ЗАДАЧИ СТУДЕНЧЕСКИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД ЯРОСЛАВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА (ЯГТУ) 2001—2011 г.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА, 2001 г.

Основной конкурс

1. Пусть A квадратная матрица n-го порядка, такая, что $AB = BA$ для любой квадратной матрицы B n-го порядка. Доказать, что $A = \lambda E$, где $\lambda \in \mathbf{R}$, а E – единичная матрица.

2. Доказать, что $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_2 & a_1 & -a_4 & a_3 \\ -a_3 & a_4 & a_1 & -a_2 \\ -a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)^2$.

3. Написать уравнение множества точек, одинаково удаленных от двух прямых: $l_1 : y = 0,\ z = 0$ и $l_2 : y = x,\ z = 1$.

4. Последовательность (x_n) задана формулами: $x_0 = 1,\ x_n = \sqrt[3]{1 + 3x_{n-1}} - 1$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ существует и найти его.

5. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1+n^2)(2+n^2)\ldots(n+n^2)}{n^{2n}}$.

6. Доказать, что $\dfrac{1}{3}\operatorname{tg} x + \dfrac{2}{3}\sin x > x$ при $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

7. Пусть $f(x) = e^x \ln(1 - x)$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(0) = -\infty$.

8. Последовательность (a_n) задана формулами: $a_0 = 1,\ a_n = \int\limits_0^1 \sin(a_{n-1}x^2)\,dx$.
Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ существует и найти его.

9. Какой знак имеет число $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{e^x - 1}{\sqrt{\cos x}}\,dx$?

10. Пусть $f(x)$, $x \in [0,\infty)$ – непрерывная неотрицательная выпуклая вверх функция, $\forall x \in [0,\infty)$ $2\int_0^x f(t)dt \le x^2$. Доказать, что $\forall x \in [0,\infty)$ $f(x) \le x$.

11. Пусть $y(x)$ – решение дифференциального уравнения $y' = x - \sin(x+y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=1$. Доказать, что при $x \ge 0$ $y(x) \ge \frac{1}{2}$.

12. 1) Найти решение $y(x)$, $x \in \mathbf{R}$, дифференциального уравнения $y'(x) = y\left(\frac{x}{2}\right)$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = y_0$.

2) Доказать, что это уравнение не имеет ограниченных на всей числовой прямой решений, отличных от $y = 0$.

13. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{10^n}$ с точностью до 0,005.

14. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами сходится. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\frac{n}{n+1}}$ также сходится.

15. Найти наибольшую площадь треугольника, вписанного в круг радиуса R.

16. На клавиатуре калькулятора цифровые клавиши расположены так:

7	8	9
4	5	6
1	2	3

Доказать, что четырехзначное число, набираемое по ходу часовой стрелки или против неё из цифр, стоящих в углах любого прямоугольника, образованного цифровыми клавишами (например, 7777, 7887, 7964) делится на 11.

17. Инвестор может вложить в производство за 4 года до 8 миллионов рублей. Будем считать, что зависимость прироста продукции $x(t)$ за время t от начала инвестиций зависит от объема инвестиций $u(t)$ за то же время следующим образом:

$$\ddot{x}(t) = k\dot{u}(t) \qquad (k > 0) \qquad x(0) = \dot{x}(0) = 0 .$$

Какую стратегию вложений (то есть функцию $u(t)$) следует выбрать инвестору, чтобы прирост продукции за четыре года $x(4)$ был наибольшим, если скорость вложений ограничена (возможностями инвестора):

$$\dot{u}(t) \le 4 \cdot 10^6 \text{ (руб./год)?}$$

Блицконкурс

1. Доказать, $\sqrt{7}$ – иррациональное число.

2. Для посадки 10 деревьев подготовлены ямки в 2 ряда на равном расстоянии между соседними ямками (рис. 8). Как изменив положение 4-х ямок получить 5 прямых по 4 дерева на каждой?

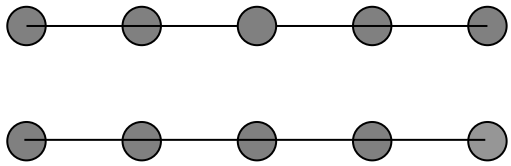

Рис. 8

3. Жители города А – правдолюбцы, города Б – лжецы. По дороге из А в Б жители обоих городов поставили указатели, на которых по направлению своего города написали «Путь в город А». Какой единственный вопрос надо задать случайному прохожему (жителю одного из этих городов), чтобы, получив ответ «да» или «нет», узнать направление в город А?

4. На студенческом вечере ни один юноша не танцевал со всеми девушками, и при этом каждая девушка танцевала хотя бы с одним юношей. Доказать, что найдутся две пары танцевавших Ю$_1$Д$_1$ и Ю$_2$Д$_2$ такие, что Ю$_1$ не тацевал с Д$_2$, а Ю$_2$ не танцевал с Д$_1$.

5. Пусть $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ – симметрические квадратные матрицы 2001 порядка: $a_{ji}=a_{ij}$, $b_{ji}=b_{ij}$ при $i,j=1,2,...,2001$. Доказать, что определитель матрицы $AB-BA$ равен нулю.

6. Пусть $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Доказать, что существует такой вектор – столбец V, что $\lim\limits_{n\to\infty} A^n V = 0$.

7. Построить график функции $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(xe^{-n[x]} + \dfrac{2x^2}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{n}{x-1} \right)$,

где $[x]$ – целая часть числа x.

8. Найти и изобразить область определения функции $z=\sqrt{\sin x \cos y}$.

9. Найти все функции $y(x)$, $x\in\mathbf{R}$, такие, что $y(0)=1$ и $\forall x\in\mathbf{R}$ $y'(x)=xy(1)$.

10. Доказать, что $f(x)=x\int\limits_0^{x^2}\sqrt{1+t^4}\,dt$ – возрастающая функция на $\mathbf{R}$.

11. Доказать, что если $f(x)$, $x\in[a,\infty)$ – положительная убывающая функция и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

12. Найти все возрастающие на $\mathbf{R}$ решения дифференциального уравнения $y''-y'-2y=0$.

13. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n^2+2}{n^2+1}\right)^{n^2}$.

МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА, 2002 г.

Личный конкурс

1. Вычислить определитель $\Delta(x)=\begin{vmatrix} 2 & x & x & 0\\ x & 0 & 1 & x\\ x & 0 & 0 & x\\ 3 & x & x & 2\end{vmatrix}$.

2. Числа 1081, 1403, 2093 и 1541 делятся на 23. Не вычисляя определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 & 1\\ 1 & 4 & 0 & 3\\ 2 & 0 & 9 & 3\\ 1 & 5 & 4 & 1\end{vmatrix}$, доказать, что он делится на 23.

3. Найти все функции f, удовлетворяющие уравнению

$$x(1-f(x))-f(1-x)=0 \text{ при всех } x\in\mathbf{R}.$$

4. Дано множество из n натуральных чисел, каждое из которых не превосходит m и множество из m натуральных чисел, каждое из которых не превосходит n. Доказать, что в этих множествах есть подмножества с равными суммами.

5. Пусть четыре точки *A, B, C, D* плоскости таковы, что любые две окружности, проходящие через точки *A* и *B*, *C* и *D* пересекаются или совпадают. Доказать, что все четыре точки лежат на одной прямой или на одной окружности.

6. Найти знак числа $\int_0^{\pi} \sin x^2 dx$.

7. Найти число $f'(1)$, если $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{n-1}(2n-1)!}$.

8. Найти решение $y(x)$, $x \in [0, +\infty)$, уравнения $y'(x) = \int_0^t |y(t)|\, dt$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = -1$.

Командный конкурс

1. Вычислить определитель матрицы *n*-го порядка A_n с элементами $a_{ii} = 2$, $a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = 1$, $a_{ij} = 0$ при $j \geq i+2$ и $i \geq j+2$.

2. Пусть M' – точка, симметричная точке *M* относительно плоскости $P: x + 2y - 2z - 1 = 0$. Выразить координаты (x', y', z') точки M' через координаты (x, y, z) точки *M*.

3. Доказать, что из $(mn+1)$ различных натуральных чисел можно выделить последовательность из $(m+1)$ чисел, каждое из которых является делителем следующего, либо $(n+1)$ чисел, не делящихся друг на друга.

4. Доказать, что последовательность (x_n), заданная формулами $x_0 = x_1 = -1$, $x_n = \frac{5x_{n-1} - x_{n-2}}{6}$ $(n \geq 2)$, имеет предел и найти его.

5. Доказать, что если кривая $y = \frac{ax^2 + bx + c}{2ax + b}$ пересекает ось *OX*, то пересекает ее под углом 45°.

6. Пусть $f(x) = \begin{cases} 2|\operatorname{arctg}(1/x^3)| - \pi, & \text{при } x \neq 0, \\ 0, & \text{при } x = 0. \end{cases}$

Существует ли $f'(0)$?

7. Пусть $f(x)$ – заданная дифференцируемая функция на $[0,1]$. Доказать, что уравнение $(x-x^2)f'(x)=(2x-1)f(x)$ имеет хотя бы один корень.

8. Доказать, что для любого $x\in\mathbf{R}$ $x^6+x^5-x^4-x^3+x^2-5x+6>0$.

9. При каких значениях параметра a производная функции $z=x^2+y^2$ в точке $M(1,1)$ по направлению вектора $\vec{l}=(1,a^2-2a+3)$ принимает наибольшее значение?

10. Найти среднее значение функции $f(x)=\int\limits_x^1 e^{-t^2}dt$ на отрезке [0,1].

11. Доказать, что $\int\limits_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau=\int\limits_0^t g(t-\tau)f(\tau)d\tau$.

12. Сходится ли несобственный интеграл $\int\limits_\pi^\infty \frac{\cos x}{x}dx$?

13. Найти все решения $y(x)$ уравнения $y'(x)=y(x)+\int\limits_0^1 y(x)dx$.

14. Доказать, что для любого решения $y(x)$ дифференциального уравнения $4y'''+30y''+72y'+55y=0$ найдется такое число $C>0$, что $\forall x\in[0,+\infty)$ $|y(x)|\le Ce^{-x}$.

15. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{1+(n-1)n}$.

МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА, 2004 г.

Личный конкурс

1. При каких значениях x ранг матрицы $A(x)=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & x+2 \\ 3 & 1 & 2 & 2x+1 \\ x+3 & 1 & 3x-1 & 3x \end{pmatrix}$ наименьший?

2. Три молодые супружеские пары собрались в день рождения Юлии на дружеский ужин. Завязалась беседа, в ходе которой были высказаны следующие утверждения:

1) Александр: Каждый муж на 5 лет старше своей жены.
2) Игорь: Нам с Юлией вместе 52 года.
3) Сергей: Всем шестерым вместе 151 год.
4) Юлия: Нам с Сергеем вместе 48 лет.
5) Елена: Не буду скрывать, что я старшая из жен.

Ирина не участвовала в разговоре, так как исполняла обязанности хозяйки. Найти возраст всех присутствующих и выяснить, кто на ком женат.

3. Пусть $P(x)$ – многочлен степени ≥ 2. При делении $P(x)$ на $x-2$ получается остаток 3, а при делении на $x+3$ – остаток 8. Какой остаток получится при делении на x^2+x-6?

4. Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1\cdot 3 ... (2n-1)}{2\cdot 4 ... (2n)}$?

5. Элементы матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ n+1 & n+2 & ... & 2n \\ ... & ... & ... & ... \\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & ... & n^2 \end{pmatrix}$ четного порядка n разделены на «белые» и «черные» так, что в каждой строке и в каждом столбце «белых» и «черных» элементов поровну. Доказать, что сумма всех «белых» элементов равна сумме всех «черных» элементов.

6. Последовательность (x_n), заданная формулами $x_1 = x_2 = \frac{1}{4}$, $x_n = \frac{1}{4}x_{n-1} + x_{n-2}^2$ $(n \geq 3)$. Доказать, что она имеет предел, и найти этот предел.

7. Построить график функции $g(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)f(x+2t)dx$, где $f(s)=1$ при $s \in [0,1]$, $f(s)=0$ при $s \notin [0,1]$.

8. Найти все непрерывные функции $f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, удовлетворяющие условиям $\forall x \in \mathbf{R}$ $f(x) = f(0) + \int\limits_0^1 f(x-t)dt$, $f(x+1) = f(x)+1$.

Командный конкурс

1. По концентрическим окружностям с одной и той же угловой скоростью, но в противоположных направлениях вращаются точки M_1 и M_2. Определить какую кривую описывает середина отрезка M_1M_2.

2. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы из $\mathbf{R}^3$, для которых $\vec{a}\vec{b} \neq 0$. Решить уравнение $\vec{a} \times (\vec{x} \times \vec{b}) = \vec{a}(\vec{x}\vec{b})$.

3. Найти $\lim\limits_{x \to +\infty} [x]^{\frac{x}{[x]^2}}$, где $[x]$ – целая часть числа x.

4. Сколько положительных корней имеет уравнение $x^{x+1} = (x+1)^x$?

5. Найти решение $y = y(x)$, $x \in [0, +\infty)$, дифференциального уравнения

$$y' = \max\left\{x, \frac{y}{x+1}\right\}, \qquad (*)$$

удовлетворяющее начальному условию $y(0)=1$.

6. Определить наибольшее из чисел r таких, что в равностороннем треугольнике со стороной a найдется пять точек, расстояние между любыми двумя из которых не меньше r.

7. Найти расстояние от начала координат до кривой

$$4x^6+24x^4y^2+16x^3y^3+24x^2y^4+4y^6-9=0.$$

8. Линия уровня $\Gamma=\{(x,y):Q(x,y)=1\}$ квадратичной формы $Q(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$ является эллипсом. Найти $\max\limits_{M\in\Gamma}\left|\dfrac{\partial Q}{\partial\vec n}(M)\right|$, где $\vec n=\vec n(M)$ – нормаль к Γ в точке *M*.

9. Пусть $f(x)=\int\limits_0^x\sqrt{x^2+t^2}\sin t\,dt$. Доказать, что $f(x)\sim ax^3$ $(x\to+0)$ при некотором $a>0$.

МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА, 2006 г.

Личный конкурс

1. Матрица X является решением матричного уравнения $AX^2+BX=0$, где $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\1&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&3&1\\1&2&-1\\1&1&2\end{pmatrix}$. Доказать, что $\det X=0$.

2. Найти длину вектора $\vec p=(\vec a\times\vec b)+\vec c$, если $|\vec a|=|\vec b|=|\vec c|=1$, $(\vec a,\vec b)=\dfrac{\pi}{2}$, $(\vec a,\vec c)=(\vec b,\vec c)=\dfrac{\pi}{3}$, $(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c<0$.

3. Два игрока по очереди присваивают коэффициентам уравнения $a_{2n+1}x^{2n+1}+a_{2n}x^{2n}+\ldots+a_0=0$ какие-нибудь действительные значения, при этом уже присвоенные значения менять нельзя. Может ли второй игрок добиться того, чтобы у полученного в результате игры многочлена был выбранный им заранее действительный корень $x_0\neq0$?

4. Доказать, что множество точек в $\mathbf{R}^3$, задаваемое уравнением

$$3x^2+4y^2+5z^2+xy-2yz-xz-1=0,$$

находится в шаре радиуса 1 с центром в начале координат.

5. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{tg}(k-1)\operatorname{tg}k}{\operatorname{tg}^2 n+n^{\alpha}}$, где $\alpha>1$.

6. Пусть $f(x),\ x\in[-1;1]$ – дважды дифференцируемая функция, $f(-1)=f(0)=f(1)=0$. Доказать, что существует такое число $x_0\in(-1,1)$, что $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$ образуют арифметическую прогрессию.

7. Пусть $f(x)$ – дважды дифференцируемая на $(0,\infty)$ функция, $a\in\mathbf{R}$, $a\neq 0$. Доказать, что если $g(x)=xf(x^a)$ выпукла (вниз) на $(0,\infty)$, то и $h(x)=f\left(\dfrac{1}{x^a}\right)$ выпукла (вниз) на $(0,\infty)$.

8. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 f(x)dx$, где $f(x)=\min\limits_{y\in[0,1]}\max\{4x-y;y\}$.

Командный конкурс

1. Доказать, что уравнение $X^2+2X-3E=0$ имеет на множестве квадратных матриц 2006-го порядка, по крайней мере, 2^{2006} решений.

2. 1) Доказать, что функция $f(x),\ x\in\mathbf{R}$, удовлетворяющая условиям $(\forall x\in\mathbf{R})\ f(x)\neq 0,\quad (\exists a>0)(\forall x\in\mathbf{R})\ f(x)=f(x-a)f(x+a)$ является периодической.
2) Привести пример такой функции, отличной от постоянной.

3. Доказать, что для любых действительных чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n$ справедливо неравенство $\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{m=1}^{n}\dfrac{a_k a_m}{k+m}\geq 0$.

4. Значение многочлена с целыми коэффициентами в четырех целых точках равно 3. Доказать, что многочлен не имеет целых нулей.

5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\operatorname{tg}x)^{\sin x}-(\sin x)^{\operatorname{tg}x}}{x^{\pi-1}}$.

6. Сколько решений имеет уравнение $(x-1)e^x-10x+11=0$?

7. Вычислить $\int\limits_0^2 \frac{\cos \pi x\, dx}{e^x + e}$.

8. Найти все ограниченные на промежутке $(0,\infty)$ решения $y(x)$ дифференциального уравнения $x^2 y'' - 2xy' + (2 - x^2)y = 0$.

9. Доказать, что решение $y = y(x)$, $x \in \mathbf{R}$ дифференциального уравнения $y'' + x^2 y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, обращается в нуль хотя бы в одной точке.

10. Исследовать на сходимость ряд

$$\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} + \ldots + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}} + \ldots$$

МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА, 2008 г.

1. В некоторой фирме 2008 сотрудников, любые два из которых либо друзья, либо враги. Может ли быть так, что у любой пары друзей есть общий враг, а у любой пары врагов есть общий друг?

(6 баллов)

2. Пусть $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ – любой набор натуральных чисел. Для любого натурального числа k обозначим b_k – количество чисел $a_i \ge k$. Доказать, что $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$. (7 баллов)

3. Найти все функции $f(t)$, $t \in \mathbf{R}$, такие, что при всех $x \in \mathbf{R}$ $f(\sin x + \cos x) + 2f(\sin x - \cos x) = \cos^2 2x$. (6 баллов)

4. Найти $\max\limits_{|\vec{x}|=1} |\vec{x} \times \vec{a} + \vec{x}|$, где $\vec{a}$ – заданный вектор. (2 балла)

5. Рассматривается уравнение $X^2 - 2X - 3E = 0$ на множестве квадратных матриц 2008-го порядка. 1) Найти хотя бы одно решение уравнения, не являющееся диагональной матрицей. 2) Доказать, что таких решений бесконечное множество. (10 баллов)

6. На плоскости заданы эллипс и две точки N_1 и N_2. Доказать, что на эллипсе найдутся точки M_1 и M_2, симметричные относительно центра эллипса, для которых $|M_1N_1|^2+|M_1N_2|^2=|M_2N_1|^2+|M_2N_2|^2$.

(8 баллов)

7. Доказать, что функция $f(x,y)=\dfrac{\cos x-\cos y}{x-y}$ на множестве $\{(x,y): x-y\geq \pi/3\}$ имеет наименьшее значение, и найти это значение.

(6 баллов)

8. Найти все многочлены $P(x)$ такие, что

$$\forall x\in\mathbf{R}\quad xP(x+1)=(x+2008)P(x). \qquad \text{(3 балла)}$$

9. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\int\limits_0^1 \operatorname{sgn}\sin(tx)\,dt$. Здесь $\operatorname{sgn} z=1$ при $z>0$, $\operatorname{sgn} z=-1$ при $z<0$ и $\operatorname{sgn} z=0$ при $z=0$.

(4 балла)

10. Функция $y(x)$, $x\in[0,\infty)$, удовлетворяет уравнению $y''(x)-xy(x)=x^4+1$ и начальным условиям $y(0)=1$, $y'(0)=-1$. Доказать, что **(1)** $\forall x\in[0,\infty)$ $y(x)>0$, **(2)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y(x)}{x^n}=\infty$ для любого натурального числа n.

(12 баллов)

11. Найти все функции $u=u(x,y)$, удовлетворяющие условиям: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$, $u(x,0)=x^2$, $u(0,y)=-y$.

(5 баллов)

12. Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, где $a_1=100$ и $\forall n\in$ Ґ $a_{n+1}=\int\limits_0^1\dfrac{a_n^2\,dx}{\sqrt{x^4+2a_n^2}}$?

(3 балла)

МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА, 2010 г.

1.1. Пусть $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ – квадратные матрицы n-го порядка, $b_{ij}=(-1)^{i+j}a_{ij}$ ($i,j=1,2,...,n$). Как связаны определители этих матриц?
(2 балла)

1.2. Решить матричное уравнение $AX+XA+X=A$, где A – заданная квадратная матрица, квадрат которой $A^2=E$ – единичная матрица.
(6 баллов)

1.3. Пусть $X^{\vee}$ – матрица, полученная из квадратной матрицы X заменой каждого ее элемента на его алгебраическое дополнение. Доказать, что для любой квадратной матрицы A порядка $n>2$ $(A^{\vee})^{\vee}=(\det A)^{n-2}A$.
(10 баллов)

2.1. Найти наибольшее из расстояний от точки $C(3,2,3)$ до плоскостей, проходящих через точки $A(1,1,1)$ и $B(2,2,2)$. (3 балла)

2.2. Пусть $\vec{a}$ – заданный ненулевой вектор. Найти все такие векторы $\vec{x}$, что $(\vec{a}\cdot\vec{x})\vec{x}+(\vec{a}\times\vec{x})\times\vec{x}=\vec{a}$. (7 баллов)

2.3. В $\triangle ABC$ известны длины сторон: $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$. Пусть O – центр вписанной окружности. Векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ лежат в одной плоскости и потому линейно зависимы. Найти эту зависимость.
(8 баллов)

3.1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x)^{\frac{1}{x}}-1}{x}$. (2 балла)

3.2. При каких $x>0$ существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)...(1+x^n)$?
(7 баллов)

3.3. Доказать, что последовательность (x_n), заданная формулами $x_1=0$, $x_n=2^{x_{n-1}-2}+2^{-1}$, сходится и найти ее предел. (9 баллов)

4.1. Дифференцируема ли в точке $x=0$ функция $f(x)=\sqrt{\sin x^2}$?
(2 балла)

4.2. К параболе $y=x^2$ проведены две взаимно перпендикулярные касательные. Чему равно наименьшее из расстояний между точками касания? (6 баллов)

4.3. Доказать, что найдется такое число a, что уравнение $ax^4+x^3+(a^2-4)x^2+5x-2-3a^2=0$ имеет четыре различных действительных корня. (10 баллов)

5.1. Вычислить $\int \ln(5+x+2\sqrt{x})\,dx$. (2 балла)

5.2. Пусть $f(x)$ – произвольная непрерывная функция на $\mathbf{R}$. Доказать, что уравнение $f(x)=2xf(x^2)$ имеет хотя бы одно решение. (8 баллов)

5.3. При каких значениях $a>0,\ b>0$ сходится несобственный интеграл

$$\int_a^{+\infty} \ln\frac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+b^2}-x}\,dx\,?$$ (8 баллов)

6.1. Найти решение задачи Коши $\dfrac{dx}{dt}=2t(t^2-x),\quad x(0)=-1.$ (2 балла)

6.2. Найти все функции $f(x),\ x\in\mathbf{R}$, такие, что для любого $x\in\mathbf{R}$

$$f''(x)=f(x)\int_0^{+\infty} f(x)dx.$$ (6 баллов)

6.3. Функция $y(x),\ x\in[0,\infty)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'=e^{-xy}$. Доказать, что существует $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)\in(0,\infty)$. (10 баллов)

7.1. При каких значениях $x\in\mathbf{R}$ сходится ряд $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{nx^2+1}{(2n^2-n-1)\ln(x^2+n)}$?
(3 балла)

7.2. Ряд с положительными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{a_n^{a_n}}\ ?$$ (5 баллов)

7.3. Пусть для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ имеют место равенства $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} n^3(u_{n+1}-u_n)=0$. Доказать, что ряд сходится. (10 баллов)