Задачи математических олимпиад
студентов технических вузов Москвы, Зеленоград, с 1996 года
(*в обратном хронологическом порядке*)

Апрель 2017

I курс

Задача 1. Можно ли найти в пространстве $\mathbb{R}^3$ пять векторов таких, что длина суммы любых трёх из них меньше длины суммы остальных двух?

Задача 2. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty} n^3\big(\operatorname{arctg}(n+2) - 2\operatorname{arctg}(n+1) + \operatorname{arctg} n\big)$.

Задача 3. Вычислить $\displaystyle\int_0^1 2^{x^2} + \sqrt{\log_2(x+1)}\, dx$.

Задача 4. Даны функции $f(x) = x + x^{-1}$ и $g(x) = x^2$. Существует ли многочлен $P(u, v)$ такой, что $P(f(x), g(x)) = x + 1$ при $x \neq 0$?

II–V курс

Задача 1. Пусть A, B — матрицы размера $n \times n$, $n \geq 2$; E — единичная матрица $n \times n$. Доказать, что если $(AB - E)^{2017} = E$, то $(BA - E)^{2017} = E$.

Задача 2. Упростить выражение $\displaystyle\sum_{j=1}^{t} \frac{j^t}{t} \sum_{k=0}^{t-j} (-1)^k\, j\, C_{t-j}^{k}$.

Задача 3. Пусть $a_1, a_2, \ldots$ — все натуральные числа, имеющие в десятичной записи лишь цифры 0 и 1. Сходится ли ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-1}$?

Задача 4. Вычислить $\displaystyle\iiint\limits_G \frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z)^4}$, где G задаётся неравенствами $\left\{\begin{array}{c} x, y, z \geq 0 \\ x + y + z \geq 1 \end{array}\right.$

Апрель 2016

I курс

Задача 1. Пусть $ABCD$ — правильный тетраэдр с ребром 1. Вычислить $\left|\vec{AB} \times \vec{CD} + \vec{BC} \times \vec{DA}\right|$.

Задача 2. Последовательность (a_n) задана рекуррентно:

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \begin{cases} a_1 + \ldots + a_n, & \text{если } n \text{ чётно,} \\ a_n + 1, & \text{если } n \text{ нечётно.} \end{cases}$$

Найти остаток от деления a_{2016} на 24.

Задача 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1} \int\limits_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

Задача 4. Истинно ли на множестве $\mathbb{N}$ высказывание $\forall x\ \exists y\ \forall z\ \exists t\ \forall u\ \ |x-y|^u + tz \leq uxy$?

II–V курс

Задача 1. Дана матрица H размера 10×10 : $h_{ij} = 1$ при $j = i + 1$, остальные $h_{ij} = 0$. Доказать, что не существует матрицы X такой, что $X^2 = H$.

Задача 2. Сколько всего строчек $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{21})$ из 0 и 1 таких, что $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{10} < \varepsilon_{11} + \ldots + \varepsilon_{21}$?

Задача 3. Двое игроков поочерёдно называют числа из отрезка $[-1; 1]$: $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Выигрывает 1-й игрок, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ сходится, и 2-й, если ряд расходится. Существует ли у кого-нибудь выигрышная стратегия?

Задача 4. Функция $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ определена рекуррентно: $f(1) = 1$, а при $n \geq 2$ $f(n)$ — это наименьшее натуральное число $k \notin \{f(1), \ldots, f(n-1)\}$, такое, что $k + n = 2^j$ при некотором $j \in \mathbb{N}$. Вычислить $f(1024)$.

Апрель 2015

I курс

Задача 1. Дан правильный 17-угольник $A_1A_2\dots A_{17}$ с центром O. Выразить вектор $\vec{OA_5}$ через $\vec{OA_1}$ и $\vec{OA_2}$.

Задача 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int\limits_{x}^{x^2} e^{t^2}dt$.

Задача 3. Последовательность (a_n) задана рекуррентно: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n+3$. Вычислить $\log_3 a_{2015}$.

Задача 4. Калькулятор, упавший в лужу, может выполнять два действия: вместо сложения делает $x \oplus y = x + y + 1$, а вместо умножения $x \odot y = x^2 - y^2$. Константы, в том числе отрицательные, набираются безошибочно. Можно ли на этом калькуляторе вычислить $x+y$ и xy ?

II–V курс

Задача 1. Найти наибольшее собственное значение матрицы $A = (a_{ij})$ размера 10×10, где $a_{ij} = i$.

Задача 2. Верно ли, что если ряд $\sum a_n$ сходится, то ряд $\sum \dfrac{a_n}{1+a_n}$ тоже сходится?

Задача 3. Пусть $w_0, w_1, \dots w_{n-1}$ — различные корни n-й степени из 1. Вычислить сумму $S = \sum\limits_{k=0}^{n-1} w_k|1-w_k|$.

Задача 4. Существует ли отображение $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ такое, что $f(f(n)) = 2n \ \forall n \in \mathbb{N}$?

Апрель 2014

I курс

Задача 1. Пусть A, B — действительные матрицы 5×3. Какие значения может принимать $\det(AB^T)$?

Задача 2. Известно, что уравнение $P(x) = x^3 + ax + 4 = 0$ имеет кратный корень. Найти a.

Задача 3. Какое множество на плоскости составляют точки, не лежащие ни на одной из прямых $y = 4C^3x - C^4$?

Задача 4. Двое поочерёдно называют по одному числу 0 или 1. Это делается в общей сложности 2014 раз. Первый игрок выигрывает, если сумма названных чисел не делится на 3. Есть ли у него выигрышная стратегия?

II–V курс

Задача 1. Двое игроков поочерёдно заполняют клетки пустой таблицы 2014×2014. За один ход можно любую пустую клетку заполнить любым действительным числом. Первый игрок выигрывает, если в конце игры получится невырожденная матрица. Верно ли, что второй игрок может добиться победы при любой игре первого?

Задача 2. Вычислить $\iiint\limits_G \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$, где G — правильный октаэдр с ребром a; $\rho(x, y, z)$ — расстояние от точки (x, y, z) до поверхности октаэдра.

Задача 3. Пусть $X = \{1, 2, \ldots, 9\}$. Определить количество отображений $g : X \mapsto X$ таких, что $10 - g(x) = g(10 - x)\ \forall x \in X$.

Задача 4. Доказать, что, какова бы ни была целочисленная матрица A размера $n \times n$, найдётся такое k, что все элементы матрицы $A^{2k} - A^k$ делятся на 3.

Апрель 2013

I курс

Задача 1. Существует ли матрица 10×10 из 0 и 1, определитель которой равен 10 ?

Задача 2. Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно:
$a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n - 1$ при чётном n, $a_{n+1} = a_n + n$ при нечётном n.
Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n/n^2)$.

Задача 3. Можно ли найти такое натуральное n, что $2013^n = \ldots\underbrace{0\ldots0}_{2013}1$?

Задача 4. Доказать, что для любой функции $f(x)$, непрерывной на промежутке $[0; +\infty)$, уравнение $f(x^2) + 2x = f(x) + 1$ имеет решение.

II–V курс

Задача 1. Доказать, что если для некоторых матриц A и B имеет место равенство $AB - BA = A$, то матрица A вырождена.

Задача 2. Существует ли многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами, удовлетворяющий условиям $f(4) = 1$, $f(9) = 11$, $f'(4) = 0$?

Задача 3. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} n\dfrac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{1^{p+1} + 2^{p+1} + \ldots + n^{p+1}} \quad (p > 0)$.

Задача 4. Решить дифференциальное уравнение $x(x + y)y' = x + xy + y^2$.

Апрель 2012

I курс

Задача 1. Доказать, что если для некоторой матрицы A выполняется $A^3 = 2E$, то матрица $A - E$ невырождена.

Задача 2. Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентно: $x_1 = a$, $x_{n+1} = \sqrt{1 - x_n^2}$. При каких a существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$?

Задача 3. Найти остаток от деления числа $\left(3+\sqrt{17}\right)^{2012} + \left(3-\sqrt{17}\right)^{2012}$ на 5.

Задача 4. Действительная функция $f(x)$ такова, что при всех $x \geq 1$ выполняется $0 < f(x) \leq \dfrac{1}{\sqrt{f^2(x) - x^2}}$. Доказать, что $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, и вычислить его.

II–V курс

Задача 1. Верно ли, что любую квадратную матрицу размера $n \geq 2$ можно представить в виде $A = B + C$, где $B^2 = B$, $C^3 = 0$?

Задача 2. Доказать, что $x^3 + y^3 + xy \leq 1/27$ при $x, y \in [-2; 0]$.

Задача 3. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{2n-1}{n^3 - n}$.

Задача 4. Вычислить $\iint\limits_{\Sigma} f(M)dS$, где Σ – сфера радиуса R, а $f(M)$ – расстояние от точки M до фиксированной точки сферы.

Апрель 2011

I курс

Задача 1. Найти площадь квадрата $ABCD$, вершины которого лежат на кривой $y = x - \dfrac{1}{x}$.

Задача 2. Решить неравенство $[2x+1] \leq 7x+3$ (здесь $[a]$ обозначает целую часть числа a).

Задача 3. Образуют ли многочлены $f_k(x) = (x-k)(x-k-1)\ldots(x-k-n+1)$ линейно независимую систему ?

Задача 4. Существует ли непрерывная функция $f(x)$ такая, что $\forall x \;\; f(f(x)) = |x| - 2x$?

II–V курс

Задача 1. На полке стоят 25 томов. Разрешается брать любые 4 книги (не обязательно стоящие рядом) и переставлять их циклически. Можно ли после нескольких таких перестановок получить обратное расположение книг ?

Задача 2. Существует ли матрица A размера $n \times n$, удовлетворяющая условию $A = A^T + A^{-1}$?

Задача 3. Для функции $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1-x^n}$ вычислить $f^{(10)}(0)$.

Задача 4. Может ли уравнение $z^2 + a|z| + b = 0$ $(a, b \in \mathbb{C})$ иметь 20 различных комплексных корней ?

Апрель 2010

I курс

Задача 1. Верно ли, что любую матрицу размера 4×4 можно представить в виде суммы невырожденной матрицы и матрицы ранга 1 ?

Задача 2. Через точки A, B параболы проведены две касательные к ней. Они оказались перпендикулярными. Доказать, что отрезок AB содержит фокус параболы.

Задача 3. При каких a последовательность, заданная правилом
$x_1 = a$, $x_{n+1} = 4\sqrt{x_n - 3} - x_n + 6$, определена при всех $n \in \mathbb{N}$?

Задача 4. Можно ли множество натуральных чисел разбить на 2 непустых подмножества S_1, S_2 так, чтобы $\forall x \in S_1$, $y \in S_2$ число $x + y$ было простым ?

II–V курс

Задача 1. Верно ли, что любую квадратную матрицу A можно представить в виде произведения симметрической и невырожденной матриц ?

Задача 2. Придумать дифференциальное уравнение, у которого общее решение имет вид $y = C_1 + C_2 x^2$.

Задача 3. Определить, сходится ли ряд

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots \tag{1}$$

Задача 4. Для функции $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^x)}$ вычислить $\varphi'(2010)$.

Апрель 2009

I курс

Задача 1. Может ли при элементарных преобразованиях матрицы A измениться ранг матрицы A^2 ?

Задача 2. Для функции $f(x) = \dfrac{(3x^2-6x+5)\ln\Big(x-1+\sqrt{x^2-2x+2}\Big)}{2x^2-4x+5}$ вычислить $f''(1)$.

Задача 3. Верно ли, что последовательность $\{x_n\}$, где $x_1 = 0$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{1-2x_n}$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$, содержит все целые числа?

Задача 4. Найти наибольшее значение выражения $\sum\limits_{i<j} |x_i - x_j|$, где $x_1, \ldots, x_n \in [0;1]$.

II–V курс

Задача 1. Пусть $P(x)$ — многочлен степени $2n$ с действительными коэффициентами. Доказать, что многочлены $P(x)$, $P'(x-1)$, $P''(x-2), \ldots, P^{(n)}(x-n)$ линейно независимы.

Задача 2. Существует ли отображение $f:\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такое, что образ любого множества из 2009 элементов содержит чётное число элементов?

Задача 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0+0} \sqrt{x} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(1-x)^n}{\sqrt{n}}$.

Задача 4. Функция $f(x)$ удовлетворяет уравнению $f(x) = x - 1 + \int\limits_0^x |f(t)|dt$. Вычислить $f(1)$.

Апрель 2008

I курс

Задача 1. Дана матрица A размера 10×10 с определителем, равным 2008. Из каждого элемента матрицы вычитают 1, полученную матрицу возводят в квадрат, затем из каждого элемента новой матрицы вычитают 10 и, наконец, от полученной матрицы отнимают матрицу A^2. Найти определитель матрицы, полученной после всех этих преобразований.

Задача 2. Сколько различных частных производных имеет функция $u(x, y) = \sin \dfrac{x}{\sqrt{2}} \cos \dfrac{y}{\sqrt{2}} \exp \dfrac{x+y}{\sqrt{2}}$?

Задача 3. Существует ли непрервно дифференцируемая функция $f(x)$, которая для всех $x \in \mathbb{R}$ удовлетворяет равенству $f'(x)f(x-1) = x - x^2$?

Задача 4. Доказать, что если все корни уравнения $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ (с комплексными коэффициентами) по модулю равны 1, то все корни уравнения $z^3 + |a|z^2 + |b|z + |c| = 0$ также по модулю равны 1.

II–V курс

Задача 1. Квадратные матрицы A и B таковы, что $AB = 0$. Что можно сказать о собственных значениях матрицы $E + BA$ (E — единичная матрица)?

Задача 2. Найти множество всех x, для которых сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)}{n!}$.

Задача 3. Пусть $x(t), y(t)$ — функции, удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + 6xy + 3, \\ \dot{y} = 2y^2 - xy - 1 \end{cases}$ с начальным условием $x(0) = y(0) = 0$. Зная, что $x(1) = 2$, найти $y(1)$.

Задача 4. Вычислить $\iint\limits_{\Sigma} \max(x, y, z) \; dS$, где $\sum$ сфера радиуса R с центром в начале координат.

Апрель 2007

I курс

Задача 1. Найти ранг матрицы $A = \|a_{ij}\|$ размера $n \times n$ $(n \geq 3)$, где $a_{ij} = i + j - 2ij$.

Задача 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^6} \displaystyle\int\limits_1^{x^2} \sqrt{1+t^4}\,dt$.

Задача 3. Можно ли множество всех натуральных чисел разбить на непересекающиеся бесконечные подмножества $A_1, A_2, \ldots$ такие, что для каждого i сумма двух или большего числа элементов множества A_i не является простым числом?

Задача 4. Дифферинцируемая функция $f(x)$ такова, что $f(a) = f(b) = 0$. Доказать, что существует точка $c \in (a,b)$ такая, что $f'(c) = f(c)$.

II–V курс

Задача 1. Существует ли невырожденная матрица A и какая-либо матрица B такие, что $AB - BA = A$?

Задача 2. Определить, сходится ли ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n \ln n}$ ($[x]$ = целая часть x).

Задача 3. Пусть $\varphi(x)$ — функция, обратная функции $f(x) = e^x + x - 1$, $y(x)$ — решение дифференциального уравнения $xy' - y = x^2\varphi(x)$ с начальным условием $y(e) = e$. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} y'(x)$.

Задача 4. Вычислить $\displaystyle\iint\ldots\int\limits_{|x_i|+\ldots|x_n|\leq p} (|x_1| + \ldots + |x_n|)^q \, dx_1 \ldots dx_n$

Апрель 2006

I курс

Задача 1. Верно ли, что всякую 4×4 матрицу ранга 2 можно представить в виде произведения двух 4×4 матриц ранга 3?

Задача 2. Последовательность (c_n) задана рекуррентно: $c_1 = 0, \quad c_{n+1} = \sqrt{(1+c_n)/2}$ при $n \geq 1$. Доказать,что существует $\lim\limits_{n\to\infty}(2^n \cdot \sqrt{1-c_n^2})$, и вычислить его.

Задача 3. Пусть функции $f(x), g(x), h(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ и дифференцируемы в интервале (a,b). Доказать, что
$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f'(\xi) \\ g(a) & g(b) & g'(\xi) \\ h(a) & h(b) & h'(\xi) \end{vmatrix} = 0$ при некотором $\xi \in (a,b)$.

Задача 4. Вычислить $\int x(x-1)(x-2)...(x-2006)\,dx$.

II–V курс

Задача 1. Для каких подстановок $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ сумма $\sum\limits_{k-1}^{n}(k-i_k)^2$ максимальна?

Задача 2. Пусть a_n - количество различных частных производных функций $x_1^2\, x_2^2 \dots x_n^2$. Доказать,что $a_n \sim 3^n$ при $n \to \infty$.

Задача 3. Пусть $\zeta = \exp\dfrac{2\pi}{n}i, \quad S = \sum\limits_{(k,n)=1}\zeta^k$. Вычислить S_{70}.

Задача 4. Решить дифференциальное уравнение $(y'')^3 = 48y^3 + 2(y')^3$.

Апрель 2005

I курс

Задача 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{x^x - 1}{\arccos^2 x}$.

Задача 2. Существуют ли в пространстве $\mathbb{R}^3$ различные единичные вектора $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$, $\vec{a}_5$, образующие друг с другом одинаковые углы?

Задача 3. Вычислить площадь фигуры, задаваемой неравенствами $2^{x^2} \leq y \leq 3 - \sqrt{\log_2(x+1)}$

Задача 4. Сравнить числа $\sum\limits_{k=1}^{2005}\Big((k-1)^{2005} + k^{2005}\Big)$ и $2 \cdot \dfrac{2005^{2006}}{2006}$.

II–V курс

Задача 1. Найти минимальное значение интеграла $\varphi(t) = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \left|y - x^2 - t\right| \, dx \, dy$.

Задача 2. Решить систему дифференциальных уравнений $\left\{ \begin{array}{l} x' = y^2 + z, \\ z' = z^2 + y \end{array} \right.$ с начальным условием $y(0) = z(0) = 1$.

Задача 3. Выяснить,что является геометрическим местом точек, равноудалённых от двух скрещивающихся прямых.

Задача 4. Вычислить сумму $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{2 - \omega_k}$, где $\omega_k = \exp \dfrac{2\pi k i}{n}$.

Апрель 2004

II–V курс

Задача 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{\sin\pi x}$.

Задача 2. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ — векторы единичной длины, попарно образующие на плоскости равные углы, такие, что $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$. Найти длину вектора $\left[\vec{a},\vec{b}\right]+\left[\vec{c},\vec{d}\right]$.

Задача 3. Решить уравнение $a^x=\log_a x$ при $a=e^{-e}$.

Задача 4. Существует ли функция $f(x)$, взаимно однозначно отображающая отрезок $[0,1]$ на себя и разрывная в каждой точке этого отрезка?

II–V курс

Задача 1. Построить образ единичного круга $|z|\le 1$ при отображении $f(z)=z+|z|$.

Задача 2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{8}{3}\cdot\ldots\cdot\dfrac{3n-1}{n}}$.

Задача 3. Верно ли, что для любой действительной $(n\times n)$ — матрицы A (при $n\ge 2$) матричное уравнение $XAX=A^2$ разрешимо?

Задача 4. Открытым множеством в $\mathbb{R}$ называется объединение (конечного или бесконечного числа) интервалов, замкнутым — дополнением до открытого. Привести пример множества, не являющегося пересечением открытого и замкнутого множеств.

Апрель 2003

I курс

Задача 1. Последовательности (x_n), (y_n) определены рекуррентно: $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 2x_{n+1}^2 + 1$, $y_1 = 1$, $y_{n+1} = 2y_{n+1}^2 + n$. Верно ли, что $x_n \sim y_n$ при $n \to \infty$?

Задача 2. Существует ли функция $f(x)$, дифференцируемая на всей числовой прямой и для всех x, удовлетворяющая равенству $f'(f(x) + f'(x)) = 2x^2$?

Задача 3. Найти размерность пространства многочленов $f(x)$ степени ≤ 8 таких, что $f(x) = f(2 - x)$.

Задача 4. Доказать, что $\int\limits_1^3 t^t dt \geq 7$.

II–V курс

Задача 1. Доказать, что $\arccos\sqrt{1-x} = \sqrt{x}(1 + Cx + o(x))$ при $x \to 0+$, и найти C.

Задача 2. Существует ли такая $(n\times n)$-матрица A (n — фиксированное натуральное число ≥ 2), что для любой $(n\times n)$-матрицы B матричное уравнение $AX+XB^2 = B$ имеет решение?

Задача 3. Чему равно наибольшее количество частей, на которые выпуклый n - угольник разбивается отрезками, соединяющими середины его сторон?

Задача 4. Пусть E — подмножество множества $\mathbb{R}$ такое, что $\forall x, y \;\; x, y \in E \Rightarrow \dfrac{x+y}{2} \in E$. Известно, что $[0,1] \subseteq E$ и $2003 \in E$. Можно ли утверждать, что $[500, 1000] \subseteq E$?

Апрель 2002

I курс

Задача 1. Найти все непрерывные функции $f(x)$ такие,что $f(x) + f(y) = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ при всех $x, y \in \mathbb{R}$.

Задача 2. Написать уравнение эллиптического цилиндра, на поверхности которого лежат окружности $\Gamma_1\colon\ z = 0\,,\ (x-2)^2+y^2 = 1$ и $\Gamma_2\colon\ x = 0\,,\ y^2+(z-2)^2 = 1$.

Задача 3. Существуют ли 2002 различные действительные матрицы $A_1, A_2, \ldots, A_{2002}$ размера 3×3 такие, что $A_i \cdot A_j = A_j$ при всех i, j?

Задача 4. Последовательность (x_n) определена следующим образом: $x_0 = a$, $x_1 = b$, $x_{n+2} = \frac{1}{3}(x_n + x_{n+1})$ при $n \geq 0$. Доказать, что существует $\lim\limits_{n\to 0}(x_n)$, и вычислить его.

II–V курс

Задача 1. Найти все непрерывные функции $y(x)$, удовлетворяющие уравнению $\int\limits_{-x}^{x} ty(t)dt = y(x)+1$.

Задача 2. Существуют ли действительные матрицы A и B размера 2×2 такие, что среди матриц $A, AB, ABA, ABAB, ABABA, \ldots$ ровно 2002 различных?

Задача 3. Функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению $y' = 4\sqrt{y-x^2}$. Известно, что $y(1) = 2$. Вычислить $y(3)$.

Задача 4. Доказать, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{2^{n!}} < 1{,}1$.

Апрель 2001

I курс

Задача 1. Пусть A — квадратная матрица такая, что $A^4 = 0$. Имеет ли решение матричное уравнение $X^3 + X^2 + X = A$?

Задача 2. Последовательность (x_n) задана рекуррентно: $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{6 + \frac{9}{x_n}}$. Доказать, что существует $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)$, и вычислить его.

Задача 3. Найти наибольшую площадь пятиугольника, вписанного в эллипс $x^2 + 2y^2 = 1$.

Задача 4. Вычислите $\int\limits_0^{10} g(x)dx$, где $g(x)$ — функция, обратная к функции $f(x) = x^3 + x$.

II–V курс

Задача 1. Верно ли, что для любой комплексной матрицы A размера 10×10 матричное уравнение $X^2 = A$ имеет решение?

Задача 2. Пусть $F(x) = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2^2}{3\cdot 5}x^5 - \frac{2^3}{3\cdot 5\cdot 7}x^7 + \ldots$. Доказать, что $0 \le F(x) \le x$ при всех x.

Задача 3. Вычислить наименьшее значение $|\cos z|$ в единичном круге $|z| \le 1$.

Задача 4. Найти среднее значение широты точки северного полушария, т.е. величину $\frac{1}{2\pi R^2}\iint\limits_{\Sigma}\theta dS$, где θ — широта, а Σ — полусфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \ge 0$.

Апрель 2000

I курс

Задача 1. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^x-1}{(2x)^x-1}$.

Задача 2. Доказать, что уравнение $x^4+ax^3+bx^2-cx+d=0$ при $a,b,c,d>0$ имеет не более двух положительных корней.

Задача 3. Последовательность (x_n) задана рекуррентно: $x_1=a$, $x_{n+1}=2x_n^2-\ 1\ \ (n\geq 1)$. Указать 5 различных значений a, при каждом из которых последовательность (x_n) имеет предел.

Задача 4. Существует ли 2000 действительных матриц $A_1,A_2,\ldots,A_{2000}$ размера 10×10 таких, что $A_i^2=A_i$ и $A_i\cdot A_j=0$ при $i\neq j$?

II–V курс

Задача 1. Доказать, что $\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}\sim\dfrac{2}{3}n\sqrt{n}$ при $n\to\infty$.

Задача 2. Пусть A – 4×4 матрица ранга 2. Доказать, что существуют 4×4 матрицы B и C ранга 3 такие, что $A=BC$.

Задача 3. Пусть $f(R)=\displaystyle\iiint\limits_{B_R}\frac{dx\,dy\,dz}{1+x^{2000}+y^{2000}+z^{2000}}$, где B_R — шар радиуса R с центром в начале координат. Вычислить $f'''(0)$.

Задача 4. Имеет ли решение уравнение $e^z=z,\ z\in\mathbb{C}$.

Апрель 1999

I курс

Задача 1. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Задача 2. Пусть $l\,(a,b)$ — длина эллипса с полуосями a и b. Докажите, что $l\,(a,b) \geq \pi\,(a+b)$.

Задача 3. Имеется конечное множество матриц $S = A_1, A_2, \ldots, A_n$ размера $n \times n$ такое, что $A_i \cdot A_j \in S$ при всех i, j . Докажите, что существует матрица $A_i \in S$ такая, что $A_i^2 = A_i$.

Задача 4. Вычислите произведение $(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)\ldots(1-\varepsilon_{n-1})$, где $\varepsilon_k = \cos\dfrac{2\pi k}{n} + \ i\sin\dfrac{2\pi k}{n}$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$.

II–V курс

Задача 1. Найдите все функции $f(x)$, удовлетворяющие условию
$f(x) + f'(\pi - x) = 1$ для всех $x \in R$.

Задача 2. Докажите, что число $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n^2}$ иррациональное.

Задача 3. Существует ли ненулевая матрица A размера $n{\times}n$ с действительными коэффициентами такая, что для любой $n \times n-$ матрицы X матрица $E - XA$ невырожденная (здесь E — единичная матрица).

Задача 4. Найдите наибольшее значение $|\sin z|$ в круге $|z| \leq 1$.

Апрель 1998

I курс

Задача 1. Вычислите $\int\limits_1^{5/4} \ln(x+\sqrt{x^2-1})dx$.

Задача 2. Существует ли в трехмерном пространстве треугольник площадью $\sqrt{3}$, вершины которого имеют целочисленные координаты?

Задача 3. Последовательность (a_n) обладает свойствами (1) $\forall n \quad a_n > 0$, (2) $\forall m,n \quad a_{m+n} \leq a_m + a_n$. Доказать, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$.

Задача 4. Найдите наименьшее значение $|z|$, если $|z+i|-|z-i|=1/2$.

II–V курс

Задача 1. Можно ли найти 1998 матриц A размера 12×12, удовлетворяющих уравнению $A^T = 3A - A^{-1}$?

Задача 2. Какие значения принимает $\mathrm{tg} z$, если z — комплексное число?

Задача 3. Последовательность (a_n) удовлетворяет условиям: $a_n > 0$, $a_{m+n} \leq a_m \cdot a_n$ при всех m,n. Докажите, что существует $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

Задача 4. Функция $f(x)$ является решением дифференциального уравнения $y' = (x^2+y^2)^{-1}$ с начальным условием $y(0)=1$. Пусть $y(1)=a$. Выразите через a интеграл $\int\limits_0^1 xy(x)dx$.

Апрель 1997

I курс

Задача 1. Существует ли целочисленная матрица размера 3×3 с определителем, равным 1, все элементы которой по абсолютной величине больше 100?

Задача 2. Найти сотую цифру после запятой в десятичном разложении числа $\left(2+\sqrt{3}\right)^{1997}$.

Задача 3. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{5}+\sqrt[n]{3}-1\right)^{n}$.

Задача 4. Функция $f(x)$ имеет производную при всех $x \geq 1$ и удовлетворяет условию $f(1)=1$, $|f(x)| \leq x^{-1}$ при $x \geq 1$. Доказать, что существует точка a, для которой $f'(a) = -a^{-2}$.

II–V курс

Задача 1. Можно ли функцию Дирихле ($D(x)=1$, если x рационально, и $D(x)=0$, если x иррационально) представить в виде разности двух монотонных функций?

Задача 2. Вычислить сумму $\sum\limits_{n=2}^{\infty} 2^{-n} \sum\limits_{k=1}^{n-1} k^{-1}(n-k)^{-1}$.

Задача 3. Найти все решения уравнения $y'' - 2(1-x^{-1})y' + (1-2x^{-1}) = 0$.

Задача 4. Доказать, что функция $f(z) = e^z - z,\ z \in \mathbb{C}$ не обращается в 0 на единичном круге $|z| \leq 1$.

Апрель 1996

I курс

Задача 1. Разлагается ли многочлен $x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x + 6$ в произведение многочленов меньшей степени с целыми коэффициентами?

Задача 2. Пусть A — матрица $n \times n$ такая, что $A^2 = A$, E — единичная матрица. Доказать, что определитель матрицы $E - A$ равен 0 или 1.

Задача 3. Последовательность (x_n) задана рекуррентно: для $\theta \in [0,1]$ $x_1 = 0$, $x_{n+1} = x_n + 0{,}5(\theta - x_n^2)$ $(n \geq 1)$. Доказать, что существует $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)$, и вычислить его.

Задача 4. Существует ли неотрицательная функция $f(x)$, определенная на множестве $x \geq 0$ и удовлетворяющая для всех $x, y \geq 0$ соотношению $f(x + f(y)) = 1 - \dfrac{1}{(x+1)(y+1)}$?

II–V курс

Задача 1. Пусть A — матрица размера $n \times n$ такая,что $A^2 = 2A$. Какие значения может принимать определитель матрицы $2E - A$? (E — единичная матрица)

Задача 2. Вычислить $\iiint \max(x, y, z)dx\,dy\,dz$, где B — шар единичного радиуса с центром в начале координат.

Задача 3. Функция $y(x)$ непрерывна на отрезке $[0, a]$ и удовлетворяет для всех $x \in [0, a]$ соотношению $y(x) = \dfrac{x^2}{2} + \int\limits_0^x y^2(t)dt$. Доказать, что $a < 5$.

Задача 4. Последовательность задана рекуррентно: $a_0 = 1$,
$a_n = \dfrac{a_{n-1}}{2} - \dfrac{a_{n-2}}{3} + ... + \dfrac{(-1)_n \cdot a_0}{n+1}, (n \geq 1)$. Вычислить сумму $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (для всех $|x| < 1$).