**Задачи студенческих математических олимпиад**
**Ярославского государственного технического университета (ЯГТУ)**
**с 2012 года**
(*в обратном хронологическом порядке*)

# 4 октября 2016 (*международная*)

**Задача 1.** Пусть матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $E$ — единичная матрица 4 порядка. При каких $x \in \mathbb{R}$ матрица $A + xE$ обратима?

**Задача 2.** Найти расстояние между прямой $\begin{cases} x + y + z = 8 \\ 2x + y + 2z = 4 \end{cases}$ и поверхностью $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 1 = 0$.

**Задача 3.** Область $G$ задана в декартовых координатах: $x^2 + y^2 - z^2 + 3x - 1 < 0$. Можно ли, двигаясь по прямой, попасть из начала координат $O \in G$ в точку $M(2, 2, 4) \in G$, не выходя из $G$?

**Задача 4.** Найти $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{\sqrt{a \sin bx} - \sqrt{b \sin ax}}{\sqrt{a \sin bx - b \sin ax}}$, где $a > b > 0$.

**Задача 5.** Доказать, что функция $f(x, y, z) = \dfrac{x}{y+z} + \dfrac{y}{x+z} + \dfrac{z}{x+y}$ достигает наименьшее значение на области $D = \{x, y, z > 0\}$, и найти его.

**Задача 6.** Вычислить $\int\limits_0^\infty \dfrac{x^2 - 4}{x^4 + 16} dx$.

**Задача 7.** Пусть $f$ — непрерывная положительная возрастающая функция на $[a, b]$. Доказать, что $\forall\ c \in (a, b)$

$$\frac{1}{c-a} \int\limits_a^c f(x)dx < \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)dx,$$

т. е. среднее значение $f$ на $[a, c]$ меньше, чем на $[a, b]$.

**Задача 8.** Пусть $y(x)$ — решение дифференциального уравнения $xy' + (2x^2 - 1)y = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_o) = y_o$ $(x_o, y_o > 0)$. Доказать, что достигается $\max\limits_{x>0} y(x)$ и найти его.

**Задача 9.** Чему равно наибольшее число линейно независимых решений $y(x)$, стремящихся к 0 при $x \to +\infty$, у линейного однородного дифференциального уравнения $y^{(n)} + y^{(n-1)} + \ldots + y' + y = 0$ ?

**Задача 10.** Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, где $u_1 = 1/2$ и $\forall n \in \mathbb{N}$ $\ u_{n+1} = u_n - u_n^2$ ?

# 5 декабря 2015 (*межрегиональная*)

**Задача 1.** На плоскости выбраны 4 точки, никакие 3 не лежат на одной прямой. Доказать, что какие-то 3 точки образуют неостроугольный треугольник.

**Задача 2.** Найти все матрицы $B$, перестановочные с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**Задача 3.** По прямому каналу шириной 5 м плывёт плот 6 м $\times$4 м. Канал поворачивает под прямым углом. Пройдёт ли там плот?

**Задача 4.** Ограничено ли множество на плоскости $Oxy$, заданное неравенством $x^4 + y^4 - 5x^3 - 4x^2y + 7xy^2 + x^2 + y^2 \leqslant 0$ ?

**Задача 5.** При каждом $x \in \mathbb{R}$ сравнить значения функций

$$f(x) = \frac{x+3}{x^4+5x^2+4} \quad \text{и} \quad g(x) = \frac{x+2}{x^4+4x^2+3}.$$

**Задача 6.** Последовательность задана равенствами $x_1 = -1{,}5$, $x_{n+1} = \dfrac{2x_n+2}{x_n+3}$, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что последовательность сходится; найти её предел.

**Задача 7.** Сколько решений имеет уравнение $x^2 = 2^x$ ?

**Задача 8.** Найти $\lim\limits_{a\to+\infty} \int\limits_{-a}^{a} \dfrac{x(x^3+1)}{x^{10}+1} dx.$

**Задача 9.** Вычислить $\int\limits_{0}^{+\infty} x^2 e^{-2x} dx.$

**Задача 10.** Найти решение $y(x)$ дифференциального уравнения $y' = \cos(x+y^2)/2y$ с начальным условием $y(0) = -\sqrt{2\pi}$.

**Задача 11.** Найти все непрерывные функции $y(x)$, $x \in \mathbb{R}$, такие, что $\forall\, x \in \mathbb{R}$

$$y(x) = 1 + \int\limits_{0}^{x} (x-s)y(s)ds.$$

**Задача 12.** Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, где $u_n = \int\limits_{1/\sqrt{n+2}}^{1/\sqrt{n}} \dfrac{dx}{\sqrt{x^{2n} - x^{2n-1} + \ldots + x^2 - x + 2}}$ ?

# 15 октября 2014 (*международная*)

**Задача 1.** На окружности радиуса 1 отмечены 33 точки. Доказать, что из них можно выбрать 3 точки $A$, $B$, $C$ так, что $S(\triangle ABC) < 0{,}01$.

**Задача 2.** Найти хотя бы одно решение матричного уравнения $X^2 - 2X - Q = 0$, где $Q$ – матрица $2014 \times 2014$, в которой на диагонали нули, а вне диагонали – единицы.

**Задача 3.** Доказать, что геометрическое место середин параллельных отрезков с концами на разных ветвях гиперболы есть прямая.

**Задача 4.** Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2n}}$.

**Задача 5.** Для функции $f(x) = \begin{cases} \exp(-\operatorname{ctg}^2 x) & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$ найти $f'(0)$.

**Задача 6.** Пусть $f(x) = P(x)/Q(x)$, $P$ и $Q$ – многочлены, $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$. Доказать, что график $f(x)$ имеет невертикальную асимптоту.

**Задача 7.** Найти промежутки монотонности и экстремумы $f(x) = x \int\limits_0^x e^{t^2}\,dt$.

**Задача 8.** Найти все функции $y(x)$, $x \in \mathbb{R}$, такие, что $\forall\, x \in \mathbb{R}$

$$y'(x) = \int_0^1 \max\{1, y(t)\}dt \quad \text{и} \quad y(0) = \frac{1}{2}$$

**Задача 9.** Пусть $f(x)$, $x \in (0, +\infty)$, непрерывно дифференцируема, $f(x) \neq 0$, и $f'(x) \sim -f^2(x)$ при $x \to +\infty$, т.е. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{f^2(x)} = -1$. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

**Задача 10.** Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n^2\right)$ ?

# 4 мая 2012 (*международная*)

**Задача 1.** (1 курс и старшие физмат) Пусть $A$ – матрица $(n-1)\times n$; $D_k$ – определитель матрицы, полученной из $A$ вычёркиванием $k$-го столбца. Доказать, что столбец $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ с элементами $x_k = (-1)^k D_k$ является решением уравнения $AX = 0$.

**Задача 2.** (1 курс и старшие технари) Убедиться, что $\forall x \in \mathbb{R}$ матрица
$A(x) = \begin{pmatrix} 2 & x & 0 \\ x & 2 & 0 \\ 2 & x & x^2 \end{pmatrix}$ имеет действительные собственные значения. Пусть $\lambda_{\min}(x)$ – наименьшее собственное значение матрицы $A(x)$. Найти $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} \lambda_{\min}(x)$.

**Задача 3.** (технари 1 курс) При каких значениях $a$ и $b$ эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ пересекается с параболой $y^2 = 2px$ под наибольшим углом?

**Задача 4.** (физмат) Ограничено ли множество точек $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, задаваемых уравнением $x^5 + x^3y^2 - xy^3 - x^3 + 3y - 5 = 0$ ?

**Задача 5.** (1 курс) Найти $n$-ю производную функции $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 2}}$.

**Задача 6.** (эту задачу мы не решали, она предназначалась экономистам) Убедиться, что функция $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ при $x \neq 0$, $f(0) = 1$, дифференцируема в точке $x = 0$, и найти $f'(0)$.

**Задача 7.** (1 курс) Пусть $f$ – дифференцируемая функция на промежутке $(0; +\infty)$, и существует прямая, проходящая через начало координат и пересекающая график функции хотя бы в двух точках. Доказать, что существует касательная к графику, проходящая через начало координат.

**Задача 8.** (всем) Два шара радиуса 6 см катятся по плоскости вдоль различных прямых с постоянными скоростями. В начальный момент времени расстояние между ними равнялось 5 см, через 1 секунду $\sqrt{257} - 12 \approx 4$ см, через 5 секунд 1 см. Столкнутся ли шары?

**Задача 9.** (экономистам) Надо покрасить 6000 м ткани в один цвет и 2000 м – в другой. Каждый рабочий тратит на покраску 5 м ткани в первый цвет одинаковое время, такое же, как на покраску 3 м ткани во второй цвет. Как разделить 21 рабочего на 2 бригады, чтобы выполнить заказ за наименьшее время, если все рабочие приступят к работе одновременно, и каждая бригада будет красить в один цвет?

**Задача 10.** (1 курс и старшие технари) Вычислить $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + x}$.

**Задача 11.** (всем) Для любого $x \neq 0$ найти $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(x)$, где $f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{x}$.

**Задача 12.** (старшие курсы) Найти $\displaystyle\iint\limits_G [1{,}5x^2 + 2y^2]\,dxdy$, где $[a]$ – целая часть $a$; область $G = \{(x, y):\ x^2 + y^2 < 1\}$.

**Задача 13.** (старшие курсы) Найти все непрерывные функции $f:\ \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ такие, что для всех $x, y \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $xy < 0$, выполнено равенство

$$f(x) + f(y) = (x+y)f(x)f(y). \qquad (*)$$

**Задача 14.** (старшие курсы) Пусть решение $y(x)$, $x \in \mathbb{R}$, дифференциального уравнения $y'' - 2y' + y = 2e^x$ принимает значения разных знаков. Показать, что $y(x)$ имеет одну точку минимума и одну точку максимума.

**Задача 15.** (старшие курсы) Найти все функции $y(x)$, $x \in \mathbb{R}$, такие, что

$$\forall\ x \in \mathbb{R} \quad \frac{y'''(x)}{y''(x)} = \frac{y'(x)}{y(x)}.$$

**Задача 16.** (старшие курсы) Сходится ли ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n + 2\cos n}$ ?

**Задача 17.** (старшие физмат) Доказать, что $\forall x \in \mathbb{R}\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!} > 0$.

**Задача 18.** (старшие технари) Вычислить $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{3^n n!} \cos\frac{\pi n}{2}$.