# ОБЛАСТНАЯ ОЛИМПИАДА, 1996 г.

**1.** Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

**2.** Даны координаты векторов на плоскости в ортонормированном базисе $\vec{a} = (15,\ 05)$ и $\vec{b} = (19,\ 96)$. В параллелограмме, построенном на этих векторах, найти расстояние между сторонами, параллельными вектору $\vec{a}$.

**3.** Найти все квадратные матрицы $X$ второго порядка, для которых $X^2 = E$ – единичная матрица.

**4.** а) Изобразить на плоскости множество $D$ точек, координаты которых удовлетворяют одновременно следующим неравенствам: $4x - 3y \geq 8$; $4x - 3y \leq 24$; $3x + 4y \geq 12$; $3x + 4y \leq 31$.
б) Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, y) = x + y$ на множестве *D*.

**5.** Найти наименьший член последовательности

$$a_n = 2n^2 - 20n + 48 - \frac{25}{(5n-31)^2 + 10}, \quad n \in \Gamma .$$

**6.** Доказать, что $x^6 + 12x^2 - 30x + 18 > 0$ при всех $x \in \mathbf{R}$.

**7.** Пусть функция $f$ 1) непрерывна на $[0, +\infty)$; 2) дифференцируема на $(0, +\infty)$; 3) $f(0) = 0$; 4) $f'$ – возрастает на $(0, +\infty)$.
Показать, что $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ возрастает на $(0, +\infty)$.

**8.** Вычислить $\int\limits_{-1}^{3} ||x| - 1|\, dx$.

**9.** Доказать, что $\int\limits_{0}^{3} \frac{e^{x-1} - 1}{x^2 + 1} dx > 0$.

**10.** Доказать сходимость $\int\limits_0^{+\infty} \cos x^2 dx$.

**11.** Найти $y(2)$, где $y(x)$ – решение дифференциального уравнения $y' = \dfrac{y}{|1-x|+x} + x$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=0$.

**12.** Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^{n^3}$.

**13.** Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n(n+1)}$.

**14.** Предположим, что в некотором виде бизнеса скорость увеличения капитала пропорциональна квадрату капитала. Считая процесс непрерывным, найти время увеличения капитала с 1 млн руб. до 100 млн руб., если с 1 млн руб. до 10 млн руб. капитал увеличился за 9 лет.

**15.** Представители трех посреднических фирм А, Б и В одновременно разгружают одинаковый товар в одинаковой упаковке в один общий склад магазина. Два представителя тщательно проверяют маркировку на каждой упаковке, а третий иногда отвлекается. Позднее обнаружилось одна упаковка с другой маркировкой.
При опросе представители фирм сделали следующие заявления:
А – «Я не отвлекался», «В отвлекался»;
Б – «Я не отвлекался», «А отвлекался»;
В – «А не отвлекался», «Б отвлекался».
У одного представителя оба ответа верны, у другого – оба ложны,
у третьего – один верный и один неверный.
Какой фирме принадлежит упаковка с отличающейся маркировкой?

---

## ОБЛАСТНАЯ ОЛИМПИАДА, 1997 г.

**1.** Пусть $\Delta_n$ – определитель $n$-го порядка с элементами $\delta_{ij}=1$ при $|i-j|\le 1$ и $\delta_{ij}=0$ при $|i-j|>1$. Вычислить $\Delta_{10}$.

**2.** Написать канонические уравнения прямой $L_1$, являющейся проекцией прямой $L: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+4}{1} = \dfrac{z}{2}$ на плоскость $x+y+z-1=0$.

**3.** Доказать, что $\sqrt{\underbrace{11\ldots1}_{2n\text{ раз}} - \underbrace{22\ldots2}_{n\text{ раз}}} = \underbrace{33\ldots3}_{n\text{ раз}}$.

**4.** Показать, что функция $f(x) = \min\{x^3 - x,\ 10-2x\}$ имеет наибольшее значение и найти его.

**5.** Найти расстояние от точки $A(0,\ 1)$ до параболы $y = x^2$.

**6.** Вычислить производную $n$-го порядка для функции

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}.$$

**7.** Вычислить $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{xdx}{2+\sin x}$.

**8.** Найти область определения интегральной экспоненты $\mathrm{Ei}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\,dt$.

**9.** Исследовать сходимость ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)!\,e^{-n^2}$.

**10.** Ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0$) сходится. Сходится ли ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^{a_n}$ ?

**11.** Пусть $x(t)$ решение начальной задачи $\ddot{x} + |x| = 0$, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$. Найти $x(\pi)$.

**12.** Найти все ограниченные на промежутке $[0, +\infty)$ решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения $y'' - 4y - 4e^{-2x} = 0$.

**13.** Найти непрерывное решение $y(x)$, $x \in [0,\ +\infty)$ дифференциального уравнения

$$y' + y = \begin{cases} 1, & 0 \le x < 2, \\ 0, & x \ge 2, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 0$, и построить его график.

**14.** Крестьянка принесла на рынок корзину яблок. Первому покупателю она продала половину всех яблок и еще пол-яблока, второму – половину остатка и еще пол-яблока и т.д. Когда пришел шестой покупатель и купил половину остатка и еще пол-яблока, то оказалось, что у него, как у остальных покупателей, все яблоки целые, а крестьянка продала все яблоки. Сколько яблок было в корзине?

**15.** Сумма цифр натурального числа равна 1997. Может ли быть это число квадратом другого натурального числа?

## ОБЛАСТНАЯ ОЛИМПИАДА, 1998 г.

**1.** Найти $A^{1998}$, если $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. (1 балл)

**2.** Некто купил 30 акций за 30 рублей, из числа этих акций за каждые 3 акции фирмы А заплачен один рубль, за каждые 2 акции фирмы В – 1 рубль и за каждую акцию фирмы С – 2 рубля. Сколько акций каждой фирмы было куплено? (1 балл)

**3.** Некоторая сумма вложена в три разных банка под разные проценты (1/3 в первый банк, 1/2 во второй, 1/6 в третий). В результате доход составил 1250 рублей. Если бы сумма была распределена другим образом (1/6 в первый, 2/3 во второй и 1/6 в третий), то доход составил бы 1200 рублей. Если сумму распределить третьим способом (1/2 в первый, 1/6 во второй и 1/3 в третий), то доход составил бы 1250 рублей. Найти проценты каждого банка и общую сумму вклада, если проценты в банке являются целыми числами меньшими 10. (3 балла)

**4.** Даны векторы $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{c}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$.

Найти все векторы $\vec{a}$, для которых система уравнений $\begin{cases} \vec{a}\times\vec{x}=\vec{b}, \\ \vec{a}\times\vec{y}=\vec{c} \end{cases}$

имеет хотя бы одно решение. (4 балла)

**5.** Написать уравнение плоскости, симметричной плоскости $x+2y+3z+1=0$ относительно плоскости $x+y+z=0$. (5 баллов)

**6.** Последовательность $\{x_n\}$ задана формулами: $x_{n+1} = \dfrac{x_n^3 + 5}{6}$, $x_1 = 0,23$. Доказать, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и найти его. (5 баллов)

**7.** Доказать, что функция $f(x) = x + e^{-x^2}$ является возрастающей. (2 балла)

**8.** Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin x}\, dx$. (3 балла)

**9.** Дана функция $f(x) = \int\limits_{-2x}^{-x} e^{z^2} dz$. Показать, что $f(x) \sim x$ при $x \to 0$. (3 балла)

**10.** При каком значении параметра $a \in (0; +\infty)$ площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \dfrac{a^2}{(a^2+1)(x^2 + 2ax + 2a^2)}$ и осью $Ox$, будет наибольшей и чему равной? (3 балла)

**11.** Найти размеры прямоугольного параллелепипеда наибольшего объема, вписанного в сферу радиуса $R$. (3 балла)

**12.** Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$. (2 балла)

**13.** Ряды с положительными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся. Сходятся ли ряды а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ и б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n v_n}$ ? (2 балла)

**14.** Решить интегральное уравнение $y(x) = 1 + \int\limits_0^x y(x-t)dt$. (3 балла)

**15.** Решить дифференциальное уравнение $x = 5(y')^4 + 4(y')^3$. (2 балла)

# ОБЛАСТНАЯ ОЛИМПИАДА, 1999 г.

**1.** Вычислить определитель квадратной матрицы восьмого порядка, у которой на главной диагонали стоят числа **1 4 0 4 1 9 9 9**, а вне ее тройки. **(**2 балла)

**2.** Пусть $A$ – квадратная матрица $n$-го порядка. Элементы $b_{i\,j}$ матрицы $B$ выражаются через элементы $a_{i\,j}$ матрицы $A$ по формуле $b_{i\,j} = a_{i\,n-j+1}$ $(i, j = 1, 2, ..., n)$. Матрица $C$ получается из матрицы $A$ заменой ее элементов на элементы, симметричные относительно побочной диагонали. Как связаны определители матриц $B$ и $A$, $C$ и $A$? (4 балла)

**3.** Пусть $A$ – квадратная матрица 13-го порядка, у которой по главной диагонали и выше стоят числа 1999, а ниже числа (– 1999). Показать, что $\lambda = 1999$ – собственное значение матрицы $A$. (3 балла)

**4.** Доказать, что квадратная матрица второго порядка с положительными элементами имеет собственный вектор с положительными координатами. (3 балла)

**5.** Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – ненулевые, взаимно перпендикулярные векторы. Показать, что система уравнений $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{x} = 1$ имеет единственное решение. (3 балла)

**6.** Доказать равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)...\left(1-\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\right) = \frac{1}{3}$. (2 балла)

**7.** Для многочлена $n$-й степени $P(x)$ известно, что

$$P(a) \geq 0,\ P'(a) \geq 0,\ P''(a) \geq 0,\ \ldots,\ P^{(n)}(a) \geq 0\,.$$

Доказать, что корни уравнения $P(x) = 0$ не превосходят $a$. (3 балла)

**8.** Убедиться, что линии уровня функций

$$u = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{и} \quad v = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

пересекаются между собой под прямым углом. (2 балла)

**9.** Состояние предприятия описывается двумя существенными параметрами $x$ и $y$, зависимость которых от времени задается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=4x+y\,,\qquad \frac{dy}{dt}=3x-5y\,.$$

Стоимость предприятия $P=x^2-y^2$. Доказать, что стоимость предприятия с течением времени возрастает, если в момент времени $t=0$, $x\neq 0$, $y\neq 0$. (3 балла)

**10.** Доказать, что решение $y(x)$ дифференциального уравнения $y''-\ xy^2=0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0$, $y'(0)=1$, является возрастающей функцией. (2 балла)

**11.** Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \sqrt{e^{2x}-1}\,dx$. (1 балл)

**12.** Пусть $f(x)\ =\ \int\limits_0^1 \frac{dt}{(x^2+t^2)^2}$. Доказать, что $f(x)\sim\frac{1}{x^4}$ при $x\ \to\ \infty$.

(2 балла)

**13.** Доказать, что дифференциальное уравнение $\frac{d^{1999}y}{dx^{1999}}+y=0$ имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условиям $y(0)=1999$, $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$.

(2 балла)

**14.** Пусть для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ с положительными членами существует $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n+u_{n+1}}{u_n+u_{n-1}}=a$. Доказать, что при $a<1$ ряд сходится, а при $a>1$ ряд расходится . (3 балла)

**15.** Найти 2000-ю производную функции $y=e^{x^2-2x}$ в точке $x_0=1$.

(3 балла)

**16.** Доказать, что при любом $n\in\Gamma$ $\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<2$.

(3 балла)

**17.** Доказать следующее утверждение: если $p$ и $p^2+2$ – простые числа, то $p=3$. (3 балла)

# МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА, 1999 г.

## Основной конкурс

**1.** Вычислить определитель квадратной матрицы седьмого порядка, у которой на побочной диагонали стоят числа 7 1 2 1 9 9 9, а вне ее пятерки. (3 балла)

**2.** Дана квадратная матрица $A$ 1999-го порядка с элементами $a_{ij} = 0$ при $i \ge j$ и $a_{ij} = 1$ при $i < j$. Найти $A^{1999}$. (9 баллов)

**3.** Кривая в пространстве задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = a_{11}t^2 + a_{12}t + a_{13} \\ y = a_{21}t^2 + a_{22}t + a_{23} \\ z = a_{31}t^2 + a_{32}t + a_{33} \end{cases}, \text{ где } \operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = 2.$$

а) Доказать, что кривая лежит в одной плоскости. Написать уравнение этой плоскости. (6 баллов)
б) Является ли кривая самопересекающейся? (6 баллов)

**4.** Две цепочки составлены из одинаковых круглых колец. В первой цепочке на 5 колец меньше. В вытянутом состоянии длина первой цепочки 30 мм, второй – 50 мм. Сколько колец содержит каждая цепочка? (6 баллов)

**5.** Две последовательности $(a_n)$ и $(b_n)$, первые члены которых $a_1$ и $b_1$ известны, задаются формулами $a_n = \dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$, $b_n = \dfrac{a_n + b_{n-1}}{2}$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$. (12 баллов)

**6.** Для последовательности $(x_n)$ существует $\lim\limits_{n\to\infty}(2x_n - x_{n-1}) = 0$. Доказать, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и найти его. (9 баллов)

**7.** При каких значениях параметра $a$ уравнение $x^4 + x^2 + ax + 4 = 0$ имеет корень кратности два? (6 баллов)

**8.** Доказать, что многочлен $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$, где $m, n, p = 0, 1, 2, \ldots$, делится на $x^2 + x + 1$. (12 баллов)

**9.** Можно ли разместить круг радиуса 1 в области $\left\{(x,y): 0 \le y \le 2\cos\frac{x}{2}\right\}$?

(9 баллов)

**10.** Рассматриваются всевозможные параболы, ветви которых направлены вниз, симметричные относительно прямой $x=-1$ и касающиеся прямой $6x-y+3=0$. Найти уравнение той из них, которая пересекает ось $Oy$ в точке с наибольшей ординатой. (6 баллов)

**11.** Верно ли неравенство $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{x^3-3x+3} < \int\limits_1^2 \frac{xdx}{x^3-3x^2+5}$? (9 баллов)

**12.** Найти все непрерывные функции $f(x)$, $x \in (0,\infty)$, удовлетворяющие условию $\forall x \in (0,\infty)$ $\int\limits_0^1 f(xy)dy = 1999 f(x)$. (9 баллов)

**13.** Найти все решения дифференциального уравнения $y'\sin 2x = 2(y+\cos x)$, ограниченные при $x \to \pi/2$. (6 баллов)

**14.** В гармоническом ряде члены с номерами, содержащими в десятичной записи цифру ноль, заменим на нули. Доказать, что полученный ряд сходится. (12 баллов)

**15.** Найти все решения $y(x)$, $x \in \mathbf{R}$, уравнения $y'(x) = -y(-x)$, удовлетворяющие начальному условию $y(0)=1$. (9 баллов)

## Блицконкурс

**1.** Недавно Маша и Миша узнали, что число называется «пестрым», если все его цифры различны, и решили с ними поэкспериментировать. Маша нашла наибольшее «пестрое» число, которое делится на 7, а Миша нашел наибольшее «пестрое» число, которое делится на 17. Найти эти числа. (3 балла)

**2.** Миша задумал венгерское слово из пяти букв. Пытаясь угадать это слово, Маша определила по несколько букв загаданного слова в каждой попытке. Причем угаданные буквы стояли на своих местах. Вот эти попытки с указанием числа букв.

1) KAROM (3)
2) MAROS (3)
3) MEREM (2)

4) BALOS (3)

Какое слово задумал Миша? (3 балла)

**3.** Маша и Миша рассматривали некоторую нечетную возрастающую функцию $f(x)$. Миша утверждал, что для любых чисел $a$, $b$ и $c$, сумма которых равна нулю, выполняется неравенство $f(a)f(b)+f(b)f(c)+f(c)f(a)\le 0$, а Маша с ним была не согласна. Кто из них прав? (9 баллов)

**4.** Маша написала четыре действительных числа, составляющих арифметическую прогрессию. При каких значениях параметра $a$ эти числа могут быть корнями уравнения $x^4+(a-5)x^2+(a+2)^2=0$?

(6 баллов)

**5.** На вступительных экзаменах в институт Маше и Мише попались различные билеты. Из своих билетов Маша и Миша не решили по одному уравнению. Помогите абитуриентам.

а) Машино уравнение – $x^4-2\sqrt{3}x^2+x+3-\sqrt{3}=0$; (6 баллов)

б) Мишино уравнение – $(\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x+1)(\sin^4 x+\cos^4 x)=\dfrac{1}{4}$.

(6 баллов)

**6.** Маша и Миша дважды обменивались марками, причем каждый раз 1/7 количества марок, имевшихся на момент обмена у Маши, обменивалась на половину количества марок, имевшихся у Миши. Сколько марок было у Маши и сколько у Миши до первого обмена, если после первого обмена у Маши было 945 марок, а после второго обмена у Миши – 220? (3 балла)

**7.** Маша и Миша решили пожениться. Миша захотел купить Маше свадебный подарок. В городе, где они живут, в обращении находятся монеты в 5 и 8 у.е. Миша, хотя и имел достаточное количество монет каждого типа, не смог купить Маше свадебный подарок, так как не смог указанными монетами набрать нужную сумму, а у продавца не было сдачи. Если бы свадебный подарок стоил дороже на любое количество у.е., то Миша смог бы его купить. Сколько стоит свадебный подарок Маше? (6 баллов)

**8.** Бабушка подарила на свадьбу Маше обручальное кольцо, состоящее из золота и меди. Если его сплавить с 3 граммами чистого золота, получат сплав 900-й пробы, а сплавив его с 2 граммами сплава 900-й пробы, получат сплав 840 пробы. Определить вес подаренного бабушкой обручального кольца. (3 балла)

**9.** Маша и Миша на свадьбе сидели за столом и ели одновременно свадебный торт, не отвлекаясь на поцелуи. Если бы Миша ел со скоростью Маши, то процесс еды длился бы на 4 минуты дольше, а если бы наоборот Маша ела со скоростью Миши, – то сократился бы на 1 минуту. За какое время торт был полностью съеден? (3 балла)

**10.** Маша и Миша после свадьбы отправились в свадебное путешествие. Приехав в город N, они поехали на экскурсию на автомобиле. По всем улицам города автомобили ездят с одинаковой частотой и скоростью – 60 км/ч (как в ту, так и в другую сторону). Только машина молодоженов нарушала этот строгий порядок, так как они иногда ездили, а иногда останавливались, чтобы посмотреть местные достопримечательности. Миша заметил, что встречных машин вчетверо больше попутных, а Маша заметила, что они стояли в целом треть времени от всей поездки. На следующий день они снова поехали в город на автомобиле, но ездили с меньшей скоростью, так же иногда останавливаясь. К их удивлению наблюдение, которое они сделали во второй день, не изменились. Определить, с какой скоростью катались по городу Маша и Миша в первый и во второй день. (6 баллов)

**11.** Приехав из свадебного путешествия, Маша и Миша решили положить в свою спальню круглый ковер, касающийся всех стен. Спальня приставляет собой четырехугольную комнату, 3 стороны которой равны 2, 3 и 4 метра, а площадь составляет 7,2 м$^2$. Найти минимальные размеры квадратного ковра, из которого можно вырезать требующийся ковер. (3 балла)

## ОБЛАСТНАЯ ОЛИМПИАДА, 2000 г.

### Блицконкурс

**1.** Некто положил в банк 2300 руб. под 50% годовых. В конце каждого из четырех первых лет хранения вкладчик добавлял одну и ту же сумму. В результате по истечении пяти лет вклад увеличился на 1025%. Какую сумму ежегодно добавлял вкладчик? (1 балл)

**2.** Пусть $\vec{a}\vec{b}=\vec{c}^2$, $\vec{a}\vec{c}=\vec{b}^2$, $\vec{b}\vec{c}=\vec{a}^2$. Доказать, что $\vec{a}=\vec{b}=\vec{c}$. (3 балла)

**3.** Пусть $A$ и $B$ – квадратные матрицы $n$-го порядка ($n \geq 2$). Верно ли, что если $AB = O$ – нулевая матрица, то либо $A = O$, либо $B = O$?
(2 балла)

**4.** Касательная к графику функции $y = \sqrt[3]{x^2}$ такова, что абсцисса $x_0$ точки касания принадлежит отрезку $[0{,}5;\ 1]$. При каком значении $x_0$ площадь треугольника, ограниченного этой касательной, осью $OX$ и прямой $x = 2$, будет наименьшей? (2 балла)

**5.** Доказать, что функция $f(x) = \max\{3x^2 - 4x,\ 2x - 3x^2\}$ имеет наименьшее значение и найти его. (2 балла)

**6.** Найти $\lim\limits_{x \to +0} \sqrt[3]{x^4}\,|\ln x|^{\sqrt{\pi}}$. (3 балла)

**7.** Пусть для непрерывной функции $f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, среднее значение по любому отрезку длины $T$ постоянно. Доказать, что $f(x)$ – периодическая функция. (3 балла)

**8.** Доказать, что все плоскости, касательные к поверхности $z = x \cdot f\left(\dfrac{y}{x}\right)$, проходят через одну и ту же точку. (2 балла)

**9.** Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{2n}$. (2 балла)

---

## Основной конкурс для студентов экономических специальностей

**1.** Вычислить определитель квадратной матрицы восьмого порядка, у которой на главной диагонали стоят числа 2 3 1 1 2 0 0 0, а вне ее шестерки. **(**2 балла)

**2.** Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два ненулевых, неколлинеарных вектора в пространстве. Найти все векторы $\vec{x}$, такие, что $(\vec{x} \times \vec{a}) \times \vec{x} = \vec{a}$, $(\vec{x} \times \vec{b}) \times \vec{x} = \vec{b}$.
(3 балла)

**3.** Доказать, что $\forall x \in \mathbf{R} \quad x^4 - 2x\sin x + 1 > 0$. (3 балла)

**4.** Найдите производную $n$-го порядка от функции $y = \ln(x^2 - x - 2)$.
(2 балла)

**5.** Доказать, что $f(x)=\int\limits_0^x \sin(xt^2)\,dt$ – четная функция. (1 балл)

**6.** Вычислить $\int\limits_{-1}^{1} \cos x \ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right) dx$. (1 балл)

**7.** Доказать, что $\int\limits_0^1 \left[\int\limits_0^y \sqrt{1+x^3+y^2}\,dx\right] dy \le \dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{6}$. (3 балла)

**8.** В каком треугольнике произведение синусов его углов максимально? (3 балла)

**9.** Найти непрерывную функцию $y(x)$, $x\in \mathbf{R}$, такую, что $y(0)=1$, $|y(x)|\,y'(x)=-x$ при $y(x)\ne 0$. Нарисовать эскиз графика. (5 баллов)

**10.** Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, в котором $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{3}{4}+(-1)^n\dfrac{1}{2}$? (3 балла)

**11.** Конусом в пространстве с вершиной в точке $M_0$ назовем множество точек $K\ne\{M_0\}$ такое, что $\forall M\in K$, $M\ne M_0$, прямая $(M_0M)$ принадлежит $K$. Доказать, что множество точек $M(x,y,z)$, координаты которых удовлетворяют уравнению $x^2+3y^2+z^2+xy+2xz=0$, является конусом. (4 балла)

**12.** Расходы по перевозке груза теплоходом (себестоимость перевозки) состоят из двух частей. Первая часть (собственные расходы) пропорциональна времени нахождения в пути, а вторая пропорциональна расходу топлива, который в свою очередь пропорционален квадрату скорости и времени. Теплоход движется с постоянной скоростью. Показать, что можно выбрать скорость так, чтобы себестоимость была наименьшей.
Как изменится наименьшая себестоимость, если цена топлива возрастет в $k$ раз? На сколько процентов надо снизить собственные расходы, чтобы наименьшая себестоимость не изменилась? (3 балла)

**13.** Доказать, что число $M=192021...80$, составленное из двузначных чисел от 19 до 80, делится на 1980. (4 балла)

## Основной конкурс для студентов технических специальностей

**1.** Доказать иррациональность числа $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}$. (5 баллов)

**2.** Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – ненулевые векторы, такие, что $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$, $\vec{b}\times\vec{c}=\vec{a}$, $\vec{c}\times\vec{a}=\vec{b}$. Доказать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют правый ортонормированный базис. (3 балла)

**3.** Квадратная матрица $A=(a_{ij})$ $n$-го порядка называется верхнетреугольной, если $a_{ij}=0$ при $i>j$. Доказать, что произведение верхнетреугольных матриц является верхнетреугольной матрицей. (2 балла)

**4.** Пусть $A=\begin{pmatrix}2&1\\2&2\end{pmatrix}$, $X_0=\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$, $X_n=A^nX_0$. Показать, что $\lim\limits_{n\to\infty}X_n$ существует и найти его. (3 балла)

**5.** Найти область определения функции $f(x)=\int\limits_0^x\frac{dt}{\sqrt[3]{t}(t-1)}$. (3 балла)

**6.** Пусть $f(x)=e^{x^3+x^5}$. Найти $\frac{d^{13}f}{dx^{13}}(0)$. (3 балла)

**7.** Найти $\int\limits_0^1\left[\int\limits_0^1\max\{x,y^2\}dx\right]dy$. (2 балла)

**8.** Доказать, что $\forall x\in\mathbf{R}\quad x^6-2x^5+2x^4-x^3+x^2-x+0,4>0$. (4 балла)

**9.** Доказать, что существует такая непрерывная функция $y(x)$, $x\in\mathbf{R}$, что $y(0)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$, $\forall x\notin$ ÿ $\; y'(x)=a(x)y(x)$, где $a(x)=-1$ при $x\in[2n-1;\ 2n]$, $a(x)=0$ при $x\in(2n;\ 2n+1)$, $n\in$ ÿ . (5 баллов)

**10.** Выяснить (без помощи калькулятора) какое из чисел больше:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{36}}\ \text{или}\ 1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{27}}\ ?$$

(4 балла)

**11.** Доказать неравенство $\int\limits_0^{\pi/2} \sin(\sin x)dx \geq \frac{8}{9}$. (2 балла)

**12.** Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\cos\frac{\pi}{2^n}$. (2 балла)

**13.** Найти $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int\limits_0^T \frac{2x^3+x-6}{3x^3+x+5}dx$. (4 балла)

**14.** На кривой $(x^2+y^2)^2 = 2(x^2+y^2+xy)$ найти точку наиболее удаленную от начала координат. (1 балл)

**15.** Доказать, что $\forall n \in$ ў $\int\limits_0^{2\pi} \sin(nx+\sin x)dx = 0$. (2 балла)

## ОБЛАСТНАЯ ОЛИМПИАДА, 2005 г.

**1.** Куб разрезан на 27 одинаковых кубиков. Кубики с общей гранью назовем соседними. Можно ли, последовательно убирая соседние кубики, оставить только центральный кубик? (2 балла)

**2.** При каких значениях параметра $a$ система уравнений

$$\begin{cases} x+2y-az=0, \\ x+y-z=1, \\ x+y+(a^5+a-3)z=3 \end{cases}$$

имеет решения? (2 балла)

**3.** Пусть прямая пересекает гиперболу в точках $M_1$ и $M_2$, а ее асимптоты в точках $N_1$ и $N_2$. Доказать, что середины отрезков $M_1M_2$ и $N_1N_2$ совпадают. (4 балла)

**4.** Построить график функции

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left[x+\frac{1}{x}\right]+\left[x^2+\frac{1}{x^2}\right]+\ldots+\left[x^n+\frac{1}{x^n}\right]}{x^n+\frac{1}{x^n}}, \; x>0,$$

где $[x]$ – целая часть числа $x$. (6 баллов)

**5.** Две последовательности $\{x_n\}_{n\in\Gamma}$ и $\{y_n\}_{n\in\Gamma}$, заданы условиями $x_1 = 1$, $y_1 = \frac{1}{2}$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{4}y_n$, $y_{n+1} = \frac{1}{4}x_n + y_n^2$. Доказать, что существуют пределы этих последовательностей и найти их. (8 баллов)

**6.** Найти все непрерывные функции $f$, удовлетворяющие условию

$$\forall x, y \in \mathbf{R} \quad f(x) + f(y) = (x+y)f(x)f(y).$$ (4 балла)

**7.** Доказать, что $0,5 < \int\limits_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}\,dx < 1.$ (6 баллов)

**8.** Доказать, что при любых $a_k \in \mathbf{R}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ функция

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx$$

имеет бесконечное множество нулей. (6 баллов)

## ОБЛАСТНАЯ ОЛИМПИАДА, 2007 г.

**1.** Найти ранг квадратной матрицы восьмого порядка, у которой на главной диагонали стоят числа **1 0 1 1 2 0 0 7**, а вне ее единицы.

**2.** Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны и имеют длины $a, b, c$. Найти высоту пирамиды.

**3.** Доказать, что функция $f(x) = 3x^5 - 30x^4 + 110x^3 - 180x^2 + 135x + 9$ возрастает на всей числовой прямой.

**4.** Функция $f$ удовлетворяет следующим условиям: для любого $x \in [0, \infty)$ $f(x) > 0$, $f(x) + f'(x) \le 0$. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

**5.** Вычислить $\lim\limits_{t\to+0}\lim\limits_{x\to+0} \frac{x^x - 1}{(tx)^{tx} - 1}$.

**6.** Дана функция $f(x)=\int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2+x^2}}$. Доказать, что $f(x)\sim Cx^n$ при $x\to 0$ и некоторых $C\in\mathbf{R}$, $n\in\mathbb{N}$.

**7.** Вычислить $\int\limits_0^1 (\arcsin x)(\arccos x)\,dx$.

**8.** Пусть $P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ – многочлен с действительными коэффициентами и $\forall x\in\mathbf{R}\ \ P(x)>0$. Доказать, что его можно представить в виде суммы квадратов двух многочленов с действительными коэффициентами.

**9.** Доказать, что на кривой $L: x^2+xy+2y^2-14=0$ существует точка с наименьшей абсциссой. Найти эту точку.

**10.** Найти все решения $y(x)$, $x\in(0,\infty)$, дифференциального уравнения $y''+\frac{2}{x}y'-y=0$, удовлетворяющие условию $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=0$.

## ОБЛАСТНАЯ ОЛИМПИАДА, 2009 г.

**1.** К гиперболе $xy=m$ $(m>0)$ в точке, лежащей в первой четверти, проведена касательная. Доказать, что площадь треугольника, ограниченного касательной и осями координат, постоянна.

**2.** Среди всех определителей третьего порядка с элементами, равными 1 или –1, найти наибольший.

**3.** Найти $\max\limits_{|\vec{x}|=2} |\vec{x}\times\vec{a}+(\vec{x}\cdot\vec{a})\vec{x}|$, где $\vec{a}$ – заданный вектор.

**4.** Написать уравнение плоскости, содержащей прямую, заданную уравнениями $\begin{cases} x+y+z+1=0, \\ 2x+2y+z+1=0 \end{cases}$, и наиболее удаленной от начала координат.

**5.** Доказать, что существуют значения параметра $a$, при которых уравнение $x^4-x^3+(a-4)x^2+ax+a^2-3a=0$ имеет 4 различных действительных корня.

**6.** Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n\,n!}\sum\limits_{k=1}^{n}k\,k!$

**7.** Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, где $u_n=\int\limits_{n}^{n+2}\sin(x^3)dx$?

**8.** Найти все решения $y(x)$, $x\in[0,1]$, уравнения

$$\int\limits_0^1 y'(x)y(x)dx=y'(x)+y(x).$$

---

## ОБЛАСТНАЯ ОЛИМПИАДА, 2011 г.

**1.** Для любого $n\geq 2$ вычислить определитель $n$-го порядка

$$\Delta_n(x)=\begin{vmatrix}1 & x & \dots & x^{n-1}\\ x & 1 & \dots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x^{n-1} & 1 & \dots & 1\end{vmatrix}.$$

**2.** Пусть $A$ – квадратная матрица 2011-го порядка, $\det A\neq 0$. Сколько решений имеет уравнение $X^2+2011A^2=AX+XA$?

**3.** По заданным углам между боковыми ребрами треугольной пирамиды найти углы между биссектрисами боковых граней, проведенными из вершины пирамиды.

**4.** Найти диаметр множества $G=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2: x^4+xy+y^4\leq 0\}$ – наибольшее из расстояний между его точками.

**5.** Найти все прямые, принадлежащие поверхности $x^2-y^2+z^2=1$ и проходящие через ее точку $(1,1,1)$.

**6.** Доказать, что не существует функций $f(x)$, $x\in\mathbf{R}$ и $g(y)$, $y\in\mathbf{R}$ таких, что для любых $x,y\in\mathbf{R}$ $xy+1=f(x)g(y)$.

**7.** Найти $\lim\limits_{x\to 1+0}(x-1)^{\sin(\pi\cos\pi x)}$.

**8.** Для любого $x \in (0, \dfrac{\pi}{4})$ найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \ln \left| \dfrac{d^{2n}}{dx^{2n}} \cos^3 x \right|$.

**9.** Доказать, что для любого $x \in \mathbf{R}$ $\;3x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 3 > 0$.

**10.** Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{\sqrt{3}-\sqrt{2}}^{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \frac{x^6 - 1}{x^8 + 1}\, dx$.

**11.** Найти сумму ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$.

---

## ОБЛАСТНАЯ ОЛИМПИАДА, 2013 г.

### 1 курс

**1.** Последняя цифра в десятичной записи числа $n^2 + 2n$, $n \in \mathbb{N}$, равна 4. Найти предпоследнюю цифру.

**2.** На окружности радиуса 1 отмечены 2013 точек. Доказать, что на окружности существует точка, сумма расстояний от которой до отмеченных точек больше 2013.

**3.** Найти определитель матрицы $X^T X$, если $X = (x_1\; x_2 \ldots x_n)$, $n \ge 2$.

**4.** Найти матрицу, обратную к квадратной матрице $n$-го порядка $A$ с элементами $a_{ij} = 3$ при $i = j$ и $a_{ij} = 2$ при $i \ne j$.

**5.** Доказать, что для любого $x \in [-1; 1]$ $\;\sqrt[2013]{1-x} + \sqrt[2013]{1+x} \ge 2 \cdot \sqrt[2013]{1-x^2}$.

**6.** Решить уравнение $3[x] - 4x + 2 = 0$, где $[x]$ – целая часть числа $x$.

**7.** Сколько действительных корней имеет уравнение $x^{2013} + x^4 + 1 = 0$?

**8.** Найти $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} \min\limits_{y\in\mathbb{R}} (-\dfrac{x^2}{4} + xy + y^2 + 3x + 2y)$.

**9.** Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\pi}}{\pi^{x}}$.

**10.** Для функции $f(x) = \underbrace{\ln(1+\ln(1+\ldots+\ln(1+\ln(1+x))\ldots))}_{2013\ \text{раз}}$ найти $f''(0)$.

## 2—5 курсы

**1.** На окружности радиуса 1 отмечены 2013 точек. Доказать, что на окружности существует точка, сумма расстояний от которой до отмеченных точек больше 2013.

**2.** Для функции $f(x) = \underbrace{\ln(1+\ln(1+\ldots+\ln(1+\ln(1+x))\ldots))}_{2013\ \text{раз}}$ найти $f''(0)$.

**3.** Найти наименьшую из площадей прямоугольных треугольников, описанных вокруг окружности радиуса $R$.

**4.** Доказать, что функция $f(x,y) = \dfrac{\sin x - \sin y}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}$ ограничена в области $D = \{(x,y) : 0 < x < y < \pi/2\}$.

**5.** Вычислить $I = \int\limits_0^{\pi} \cos^{2013} x \, \sin 2013x \, dx$.

**6.** Вычислить $\int \dfrac{(x^2-1)^2}{x^6+1} dx$.

**7.** Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} x e^{-[x]} dx$.

**8.** Решить задачу Коши $yy'' = 2(y' \sin x)^2$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

**9.** Доказать, что дифференциальное уравнение $y^{(2013)} + y^{(2012)} + \ldots + y' + y = 0$ имеет хотя бы одно решение $y(x)$, стремящееся к нулю при $x \to +\infty$.

**10.** Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} u_n$, где $u_n = \int\limits_n^{\infty} \dfrac{dx}{x^2 \ln^3 x}$?