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $[x]$ — целая часть числа x. Докажите, что $F \cap G = \varnothing$ и $F \cup G = \mathbb{N}$.

6. В правильном 9-угольнике проведены все диагонали. Каждая сторона и диагональ закрашены в один из трех цветов, причем один из цветов встречается ровно три раза. Докажите, что найдется треугольник, все стороны которого закрашены в один цвет.

7. Пусть a, b, c — длины боковых ребер тетраэдра, α, β, γ — углы между ними, $2p = \alpha + \beta + \gamma$. Докажите аналог формулы Герона

$$V = \frac{abc}{3}\sqrt{\sin p \cdot \sin(p-\alpha) \cdot \sin(p-\beta) \cdot \sin(p-\gamma)}.$$

2003

1. Можно ли все натуральные числа от 1 до 2003 разбить на две группы так, чтобы сумма чисел одной группы равнялась произведению чисел другой группы?

2. Для каждого простого p решите уравнение $x! = p \cdot (y!)^2$ в натуральных числах.

3. Положительные числа a, b и c удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} a^2 + \sqrt{3}ab + b^2 = 225; \\ b^2 + c^2 = 196; \\ c^2 + ca + a^2 = 169. \end{cases}$$

Вычислите значение выражения $ab + 2bc + \sqrt{3}ca$.

4. Докажите неравенство $A_n = \dfrac{1^3 + 3^3 + \ldots + (2n-1)^3}{1^3 + 2^3 + \ldots + n^3} < 8$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и найдите наименьшее натуральное n_0, при котором $A_{n_0} > 7{,}992$.

5. Равнобедренный треугольник описан около прямоугольника со сторонами 4 и 9 так, что основание треугольника лежит на стороне прямоугольника длины 9. При каком значении угла при основании треугольника его периметр будет наименьшим?

(из задач проф. И.Г. Егорова)

6. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и две концентрические сферы радиусов 1 и 5. Известно, что вершина A лежит на сфере радиуса 1, а вершины A_1, B и D, соседние с вершиной A, лежат на сфере радиуса 5. Покажите, что вершины B_1, C и D_1, соседние с вершиной C_1, лежат на третьей сфере, концентричной данным, и найдите радиус этой сферы.

7. Функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[0;1]$ и $f(x) \in [5\sqrt{2} - 7; 5\sqrt{2} + 7]$ для всех $x \in [0;1]$. Докажите неравенство

$$\int_0^1 \left(f(x) + \frac{1}{f(x)} \right) dx < \frac{99}{7}.$$

2004

1. Не применяя калькулятор и таблицы, сравните $\operatorname{tg} 2004^\circ$ и $\dfrac{4}{9}$.

2. Числа α и β удовлетворяют следующим равенствам:

$$9\alpha^3 + 18\alpha^2 + 17\alpha = -3 \text{ и } 9\beta^3 + 18\beta^2 + 17\beta = -9.$$

Найдите $\alpha + \beta$.

3. Пусть λ — комплексный корень многочлена

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

где $1 \geqslant a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant 0$, такой, что $|\lambda| \geqslant 1$. Докажите, что $|\lambda| = 1$.

4. На плоскости дана замкнутая ломаная с конечным числом звеньев. Прямая l пересекает ее в 2003 точках. Покажите, что существует прямая, пересекающая эту ломаную не менее, чем в 2004 точках.

5. Вершины A и B треугольника являются фокусами эллипса с уравнением $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, а вершина C находится на самом эллипсе. Докажите, что длина отрезка, отсекаемого боковыми сторонами треугольника ABC на касательной к вписанной окружности, проведенной параллельно основанию AB, не зависит от положения вершины C.

6. В куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1 вписан круговой конус так, что его вершина совпадает с вершиной A куба, а его основание касается граней C_1B_1BC, C_1CDD_1 и $C_1B_1A_1D_1$ в их центрах. Основание конуса спроектировано на грани $ABCD$, ABB_1A_1 и ADD_1A_1. Найдите сумму объемов трех конусов, основание которых — соответствующие проекции, а общая вершина расположена в плоскости основания вписанного конуса.

7. Пользуясь формулой Валлиса $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\,dx = \frac{(n!)^2 \cdot 2^{2n}}{(2n+1)!}$, вычислите сумму $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 \cdot 2^{n+1}}{(2n+1)!}$.

2005

1. Докажите, что произведение любых 2005 последовательных натуральных чисел делится на их сумму.

2. Даны комплексные числа

$$\left(\frac{2005-1945i}{1945-2005i}\right)^{60} \quad \text{и} \quad \cos 75^\circ - i\sin 75^\circ.$$

На числовой плоскости определите расстояние между ними.

3. Найдите многочлен $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, $c\neq 0$, с целочисленными коэффициентами и корнями, равными a, b и c.

4. Радиусы видимых кругов солнца и луны можно считать равными. В какой-то момент солнечного затмения площадь видимой части солнца стала в два раза меньше площади части, закрытой луной. Вычислите угол, под которым видна из центра каждого круга их общая хорда.

5. Сосуд, имеющий форму параболоида вращения:

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 2pz, \\ 0<z\leqslant a \end{cases}$$

наполнен водой. Туда опускают металлический шар радиуса $r<\sqrt{p(p+2a)}$ Необходимо определить радиус шара так, чтобы он вытеснил как можно больше воды.

6. Окружность, касающаяся описанной окружности треугольника ABC, касается с продолжений сторон AB и AC в точках M и N соответственно. Докажите, что точка пересечения биссектрисы угла A и отрезка MN является центром вневписанной окружности треугольника ABC.

7. Пусть $f(x)$ — действительная функция, интегрируемая на отрезке $[0;1]$. И пусть выполняются равенства:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 xf(x)\,dx = 1.$$

Докажите, что тогда выполняется неравенство: $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)dx \geqslant 4.$

2006

1. Покажите, что число 2006 можно представить в виде суммы кубов 10-ти различных целых чисел.

2. Некоторая окружность разделена на 30 равных частей. Каждая точка деления соединена хордой со всеми другими точками деления, расположенными от нее через 5 или 6 "шагов" по окружности. Существует ли внутренняя точка круга, через которую проходят более чем две такие хорды?

3. Дана квадратная матрица $A = \|a_{ij}\|_{n \times n}$, где $a_{ij} = |i - j|$ для всех целых i и j таких, что $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Найдите необходимое условие существования набора из n элементов данной матрицы, лежащих в разных строках и столбцах, среди которых встречаются все числа от 0 до $n - 1$.

4. Найдите все дифференцируемые функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие тождеству

$$f'\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}, \quad \text{для всех } x, y \in \mathbb{R} \text{ и } x \neq y.$$

5. Дан шарнирный пространственный четырехугольник $ABCD$, у которого $AB = CD = 3$, $AD = BC = 2\sqrt{6}$. Углы этого четырехугольника можно менять и получать различные тетраэдры. Не применяя аппарат математического анализа, определите геометрически в каком случае объем будет максимальным. Найдите этот объем.

6. Какое наибольшее количество сфер найдется для произвольного тетраэдра, каждая из которых касается плоскостей всех его 4-х граней?

7. Даны два интеграла

$$T_1 = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\pi)} \text{ и } T_2 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\pi)}.$$

Докажите, что $T_1 + T_2 = \dfrac{\pi}{4}$.

2007

1. Покажите, что найдутся натуральные числа $x_1 < x_2 < \ldots < x_{11}$, удовлетворяющие уравнению $x_1 + 2x_2 + \ldots + 11x_{11} = 2007$.

2. Известно, что значения многочлена $f(x) = x^2 + x + 41$ при $x = 0,\ 1, \ldots,\ 39$ являются простыми числами. Покажите, что такими же свойствами обладают значения многочлена $g(x) = x^2 - 79x + 1601$ при $x = 0,\ 1, \ldots,\ 79$.

3. Точки числовой плоскости, соответствующие комплексным числам $c_1,\ c_2, \ldots,\ c_n$, являются вершинами выпуклого n–угольника. Докажите, что если комплексное число z_0 является корнем уравнения

$$\frac{1}{z - c_1} + \frac{1}{z - c_2} + \ldots + \frac{1}{z - c_n} = 0,$$

то точка, соответствующая числу z_0, лежит внутри данного многоугольника.

4. Дана функция $y = f(x)$, определенная на $\mathbb{R}$ и удовлетворяющая соотношению $(1 - f(x)) \cdot f(1 + x) = 1 + f(x)$. Докажите, что $f(x)$ — периодическая функция.

5. Докажите, что для любого треугольника с углами α, β и γ выполняется неравенство

$$\cos\frac{\alpha - \beta}{2} + \cos\frac{\beta - \gamma}{2} + \cos\frac{\gamma - \alpha}{2} > 1.$$

6. В тетраэдре $ABCD$ ребра AB и CD равны. Прямая, проходящая через их середины, образует равные углы с прямыми, содержащими остальные четыре ребра тетраэдра. Можно ли утверждать, что тетраэдр $ABCD$ — правильный?

7. Вычислите: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (|\cos 1997x| + |\cos 2007x|)\, d\varphi$.

2008

1. Не применяя калькулятора и других вычислительных средств, докажите неравенство:

$$(\sqrt[3]{250} + \sqrt[3]{252})^3 < 2008.$$

2. Пусть z — комплексное число, у которого $|z| = 1$ и $z \neq -1$. Тогда найдется действительное число t такое, что

$$z = \frac{1+it}{1-it}.$$

Докажите.

3. Сколько решений имеет уравнение

$$(\sin x)^{\cos x} = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$$

в интервале $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$?

4. Докажите, что если любые две из заданных n бесконечных в обе стороны целочисленных арифметических прогрессий имеют общий член, то и все n прогрессий имеют общий член.

5. В треугольнике ABC отрезки AM — медиана, AL — биссектриса, K– такая точка медианы AM, что отрезок LK параллелен AC. Докажите, что CK и AL перпендикулярны.

6. Можно ли миллион эллиптических параболоидов расположить в пространстве так, чтобы любая точка пространства находилась во внутренней полости хотя бы одного параболоида?

7. Вычислите интеграл: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2008\varphi}{2\sin\varphi}\, d\varphi.$

2009

1. Сколько имеется натуральных чисел, меньших числа 2009 и взаимно простых с ним?

2. Найдите остаток от деления многочлена

$$x + x^9 + x^{25} + x^{49} + x^{81}$$

на многочлен $x^3 - x$.

3. Существует ли два треугольника, у которых косинусы углов одного треугольника соответственно равны синусам углов другого треугольника?

4. Решите уравнение:

$$y' + y'' + y''' + \ldots = x$$

если $y(0) = 0$.

5. Вычислите:

$$\int \frac{dx}{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}.$$

6. Пусть M и N — середины боковых сторон AB и CD соответственно, трапеции $ABCD$, а O — точка пересечения прямых AC и MN. Докажите, что если $AD = 2BC$, то прямые BN и OD — параллельны.

7. В правильную треугольную пирамиду вписаны четыре одинаковых шара так, что каждый из них касается трех других и трех граней пирамиды. Найдите радиусы этих шаров, если длины ребер пирамиды равны 1.

2010

1. Три натуральных взаимно простых в совокупности числа и больших 100 таковы, что квадрат разности любых двух из них делится на третье и любое из них меньше произведения остальных. Докажите, что эти числа — квадраты натуральных чисел.

2. Дан треугольник ABC. Последовательность C_n определена следующим образом: $C_1 = C$, C_{n+1} — центр вписанной окружности в треугольник ABC_n. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} C_n$.

3. Все грани тетраэдра $ABCD$ — остроугольные треугольники. В гранях ABC и ABD провели высоты AK и AL соответственно. Оказалось, что точки C, K, L и D лежат на одной окружности. Докажите, что $AB \perp CD$.

4. Найдите все комплексные корни многочлена

$$p(x) = \sum_{n=1}^{2010} (1005 - |1005 - n|)x^n.$$

5. Про положительные числа x, y и z известно, что $x + y^2 + z^3 = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{x}{2+xy} + \frac{y}{2+yz} + \frac{z}{2+zx} > \frac{1}{2}.$$

6. Функция $\varphi(x) \in C^1(0, +\infty)$, причем

$$\int\limits_0^1 \varphi(\alpha x)\, dx = 2\varphi(\alpha), \quad \varphi(1) = 81.$$

Найдите $\varphi(9)$.

7. Дан выпуклый многоугольник периметра $6\sqrt{3} + \pi$. Нашлась пара его точек, делящих периметр пополам, расстояние между которыми равно 6. Докажите, что найдется пара точек, делящих периметр пополам, расстояние между которыми не превосходит 3.

2011

1. Докажите, что

$$\sqrt{33-16\sqrt{3}\cos 10^\circ} = 1 + 8\cos 80^\circ.$$

2. В треугольнике ABC точка D лежит на AC, при этом $AB = 1$, $DC = 1$, $\angle ABD = 90^\circ$, $\angle DBC = 30^\circ$. Найдите длину AD.

3. Существует ли многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами, такой что

$$a)\ P\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2k+1}, \quad b)\ P\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{k+2}{k}$$

для всех положительных целых k?

4. Дана конечная система конечных множеств такая, что всякие 2 элемента принадлежат одновременно не более, чем двум множествам. Докажите, что если любые не более, чем 10 элементов покрываются объединением некоторых двух множеств, то все элементы покрываются объединением некоторых двух множеств.

5. Дана бесконечная строго возрастающая числовая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ с положительными членами такая, что среднее арифметическое любых четырех последовательных членов a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3} принадлежит этой же последовательности. Докажите, что последовательность a_{n+1}/a_n сходится и найдите этот предел.

6. Вычислите сумму

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{nm(n+m+1)}.$$

7. Докажите, что из четырех центров вневписанных сфер тетраэдра либо хотя бы один лежит вне описанной сферы и хотя бы один внутри, либо все 4 лежат на описанной сфере.

2012

1. Вася написал на доске в ряд в порядке неубывания все правильные дроби со знаменателями, не большими 2012. Могут ли две соседние дроби иметь одинаковые знаменатели?

2. Существует ли $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n$, где n — натуральное число?

3. Пусть α, β, γ корни многочлена $x^3+px+q=0$. Вычислите определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix}.$$

4. В тетраэдре $OABC$ все плоские углы при вершине O прямые, $OA=2$, $OB=3$, $OC=5$. Найдите сумму плоских углов при вершине C.

5. Пусть вокруг параболы описан треугольник ABC (т.е. парабола касается прямых AB, BC, CA). Докажите, что фокус этой параболы лежит на описанной окружности треугольника ABC.

В случае параболы $y^2 = 2px$, $p > 0$ фокус находится в точке $(p/2{,}0)$, уравнение директрисы $x = -p/2$, при этом по определению расстояния от точек параболы до фокуса и директрисы равны.

6. Пусть $f : [1{,}\infty) \to (0{,}\infty)$ — строго убывающая функция такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(2^{n+1})}{f(2^n)} < \frac{1}{2}. \quad \text{Докажите, что} \quad \int_1^\infty f(x)\,dx < \infty.$$

7. Про положительные числа a, b и c известно, что

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = 1.$$

Докажите неравенство

$$\frac{a}{\sqrt{bc}} \cdot \frac{1}{a+1} + \frac{b}{\sqrt{ca}} \cdot \frac{1}{b+1} + \frac{c}{\sqrt{ab}} \cdot \frac{1}{c+1} < \sqrt{2}.$$

2013

1. В компании из 2013 человек каждый имеет не меньше 75 знакомых. Докажите, что можно выбрать четырех человек и посадить их за круглый стол так, чтобы каждый сидел рядом со своими знакомыми.

2. Дан многочлен с целыми коэффициентами

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n.$$

Известно, что $P(0)$ и $P(2013)$ — нечетные числа. Есть ли у этого многочлена целочисленные корни?

3. Пусть $[x]$ — наибольшее целое число, не превышающее x и $\{x\} = x - [x]$. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \{(45 + \sqrt{2013})^n\}$.

4. Дана матрица A размером 3×2 и матрица B размером 2×3. Известно, что

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу BA.

5. Планета имеет форму тела, полученного вращением квадрата со стороной вокруг одной из диагоналей. Путешествие по планете считается кругосветным, если его маршрут — замкнутая кривая, симметричная относительно ее центра. Найдите длину кратчайшего маршрута кругосветного путешествия.

6. Найдите все функции $f(x)$ определенные на $(0, +\infty)$ такие, что $f(x)$ дважды дифференцируема, $f'(x) > 0$ и $f(f'(x)) = -f(x)$.

7. Пусть x, y, z — действительные числа такие, что $x + y + z = 0$. Найдите максимальное значение выражения

$$f(x,y,z) = \frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} + \frac{xy}{z^2}.$$

2014

1. Существуют ли функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что $f(g(x)) = x^{2014}$ и $g(f(x)) = x^{2015}$ для всех $x \in \mathbb{R}$?

2. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ углы $\angle BDD_1$ и $\angle CA_1A$ — прямые. Докажите, что $AB = CD_1$.

3. Найдите предел
$$\lim_{t\to 2} \int\limits_0^t \frac{x^2}{\prod\limits_{j=1}^{2014}(x^2-j^2)}\,dx \Bigg/ \int\limits_0^t \frac{x^2}{\prod\limits_{j=1}^{2015}(x^2-j^2)}\,dx$$

4. Известно, что $|ax^3+bx^2+cx+d| \leqslant 1$ для всех $x \in [-1;1]$. Найдите наименьшее число C такое, что $|a|+|b|+|c|+|d| \leqslant C$.

5. Для последовательности чисел Фибоначчи $\{F_n\} = \{1,1,2,3,5,\ldots\}$ найдите все вещественные числа a и b такие, что для каждого натурального n число $aF_n + bF_{n+1}$ встречается в ряде Фибоначчи.

6. Даны вещественные матрицы 8×8: $A = \{a_{ij}\}$ и $B = \{b_{ij}\}$ такие, что $a_{ij} = b_{ij}+1$ для всех $i,j = 1,\ldots 8$. Известно, что $A^3 = 0$. Докажите, что определитель матрицы $\det B = 0$.

7. Пусть a, b, c положительные числа такие, что $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{y-a}+\sqrt{z-a} = 1, \\ \sqrt{z-b}+\sqrt{x-b} = 1, \\ \sqrt{x-c}+\sqrt{y-c} = 1, \end{cases}$$

имеет единственное вещественное решение.

2015

1. Рассматривается бесконечная шахматная доска. Можно ли вставить положительные рациональные числа в каждую клетку шахматной доски так, чтобы каждое положительное рациональное число появлялось только один раз и при этом сумма каждой строки и каждого столбца была бы конечной?

2. В пространстве три отрезка A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, не лежащие в одной плоскости, пересекаются в одной точке P. Пусть O_{ijk} — центр сферы, проходящей через точки A_i, B_j, C_k и P (здесь $i, j, k \in \{1,2\}$). Докажите, что пересекаются в одной точке

прямые $O_{111}O_{222}$, $O_{112}O_{221}$, $O_{121}O_{212}$, $O_{211}O_{122}$

3. Найдите предел $$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{\ldots+(n-1)\sqrt{1+n}}}}.$$

4. Пусть A и B матрицы размером 3×3 с вещественными элементами. Докажите, что

$$A-(A^{-1}+(B^{-1}-A)^{-1})^{-1}=ABA,$$

где все обратные марицы, появляющиеся в левой части равенства существуют.

5. Пусть $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ дифференцируемая на $\mathbb{R}$ функция. Докажите, что существует $x\in[0,1]$ такое, что

$$\frac{4}{\pi}(f(1)-f(0))=(1+x^2)f'(x).$$

6. Докажите равенство

$$\sum_{\substack{k_1,k_2,\ldots,k_n\ge 0\\ 1\cdot k_1+2\cdot k_2+\ldots+n\cdot k_n=n}} \frac{(k_1+k_2+\ldots+k_n)!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_n!}\,x^{k_1+k_2+\ldots+k_n}=x(x+1)^{n-1}$$

7. Пусть E — множество всех непрерывно дифференцируемых функций $f(x)$, определенных на $[0,1]$ таких, что $f(0)=0$ и $f(1)=1$. Определим функционал

$$J(f)=\int_0^1(1+x^2)(f'(x))^2\,dx.$$

a) Покажите, что J достигает минимума на некотором элементе из множества E.

b) Вычислите $\min\limits_{f\in E} J(f)$.