Оглавление

1 Пространство элементарных исходов

1.1 События. Операции над событиями

Случайным событием называют такое событие, которое, с точки зрения ограниченных знаний человека, может произойти или не произойти. Например: „завтра пойдет дождь", „Динамо и Спартак сыграют 2:2", „атом радона распадется за час", „летом никого из группы не отчислят", „в январе будет побит столетний температурный рекорд" и т. п. Далее будем называть случайные события просто **событиями**.

Событие называется **достоверным**, если оно обязательно произойдет; **невозможным**, если не может произойти. Говорят, что событие B **подчинено** событию A, если B происходит только когда происходит A. Например, событие „сыграют 2:2" подчинено событию „сыграют вничью", а событие „никого не отчислят" подчинено событию „отчислят не более двоих".

Два события **несовместны**, если они не могут произойти одновременно.

Событие называется **элементарным**, если не существует подчиненное ему другое возможное событие.

Пример 1. а) Подбросим три монеты. Событие „выпало 3 орла" — элементарное, т. к. оно может произойти одним способом. Событие „выпал 1 орел и 2 решки" — не элементарное: ему подчинено событие „на 1-й монете выпал орел, а на 2-й и 3-й решки".

б) Событие „атом распадется за час" не элементарное, а событие „атом распадется ровно через 48 минут" элементарное.

Таким образом, все возможные события состоят из элементарных событий (исходов), причем два разных элементарных исхода несовместны. Это позволяет нам перевести теорию вероятностей на язык теории множеств.

Пространство элементарных исходов Ω — множество всех возможных элементарных событий, которые могут произойти в результате случайного эксперимента. Любые подмножества $A \subset \Omega$ (включая $\emptyset$ и все Ω) называются событиями.

Операции над событиями соответствуют операциям над множествами:

над множествами		над событиями	
объединение	$A \cup B$	дизъюнкция (A или B)	$A \vee B$
пересечение	$A \cap B$	конъюнкция (A и B)	$A \wedge B = AB$
дополнение	$\Omega \backslash A$	отрицание (не A)	$\overline{A}$
вложение	$B \subset A$	B подчинено A (если B, то A)	$B \Rightarrow A$

Знак конъюнкции, как и знак умножения, часто не пишут. И так же, как умножение приоритетно перед сложением, конъюнкция приоритетна перед дизъюнкцией.

Невозможное событие — это пустое множество $\emptyset$. Все пространство Ω — достоверное событие. Несовместность событий A и B означает, что $AB = \emptyset$. Простейшим соотношениям теории множеств отвечают такие соотношения событий:

$$A\emptyset = \emptyset, \qquad A \vee \emptyset = A, \qquad A\Omega = A, \qquad A \vee \Omega = \Omega,$$

$$AB \Rightarrow A, \qquad A \Rightarrow A \vee B, \qquad \overline{AB} = \overline{A} \vee \overline{B}, \qquad \overline{A \vee B} = \overline{A}\ \overline{B},$$

$$A(B \vee C) = AB \vee AC, \qquad A \vee BC = (A \vee B)(A \vee C),$$

$$\overline{\bigwedge_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigvee_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}, \qquad \overline{\bigvee_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigwedge_{i=1}^{\infty} \overline{A_i},$$

$$\text{если} \quad A \Rightarrow B, \quad \text{то} \quad \overline{B} \Rightarrow \overline{A}.$$

Рассмотрим несколько наглядных примеров пространств элементарных исходов и различных событий в них.

Пример 2. Подбросим игральную кость с числами $1, \ldots, 6$. Выпадение некоторого числа — элементарное событие, и можно отождествить $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Пусть A — событие „выпало четное число”, B — „выпавшее число делится на 3”, C — „выпало 6”. Эти события имеют такую структуру:

$$A = \{2, 4, 6\}, \quad B = \{3, 6\}, \quad C = \{6\};$$

$$AB = C, \quad A \vee B = \{2, 3, 4, 6\}, \quad \overline{A} = \{1, 3, 5\}, \quad \overline{B} = \{1, 2, 4, 5\}.$$

Пример 3. Выстрелим по мишени, которая настолько велика, что попадание в нее — достоверное событие. Элементарные исходы — попадания в конкретные точки, поэтому пространство элементарных исходов можно отождествить с самой мишенью. Если A — попадание в больший круг, B — попадание в меньший круг, то B подчинено A (рис. 1).

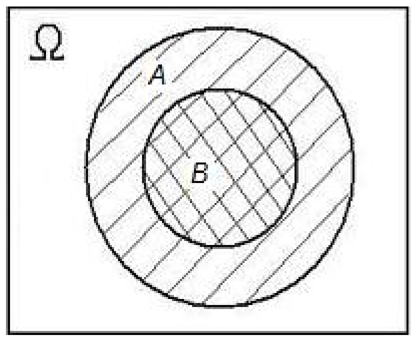

Рис. 1

Пример 4. Подбросим 10 монет. Будем считать, что они пронумерованы. Тогда $\Omega = \{0; 1\}^{10}$, т. е. элементарные исходы обозначены строками из 10 цифр 0 и 1 (0 на k-м месте означает, что k-я монета выпала орлом, 1 — соответственно решкой).

Пример 5. Если нас интересует изменение температуры в течение 24 часов, то в качестве пространства элементарных исходов можно взять постранство функций, непрерывных на отрезке: $\Omega = C[0, 24]$. Пусть событие A — „средняя температура за эти сутки не ниже 0", событие B — „в течение этих суток не было мороза". То есть

$$A = \Big\{x \in \Omega : \int\limits_0^{24} x(t)dt \geq 0\Big\},$$

$$B = \Big\{x \in \Omega : \ \forall\, t \in [0, 24] \ x(t) \geq 0\Big\}.$$

Событие B подчинено событию A.

1.2 Диаграммы Эйлера — Венна

Диаграммой Эйлера — Венна называется схематическое изображение пространства элементарных исходов в виде прямоугольника, где интересующие нас события представлены областями с гладкими границами. Важное условие: на диаграмме должны быть представлены все логические возможности, т. е. если „обведены” события A и B, то должны быть непустые области AB, $A\overline{B}$, $\overline{A}B$ и $\overline{A}\ \overline{B}$; если „обведены” n событий, то все 2^n конъюнкций этих событий и/или их отрицаний должны присутствовать на диаграмме. Как это можно удобно сделать при $n = 2$, 3 и 4, показано на рис. 2 и 3. При бо́льших n пришлось бы делать области невыпуклыми.

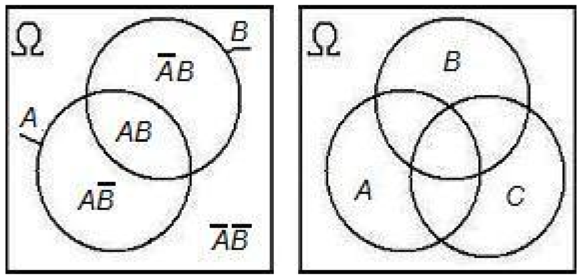

Рис. 2

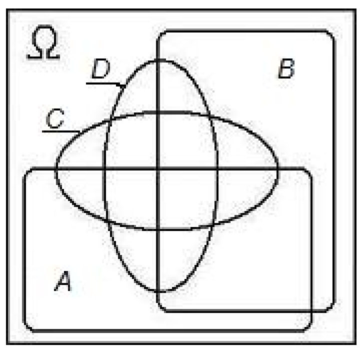

Рис. 3

На рис. 4 показаны простейшие операции над событиями.

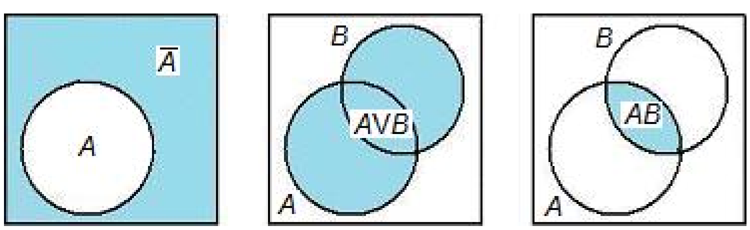

Рис. 4

При помощи диаграмм Эйлера — Венна можно доказывать логические тождества. Например, докажем

$$(A \vee B)(A \vee C) = A \vee BC.$$

В первом ряду диаграмм (рис. 5) событие $(A \vee B)(A \vee C)$ получено пересечением двух областей — оно заштриховано дважды.

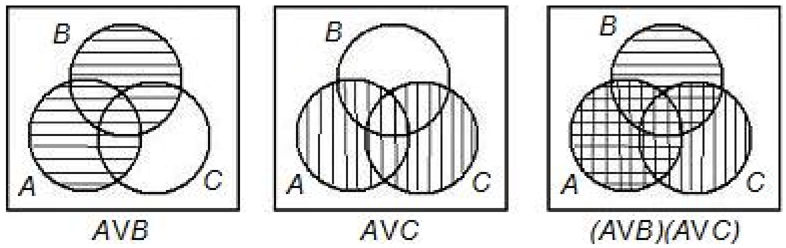

Рис. 5

Во втором ряду (рис. 6) событие $A \vee BC$ получено объединением двух закрашенных областей.

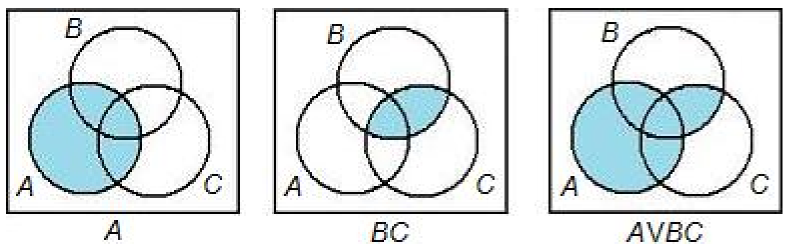

Рис. 6

Пример 6. Изобразить на диаграмме Эйлера — Венна такое событие F: „из 4 событий A, B, C, D произойдут одно или два".

Из 16 конъюнкций $ABCD$, $ABC\overline{D}$, $\ldots$, $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$ событие F включает в себя 10: четыре — с тремя отрицаниями и шесть — с двумя. Закрасим соответствующие области на рис. 7.

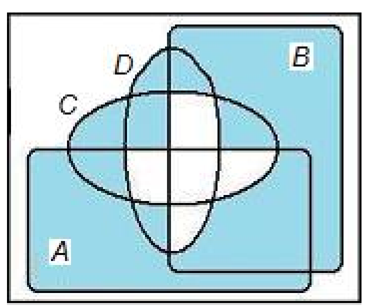

Рис. 7

Пример 7. На остановке стоят две женщины A, B и двое мужчин C, D. Событие „человек сядет в автобус" обозначим той же буквой, что и самого человека. Изобразить на диаграмме Эйлера — Венна событие G: „в автобус сядут больше женщин, чем мужчин".

Если в автобус сядут обе женщины (произойдет AB), то не должны сесть сразу оба мужчины (т. е. должно произойти $\overline{CD}$). Если же сядет одна женщина ($A\overline{B} \vee \overline{A}B$), то ни один мужчина не должен сесть ($\overline{C}\,\overline{D}$).

Случай $\overline{A}\,\overline{B}$ (ни одной женщины) нас не устраивает. Сформулируем событие G и перепишем его в дизъюнктивно-нормальной форме, т. е. в виде дизъюнкции несовместных конъюнкций, и закрасим соответствующую область на рис. 8.

$$G = AB\overline{CD} \vee (A\overline{B} \vee \overline{A}B)\overline{C}\,\overline{D} =$$
$$= AB\overline{C} \vee ABC\overline{D} \vee A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} \vee \overline{A}B\,\overline{C}\,\overline{D}.$$

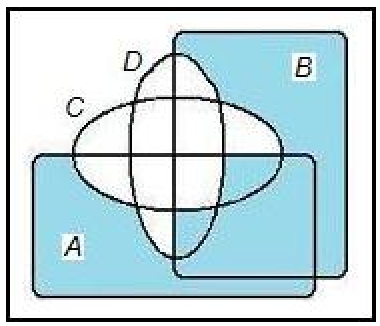

Рис. 8

В том случае, если заведомо не все 2^n различных конъюнкций событий $A_1, \ldots, A_n$ и/или их отрицаний являются возможными событиями, некоторые ячейки диаграммы Эйлера — Венна могут исчезнуть.

Пример 8. Если событие B подчинено событию A, то невозможен случай $\overline{A}B$. Соответствующая область исчезнет, и диаграмма будет выглядеть как мишень на рис. 1.

Пример 9. Падают два камня, каждый попадет в один из трех ящиков A, B, C. Событие „в ящике окажется хотя бы один камень" обозначим той же буквой, что и ящик. Тогда невозможны случаи ABC и $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$. Диаграмма Эйлера — Венна редуцируется, как показано на рис. 9.

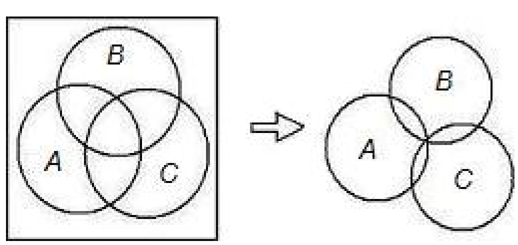

Рис. 9

1.3 Основные принципы комбинаторики

Задача комбинаторики — вычислить, сколькими способами можно выполнить некоторое действие. Вот несколько примеров задач комбинаторики:

1. Сколькими способами можно положить разноцветный куб на квадратный стол такого же размера? Ответ: 24 (внизу может оказаться любая из 6 граней, спереди — любая из 4 соседних).

2. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 ферзей, не угрожающих друг другу? Ответ: 92 (получен компьютерным перебором).

3. Сколько натуральных делителей имеет число n? Если $n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$ — разложение на простые множители, то ответ известен из курса алгебры: $(1 + k_1) \cdot \ldots \cdot (1 + k_m)$.

Основные принципы комбинаторики — принципы сложения и умножения — позволяют находить число способов выполнения сложного действия, если такие числа изестны для более простых действий.

Принцип сложения. Если некоторое действие можно выполнить k взаимно исключающими путями: 1-м путем n_1 способами, ..., k-м путем n_k способами, то общее число способов выполнить данное действие составляет

$$N = n_1 + \ldots + n_k.$$

Например, если у человека есть 3 шапки, 2 шляпы и 4 кепки, то он может выбрать головной убор $3 + 2 + 4 = 9$ способами.

Принцип умножения. Если можно выполнить 1-е действие n_1 способами; при каждом способе его выполнения можно выполнить 2-е действие n_2 способами; ..., наконец, при каждом способе выполнения первых $k - 1$ действий можно выполнить k-е действие n_k способами, то можно выполнить сразу все k действий

$$N = n_1 \cdot \ldots \cdot n_k \qquad \text{способами.}$$

Например, если у человека 9 головных уборов, 5 пар обуви и 4 куртки, то он может одеться и обуться $9 \cdot 5 \cdot 4 = 180$ разными способами.

Принцип умножения применим и при $k = 0$: произведение 0 сомножителей равно 1, что соответствует очевидному факту: бездействовать можно только 1 способом.

Хотя принципы сложения и умножения вполне очевидны, важно научиться грамотно применять их и не путать один с другим. Рассмотрим примеры, где применяются оба принципа.

Пример 10. На реке один остров, с которого 3 моста ведут на северный берег и 2 — на южный; кроме того, есть 2 моста напрямую с одного берега реки на другой (рис. 10). Сколькими способами можно пройти с северного берега реки на южный? Возвращаться на берег, на котором уже побывали, нельзя.

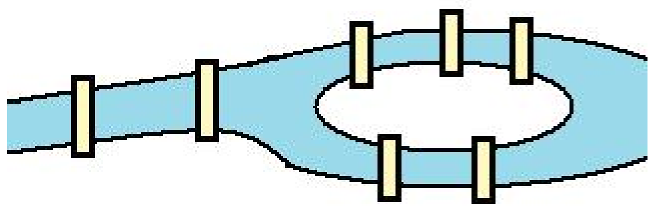

Рис. 10

Есть два взаимоисключающих пути: (1) через остров, (2) не через остров.

(1) Можно 3 способами выбрать мост через северный проток и независимо от этого 2 способами выбрать мост через южный проток. По принципу умножения получается $3 \cdot 2$ способов.

(2) Можно 2 способами выбрать мост через всю реку.

Теперь применяем принцип сложения : (1) + (2).

Ответ: $3 \cdot 2 + 2 = 8$ способов.

Пример 11. В ящике 2 красных, 3 желтых и 4 зеленых шара, они пронумерованы. Сколькими способами можно взять 2 шара разных цветов?

Есть три взаимоисключающих пути: взять красный и желтый ($2 \cdot 3$ способов), красный и зеленый ($2 \cdot 4$ способов), или желтый и зеленый ($3 \cdot 4$ способов).

Ответ: $2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 26$ способов.

Следующий пример более хитрый.

Пример 12. Сколькими способами можно расставить на пустой шахматной доске 8 ладей так, чтобы все пустые клетки были под ударом?

Для этого необходимо и достаточно, чтобы стояло по ладье либо в каждой вертикали, либо в каждой горизонтали. Но эти две ситуации не являются взаимоисключающими! Придется рассмотреть три типа позиций, примеры которых даны на рис. 11.

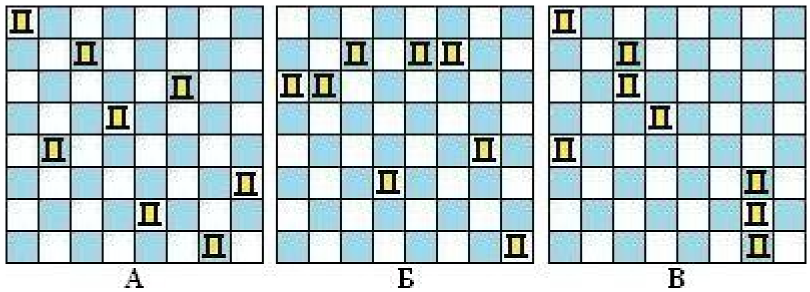

Рис. 11

А: и в каждой вертикали, и в каждой горизонтали по 1 ладье. Поскольку во всех вертикалях надо ставить ладьи на разных ординатах, сделать это можно 8! способами.

Б: в каждой вертикали по 1 ладье, но в некоторых горизонталях ладей нет. Таких способов расстановки ладей будет $8^8 - 8!$ Действительно, ординаты 8 ладей выбираются независимо каждая из 8 возможных, но потом надо исключить позиции, попавшие в „А”.

В: в каждой горизонтали по 1 ладье, но в некоторых вертикалях их нет. Число таких позиций также $8^8 - 8!$ (аналогично).

Итого

$$8! + 2(8^8 - 8!) = 2 \cdot 8^8 - 8! = 33\,514\,112 \text{ способов.}$$

Пример 13. Остров, в центре которого круглое озеро, разделен на 4 страны, каждая имеет выход к морю и к озеру. Сколькими способами можно раскрасить карту острова (граничащие страны не должны быть одного цвета), если имеются n красок?

Занумеруем страны по часовой стрелке (рис. 12). Сначала покрасим страны 1 и 3.

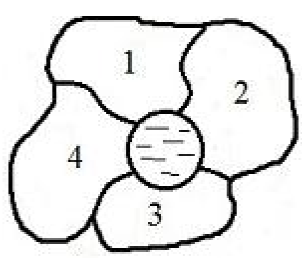

Рис. 12

1-й путь: есть n способов покрасить 1 и 3 в один цвет, после чего страны 2 и 4 независимо одна от другой красятся в любой из $n-1$ цветов, так что 1-й путь дает $N_1 = n(n-1)^2$ вариантов раскраски.

2-й путь: есть $n(n-1)$ способов покрасить 1 и 3 в разные цвета, после чего 2 и 4 независимо одна от другой красятся в любой из $n-2$ оставшихся цветов, следовательно, 2-й путь дает $N_2 = n(n-1)(n-2)^2$ вариантов.

Наконец, применим принцип сложения. Ответ:

$$N = N_1 + N_2 = n(n-1)(n^2 - 3n + 3) \text{ способов.}$$

1.4 Числа перестановок, сочетаний и размещений

Рассмотрим несколько стандартных ситуаций, часто встречающихся в комбинаторике, и связанные с ними числа.

Число перестановок n элементов.

Сколькими способами можно расставить n различимых элементов на n местах? Другими словами: сколько различных биекций возможны между двумя n-элементными множествами? Решение: 1-й элемент ставим на любое из n мест, затем 2-й элемент на любое из $n-1$ оставшихся мест, затем 3-й элемент — на любое из $n-2$ оставшихся мест, ..., наконец, последний элемент на последнее свободное место. По принципу умножения число способов равно

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Например, 10 зрителей могут сесть на 10 местах в кинозале 10!=3 628 800 способами! Можно почти 10 000 лет каждый день ходить в кино и садиться по-разному.

Число перестановок с повторениями.

Сколькими способами можно расставить на n местах n элементов, среди которых есть k_1 одинаковых, $\ldots, k_m$ одинаковых? Решим задачу так: пометим одинаковые элементы, чтобы временно сделать их разными. Имеем $n!$ различных расстановок меченых элементов. Однако, после удаления меток многие расстановки станут одинаковыми. А именно, каждой расстановке немеченых элементов соответствуют $k_1! \cdot \ldots \cdot k_m!$ расстановок меченых, поскольку k_1 меченых элементов первого повторяющегося вида можно $k_1!$ способами расставить на тех местах, которые занимают элементы этого вида в немеченой расстановке; независимо от них меченые элементы второго вида можно $k_2!$ способами расставить на их местах, и т. д.; применяем принцип умножения. Таким образом, в списке $n!$ меченых расстановок каждая немеченая расстановка представлена $k_1! \cdot \ldots \cdot k_m!$ раз. Следовательно, число перестановок с повторениями равно

$$\frac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_m!} \tag{1}$$

Пример 14. Число перестановок букв *КОЛОБОК*. Имеем $k_1 = 2$, $k_2 = 3$. Пометив одинаковые буквы: $К_1О_1ЛО_2БО_3К_2$, получим число перестановок $7! = 5040$. Но после удаления меток оно уменьшится в $2! \cdot 3!$ раз.

Ответ: $7!/2!3! = 420$.

Пример 15. Сколькими способами можно переставить буквы О, Л, И, М, П, И, А, Д, А так, чтобы не было идущих подряд в таком порядке букв Л, И, П, А ?

Среди данных 9 букв две пары одинаковых, поэтому число перестановок $\frac{9!}{2!2!} = 90\,720$. Фрагмент слова „ЛИПА" может начинаться с 1-го, 2-го,...,6-го места, а оставшиеся 5 букв (все разные) можно расставить на оставшихся местах 5! способами. Так что число запрещенных перестановок составляет $6 \cdot 5! = 720$.

Ответ: $90\,000$.

Число сочетаний из n по k, $\quad 0 \le k \le n$.
Сколькими способами можно из n различимых элементов выбрать k шт. (неважно, в каком порядке)? Другими словами: сколько различных k-элементных подмножеств имеет n-элементное множество? Число сочетаний из n по k равно

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n+1-k)}{k!}. \tag{2}$$

Эту формулу можно вывести из частного случая формулы (1). Пусть n элементов выписаны в ряд. Пометим единицами те k элементов, которые мы выберем, и нулями — остальные. Таким образом установлена биекция между множеством k-элементных подмножеств и множеством всех строк, состоящих из k единиц и $n-k$ нулей, т. е. перестановок n цифр, среди которых есть k одинаковых и $n-k$ одинаковых. Покажем, как это выглядит при $n = 4$, $k = 2$ (выбираем 2 из 4 элементов a, b, c, d):

$$\begin{array}{ll}
\{a,b\} \leftrightarrow 1100 & \{b,c\} \leftrightarrow 0110 \\
\{a,c\} \leftrightarrow 1010 & \{b,d\} \leftrightarrow 0101 \\
\{a,d\} \leftrightarrow 1001 & \{c,d\} \leftrightarrow 0011
\end{array}$$

Получаем $C_4^2 = 6$.

Если требуется найти много чисел сочетаний, можно использовать рекуррентную формулу

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}, \qquad 0 \le k < n.$$

Согласно этой формуле строится треугольник Паскаля — таблица чисел сочетаний, в ней каждое число равно сумме вышестоящего и выше-левеестоящего. Треугольная форма таблицы обусловлена тем, что $0 \le k \le n$.

$k =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
$n = 0$	**1**										
$n = 1$	**1**	**1**									
$n = 2$	**1**	**2**	**1**								
$n = 3$	**1**	**3**	**3**	**1**							
$n = 4$	**1**	**4**	**6**	**4**	**1**						
$n = 5$	**1**	**5**	**10**	**10**	**5**	**1**					
$n = 6$	**1**	**6**	**15**	**20**	**15**	**6**	**1**				
$n = 7$	**1**	**7**	**21**	**35**	**35**	**21**	**7**	**1**			
$n = 8$	**1**	**8**	**28**	**56**	**70**	**56**	**28**	**8**	**1**		
$n = 9$	**1**	**9**	**36**	**84**	**126**	**126**	**84**	**36**	**9**	**1**	
$n = 10$	**1**	**10**	**45**	**120**	**210**	**252**	**210**	**120**	**45**	**10**	**1**
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Очевидны соотношения $C_n^0 = C_n^n = 1$ (ничего не взять или все взять можно одним способом) и $C_n^{n-k} = C_n^k$ (выбрать, какие элементы берем, можно столькими же способами, что и выбрать, какие элементы не берем).

Пример 16. Сколько целых неотрицательных решений имеет диофантово уравнение $x_1 + \ldots + x_k = s$? Сколько натуральных решений имеет это уравнение?

Запишем $x_1, \ldots, x_k$ в виде последовательности 0 и 1 следующим образом: вместо x_i будем писать x_i единиц, если $x_i \ge 1$, и ничего не будем писать, если $x_i = 0$. Для разграничения записи x_i и x_{i+1} между соответствующими им единицами будем писать ноль. Получим последовательность вида

$$\underbrace{11\ldots1}_{x_1}0\underbrace{11\ldots1}_{x_2}0\ldots0\underbrace{1\ldots1}_{x_k},$$

в которой ровно s единиц и $k-1$ ноль. Число разных таких последовательностей C_{s+k-1}^s и будет равно числу различных целых неотрицательных решений уравнения $x_1 + \ldots + x_k = s$. Теперь посмотрим, сколько будет целых *положительных* решений. Пусть $y_i = x_i - 1, i = 1, \ldots, k$. Тогда исходное уравнение эквивалентно $y_1 + \ldots + y_k = s - k$. Так как все $y_i \ge 0$, то число решений будет равно $C_{s-k+k-1}^{s-k} = C_{s-1}^{s-k}$.

Пример 17. 12 туристов остановились на привал. Нужно послать троих за водой и четверых за дровами. Сколькими способами их можно выбрать?

Троих из 12 можно выбрать C_{12}^3 способами. При любом результате этого выбора можно будет выбрать 4 из 9 оставшихся C_9^4 способами. По принципу умножения получим

$$N = C_{12}^3 \cdot C_9^4 = \frac{12!}{3!9!} \cdot \frac{9!}{4!5!} = \frac{12!}{3!4!5!} = 27\,720.$$

Другой способ решения: расположив туристов в алфавитном порядке, обозначить „1" тех, кто пойдет за водой, „2" — за дровами, „3" — остающихся. Число различных строк из 12 цифр, среди которых 3, 4 и 5 одинаковых, равно $\dfrac{12!}{3!4!5!}$.

Число размещений из n по k, $\quad 0 \le k \le n$.
Сколькими способами можно из n различимых элементов выбрать k, учитывая порядок? Число размещений из n по k равно

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n+1-k).$$

Эта формула также выводится из (1). Пусть n элементов выписаны в ряд. Пометим номерами от 1 до k те k элементов, которые мы выберем, и нулями — остальные. Таким образом установлена биекция между множеством размещений из n по k и множеством всех строк, состоящих из цифр от 1 до k и $n-k$ нулей, т. е. перестановок n цифр, среди которых только $n-k$ одинаковых.

1.5 Вычисление вероятностей путем подсчета числа возможностей

Рассмотрим самую простую вероятностную модель — конечное пространство элементарных исходов с равными вероятностями

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}, \qquad \mathbf{P}(\omega_j) = 1/N.$$

Если A — событие, т. е. подмножество Ω, состоящее из M элементарных исходов, то очевидно

$$\mathbf{P}(A) = M/N.$$

В параграфе 2.1 будет показано, что такое „интуитивное" определение $\mathbf{P}$ правомерно с точки зрения современного аппарата теории верятностей.

Исходы $\omega \in M$ будем называть **благоприятными** (для A), а исходы $\omega \notin M$ — неблагоприятными. Таким образом, вычисление вероятности сводится к комбинаторике.

Пример 18. Даны карточки с буквами Т,Р,О,П,И,К. Из них случайно вытаскивают три карточки. С какой вероятностью получится слово КИТ, если:

(а) карточки наклеивают одну за другой,

(б) карточки можно менять местами?

В случае (а) число элементарных исходов (очевидно, равновероятных) равно числу размещений $N = A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$; благоприятный исход только один. Получаем $\mathbf{P} = 1/120$.

В случае (б) благоприятных исходов 6, так как нужные карточки могут выйти в 3! разных последовательностях. Получаем $\mathbf{P} = M/N = 6/120 = 1/20$. Поскольку в случае (б) не важна последовательность вытаскивания карточек, можно рассмотреть другую вероятностную модель: считать элементарными исходами все сочетания из 6 по 3, тогда $N = C_6^3 = 20$, благоприятный исход один, и опять получаем $\mathbf{P} = 1/20$.

Пример 19. В ящике n белых, n синих и n красных шаров. Найти вероятность P_n того, что три случайно вынутых шара окажутся разных цветов.

Имеем $N = C_{3n}^3$; M вычисляется по принципу умножения, поскольку белый, красный и синий шары выбирают независимо. Вероятность того, что три шара окажутся разноцветными, равна

$$P_n = \frac{M}{N} = \frac{(C_n^1)^3}{C_{3n}^3} = \frac{n^3 3!}{3n(3n-1)(3n-2)} = \frac{2n^2}{(3n-1)(3n-2)}$$

Имеем $P_1 = 1$, далее P_n убывает, стемясь к $2/9$ при $n \to \infty$.

Пример 20. Шестнадцать борцов соревнуются по системе play-off (рис. 13). Победившему в финале присуждается I место, побежденному в финале — II место. Какова вероятность того, что II место присудят справедливо?

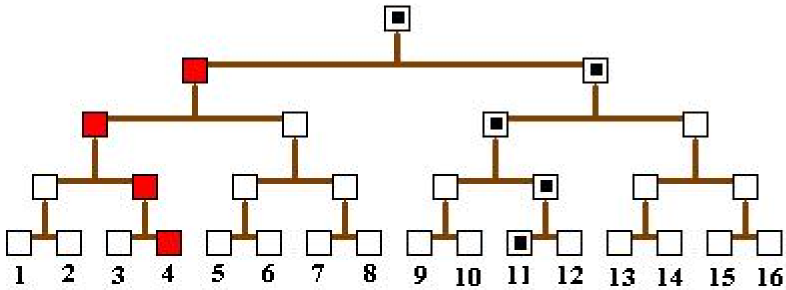

Рис. 13

Чтобы второй по силе борец получил II место, он должен встретиться в финале с победителем. Для этого необходимо и достаточно, чтобы при жеребьевке они оказались в разных половинах списка. Число возможных результатов жеребьевки есть $N = 16!$ Число благоприятных исходов $M = 16 \cdot 8 \cdot 14!$, так как победителю достается любой номер, второму по силе — номер из другой половины (из восьми), а остальные 14 номеров достаются остальным. Получаем

$$\mathbf{P} = \frac{M}{N} = \frac{16 \cdot 8 \cdot 14!}{16!} = \frac{8}{15} \approx 53\%.$$

Пример 21. На пустую шахматную доску поставили 8 ладей. Найти вероятность того, что все пустые клетки окажутся под ударом.

Число равновероятных элементарных исходов N равно числу сочетаний из 64 по 8. Число благоприятных исходов M было вычислено в примере 12. Получаем

$$\mathbf{P} = \frac{M}{N} = \frac{2 \cdot 8^8 - 8!}{C_{64}^8} = \frac{33\,514\,112}{64 \cdot \ldots \cdot 57/8!} \approx 0{,}76\%.$$

Пример 22. Вечером встретились 5 хамелеонов разных цветов. За ночь каждый поменял свой цвет на один из 4 других, выбирая цвета с равными вероятностями и независимо от других хамелеонов. Найти вероятность того, что утром эти 5 хамелеонов вновь окажутся разных цветов.

Число всех равновероятных исходов $N = 4^5 = 1024$. Число благоприятных исходов M равно числу тех перестановок 5 элементов, которые не имеют неподвижных точек. Известно, что любая перестановка распадается на циклы; для перестановок 5 элементов длины этих циклов могут быть такими:

$$\left.\begin{array}{r} 3+2 \\ 5 \end{array}\right\} \text{ нет неподвижных точек,}$$

$$\left.\begin{array}{r} 1+1+1+1+1 \\ 2+1+1+1 \\ 2+2+1 \\ 3+1+1 \\ 4+1 \end{array}\right\} \text{ есть неподвижные точки.}$$

Число перестановок типа 3+2 равно $C_5^3 \cdot 2 = 20$ (выбираем, какие 3 элемента образуют 3-цикл, и в каком направлении он „крутится"); число циклических перестановок 5 элементов равно $4! = 24$, поскольку элемент a можно считать 1-м в цикле, а остальные занимают в цикле произвольные места. Итак, число благоприятных исходов $M = 44$.

Ответ: $\mathbf{P} = \dfrac{44}{1024} = \dfrac{11}{256} \approx 4{,}3\%$.

Математические модели многих практических задач связаны со следующей схемой. Пусть r частиц размещаются по n ячейкам, и все их размещения равновозможны (схема случайных размещений). При этом частицы могут быть как различимыми, так и неразличимыми, а также возможны какие-то ограничения на число частиц в ячейке. Эти модели тесно связаны с реальными явлениями. Так, например, схема с различимыми частицами без ограничений на их количество в ячейке хорошо описывает поведение молекул (статистики Максвелла — Больцмана). Модель с неразличимыми частицами справедлива для фотонов и атомных ядер (статистики Бозе — Эйнштейна). Модель с ограничениями (не более одной частицы в ячейке) описывает поведение электронов или протонов (статистики Ферми — Дирака).

Схему размещения частиц по ячейкам можно интерпретировать как последовательный выбор ячейки для каждой частицы. Так, например, различимым частицам без ограничений на их число в ячейке соответствует модель упорядоченного выбора с возвращением.

Пример 23. Пусть 8 частиц размещаются по 7 ячейкам. Найдем вероятность того, что ровно 2 ячейки окажутся пустыми (событие A), считая, что все возможные размещения частиц равновероятны.

Рассмотрим две ситуации: с различимыми и неразличимыми частицами.

а) Частицы неразличимы. Результат размещения неразличимых частиц можно представить в виде вектора $(r_1, \ldots, r_7)$, где r_j — число частиц, попавших в j-ю ячейку. Числа $r_1, \ldots, r_7$ при этом удовлетворяют естественным ограничениям

$$r_1 + \ldots + r_7 = 8, \quad r_1 \geq 0, \ldots, r_7 \geq 0.$$

Таких разных наборов $(r_1, \ldots, r_7)$ окажется $N = C^8_{7+8-1} = C^8_{14}$ (см. пример 16). Благоприятными исходами для события A будут такие наборы $(r_1, \ldots, r_7)$, в которых ровно 2 элемента равны 0, а остальные не меньше 1. Например, $r_1 = r_2 = 0$, тогда

$$r_3 + \ldots + r_7 = 8, \quad r_3 \geq 1, \ldots, r_7 \geq 1.$$

Положим $t_3 = r_3 - 1, \ldots, t_7 = r_7 - 1$. Получим уравнение, $t_3 + \ldots + t_7 = 3$, эквивалентное исходному. Число его целых неотрицательных решений равно $C^3_{5+3-1} = C^3_7$. Теперь заметим, что выбрать 2 пустые ячейки можно C^2_7 способами. Поэтому $M = C^2_7 C^3_7$. Получаем

$$\mathbf{P} = \frac{M}{N} = \frac{C^2_7 C^3_7}{C^8_{14}} = \frac{21 \cdot 35}{3003} \approx 24{,}5\%.$$

б) Частицы различимы. Число исходов равно числу способов выбора ячейки для каждой частицы независимо: $N = 7^8$. Для вычисления числа благоприятных исходов M заметим, что возможные числа заполнений ячеек, для которых ровно 2 ячейки остались пустыми, описываются одним из следующих наборов:

$$\begin{aligned} A &= \{0, 0, 4, 1, 1, 1, 1\}; \\ B &= \{0, 0, 3, 2, 1, 1, 1\}; \\ C &= \{0, 0, 2, 2, 2, 1, 1\}. \end{aligned}$$

Начнем со случая A. Выберем 2 ячейки, которые будут пустыми, и одну ячейку, в которой будет 4 частицы. Это можно сделать $C^2_7 C^1_5$ способами. Затем из 8 частиц выбираем 4, которые будут лежать вместе, C^4_8 способами. Остается заметить, что оставшиеся частицы (которые лежат по одной) можно переставить между собой 4! способами. Значит, в случае A число благоприятных исходов будет

$$M_A = C^2_7 C^1_5 C^4_8 4! = 21 \cdot 5 \cdot 70 \cdot 24 = 176\,400.$$

В случае B опять выбираем 2 пустые ячейки и по одной ячейке с 3 и 2 частицами $C^2_7 C^1_5 C^1_4$. Дальше выбираем по 3 и 2 частицы, которые положим в соответствующие ячейки, $C^3_8 C^2_5$ способами и умножаем на число перестановок оставшихся 3 частиц между собой. Таким образом, число благоприятных исходов будет

$$M_B = C^2_7 C^1_5 C^1_4 C^3_8 C^2_5 3! = 21 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 56 \cdot 10 \cdot 6 = 1\,411\,200.$$

Аналогично, в случае C получим, что

$$M_C = C_7^2 C_5^3 C_8^2 C_6^2 C_4^2 2! = 21 \cdot 10 \cdot 28 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 2 = 1\,058\,400.$$

Так как случаи A, B и C несовместны, то

$$M = M_A + M_B + M_C; \quad \mathbf{P}(A \vee B \vee C) = \frac{M}{N} = \frac{2\,646\,000}{5\,764\,801} \approx 46\%.$$

Задачи по теме главы 1

1.1. Подбросили 4 монеты: 1, 2, 5 и 10 рублей. Обозначим C_m событие „монета m рублей выпала решкой". Выразить через события C_1, C_2, C_5, C_{10} сложное событие T: „сумма выпавших решек делится на 3". Построить диаграмму Эйлера — Венна для события T.

1.2. При помощи диаграмм Эйлера — Венна доказать тождество

$$A(B \vee C) = AB \vee AC.$$

1.3. На рис. 14 показана электрическая схема с пятью выключателями A, B, C, D, E.

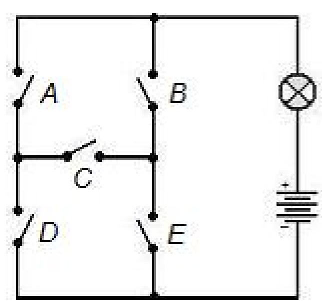

Рис. 14

Событие „такой-то выключатель включен" обозначим той же буквой. Выразить через события A, B, C, D, E сложное событие F: „лампа включена".

1.4. Для события F из задачи 1.3 нарисовать „двухслойную" диаграмму Эйлера — Венна (две 16-клеточные диаграммы — для случаев C и $\overline{C}$).

1.5. Записать формулами сложные события, представленные диаграммами на рис. 15.

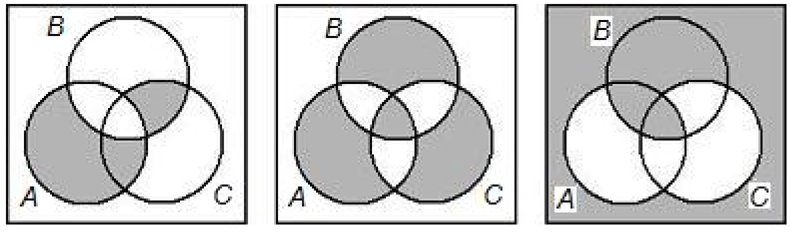

Рис. 15

1.6. Кубическая коробка собирается из 6 квадратных досок, у каждой на одной стороне написан номер. Сколькими способами можно собрать куб так, чтобы все номера оказались снаружи?

1.7. Даны две плиты 2×1 и две плиты 1×1. Сколькими способами можно замостить ими площадку 3×2? Рассмотреть такие варианты условий:
а) плиты бесцветные,
б) каждая плита покрашена в свой цвет с обеих сторон,
в) каждая плита покрашена в свой цвет с одной стороны,
г) на одной стороне каждой плиты написан номер.

1.8. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске $n \times n$ двух коней — черного и белого так, чтобы они угрожали друг другу?

1.9. Сколькими способами можно разделить 12 человек на две хоккейные команды „А" и „Б" и назначить в них вратарей?

1.10. На трех игральных костях выпали цифры от 1 до 6: на первой x, на второй y, на третьей z. Найти $\mathbf{P}\{x \le y \le z\}$.

1.11. Пять белых и десять черных шаров случайным образом разложили в ряд. Найти вероятность того, что никакие два белых шара не окажутся лежащими рядом.

1.12. Найти вероятность того, что при случайной перестановке букв в слове „запретен" получится „незаперт".

1.13. Найти вероятность того, что 4 случайно выбранные вершины куба лежат в одной плоскости.

1.14. В левом ящике по 2 белых, синих и красных шарика, в правом — по 3 таких же. Берем из левого ящика 1 шарик, из правого 2 шарика. С какой вероятностью они будут разных цветов?

1.15. В ящике лежат 8 пар туфель. Наудачу взяли 7 туфель. Найти вероятность того, что среди них а) не будет парных; б) окажется ровно две пары.

1.16. 10 различимых частиц равновероятно размещаются по 9 ячейкам. Найти вероятность того, что будут хотя бы 2 пустые ячейки.

1.17. 8 неразличимых частиц равновероятно размещается по 5 ячейкам. Найти вероятность того, что не будет пустых ячеек.

2 Вероятностное пространство

2.1 Аксиомы вероятностного пространства

Для различных стохастических ситуаций можно строить разнообразные вероятностные модели: алгебраические, геометрические и т. п. Но лучше иметь единый подход на все случаи. Рассмотрим общее понятие вероятностного пространства, введенное Андреем Николаевичем Колмогоровым.

Определение 1. Вероятностным пространствомназывается тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, где
$\Omega \neq \emptyset$ — **пространство элементарных исходов**;
$\mathcal{F}$ — класс подмножеств Ω, являющийся **σ-алгеброй**, т. е.
1) $\emptyset$, $\Omega \in \mathcal{F}$,
2) для каждого $A \in \mathcal{F}$ имеем $\overline{A} = \Omega \backslash A \in \mathcal{F}$,
3) для $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ $\quad \bigvee\limits_{k=1}^{N} A_k \in \mathcal{F}, \quad \bigwedge\limits_{k=1}^{N} A_k \in \mathcal{F}, \quad N \leq \infty$;

$\mathbf{P}$ — **вероятностная мера**, т. е. функция $\mathbf{P} : \mathcal{F} \mapsto [0,1]$, $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$, $\mathbf{P}(\Omega) = 1$, обладающая **счетной аддитивностью:**

$$\text{если } A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F},\ A_j A_k = \emptyset, \text{ то } \mathbf{P}\Big(\bigvee_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_k).$$

Класс множеств $\mathcal{F}$ называется **σ-алгеброй событий**, множества $A \in \mathcal{F}$ — **событиями**. Таким образом, для каждого события определена вероятность. Счетная аддитивность означает, что если дано конечное или счетное множество попарно несовместных событий, то вероятность их дизъюнкции (т. е. вероятность того, что произойдет хотя бы одно из этих событий) равна сумме их вероятностей.

Из аддитивности вероятности вытекают соотношения

$$\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A); \qquad \mathbf{P}(B) \leq \mathbf{P}(A) \text{ если } B \Rightarrow A.$$

Кроме того, из счетной аддитивности вытекают следующие свойства вероятностной меры, называемые *непрерывностью сверху* и *непрерывностью снизу*:

$$\begin{aligned} &\text{если} \quad A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \ldots, \quad \bigvee_{k=1}^{\infty} A_k = A, \\ &\text{или} \quad A_1 \Leftarrow A_2 \Leftarrow \ldots, \quad \bigwedge_{k=1}^{\infty} A_k = A, \quad \text{то } \lim_{k\to\infty} \mathbf{P}(A_k) = \mathbf{P}(A). \end{aligned}$$

Вероятностное пространство Ω называют **дискретным**, если оно конечно или счетно. В этом случае $\mathcal{F}$ содержит все подмножества Ω. Пусть

$$\Omega = \{\omega_k\}_{k=1}^N, \qquad N \le \infty.$$

Определены вероятности элементарных исходов, при этом

$$\sum_{k=1}^{N} \mathbf{P}(\omega_k) = \mathbf{P}(\Omega) = 1. \tag{3}$$

Вероятностная мера, благодаря счетной аддитивности, задается вероятностями элементарных исходов:

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbf{P}(\omega). \tag{4}$$

Случай конечного Ω с одинаковыми вероятностями элементарных исходов рассмотрен в параграфе 1.5, в этом случае формула (4) сводится к формуле $\mathbf{P}(A) = M/N$, где M — мощность множества A, а N — мощность Ω. Элементарные исходы в такой модели в просторечии называют „шансами".

В случае счетного Ω вероятности элементарных исходов не могут быть одинаковыми, так как ряд (3) сходится.

Если пространство элементарных исходов имеет мощность континуум, то не всегда возможно задать вероятность на всех его подмножествах, т. е. σ-алгебра событий $\mathcal{F}$ может оказаться меньше, чем множество всех подмножеств Ω. Однако, существование подмножеств, для которых вероятность невозможно определить, не приводит к трудностям, поскольку такие подмножества неконструктивны (так сложно устроены, что на практике мы с ними не столкнемся).

Если Ω — метрическое пространство (отрезок, прямая, квадрат, куб, $C[a, b]$ и т. п.), то обычно берут σ-алгебру, содержащую все открытые множества (а следовательно, и все замкнутые).

Пример 24. На $\Omega = [0, 1]$ положим $\mathbf{P}([0, b)) = b$ при $0 \le b \le 1$. Вычислим $\mathbf{P}([a, b])$ при $0 \le a \le b < 1$. При малых $\varepsilon > 0$ имеем

$$[0, b)\backslash[0, a) \subset [a, b] \subset [0, b + \varepsilon)\backslash[0, a),$$

следовательно,

$$b - a \le \mathbf{P}([a, b]) \le (b + \varepsilon) - a,$$

и в силу произвольности ε получаем $\mathbf{P}([a,b]) = b - a$. В частности, вероятность отдельной точки равна 0, т. е. любой элементарный исход имеет нулевую вероятность! Противоречия в этом нет: вероятностная мера счетно аддитивна, но отрезок — несчетное множество.

2.2 Вычисление вероятностей сложных событий

Если A и B — два события, то все пространство элементарных исходов распадается на 4 несовместных события (см. рис. 16):

$$\Omega = AB \vee A\overline{B} \vee \overline{A}B \vee \overline{A}\ \overline{B}$$

(некоторые из них могут быть невозможными, например, если A и B несовместны, то невозможно AB).

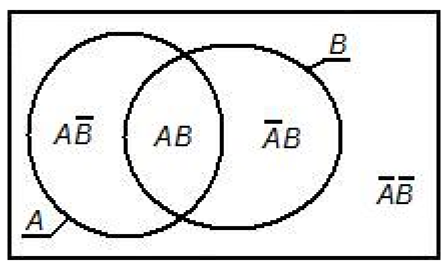

Рис. 16

Из аддитивности вероятности получаются соотношения

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A) &= \mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(A\overline{B}),\\ \mathbf{P}(B) &= \mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(\overline{A}B),\\ \mathbf{P}(A \vee B) &= \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB).\end{aligned}$$

Смысл последней формулы: чтобы вычислить вероятность „A или B", надо сложить вероятности A и B, а потом вычесть вероятность AB, так как она была посчитана дважды. Аналогичные формулы известны для дизъюнкции многих событий:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A \vee B \vee C) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) -&\\ - \mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(AC) - \mathbf{P}(BC) + \mathbf{P}(ABC);&\end{aligned}$$

$$\mathbf{P}\Big(\bigvee_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{m=1}^{n}\bigg((-1)^{m-1}\sum_{1\le k_1<\ldots<k_m\le n}\mathbf{P}(A_{k_1}\ldots A_{k_m})\bigg). \qquad (5)$$

Можно доказать формулу (5) без диаграммы Эйлера — Венна, используя **индикаторные функции**: пусть

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases}$$

Очевидны соотношения

$$\mathbf{P}(A) = \int\limits_{\Omega} \mathbf{1}_A(\omega) d\mathbf{P}, \qquad \mathbf{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbf{1}_A, \qquad \mathbf{1}_{AB} = \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B.$$

Индикаторная функция дизъюнкции n событий $D = \bigvee\limits_{k=1}^{n} A_k$:

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_D = 1 - \mathbf{1}_{\overline{D}} = 1 - \mathbf{1}_{\overline{A}_1 \ldots \overline{A}_n} = 1 - \mathbf{1}_{\overline{A}_1} \cdot \ldots \cdot \mathbf{1}_{\overline{A}_n} = \\ = 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - \mathbf{1}_{A_k}) = 1 - \sum_{m=0}^{n} \left((-1)^m \sum_{1 \le k_1 < \ldots < k_m \le n} \prod_{i=1}^{m} \mathbf{1}_{A_{k_i}} \right) = \\ = \sum_{m=1}^{n} \left((-1)^{m-1} \sum_{1 \le k_1 < \ldots < k_m \le n} \mathbf{1}_{A_{k_1} \ldots A_{k_m}} \right). \end{aligned}$$

Интеграл $\mathbf{1}_D$ по вероятностной мере равен правой части (5).

Пример 25. Пусть $\mathbf{P}(A) = 0{,}7$, $\mathbf{P}(B) = 0{,}6$, $\mathbf{P}(C) = 0{,}5$, $\mathbf{P}(AB) = 0{,}4$, $\mathbf{P}(AC) = 0{,}3$, $\mathbf{P}(BC) = 0{,}2$, $\mathbf{P}(ABC) = 0{,}1$. Найти вероятность события F, означающего, что произойдет ровно одно из событий A, B, C.

Запишем интересующее нас событие в дизъюнктивно-нормальной форме: $F = A\overline{B}\,\overline{C} \vee \overline{A}B\overline{C} \vee \overline{A}\,\overline{B}C$. Из диаграммы на рис. 17 видно, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(F) = \mathbf{P}(A \vee B \vee C) - \mathbf{P}(AB \vee AC \vee BC) = \\ = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(AC) - \mathbf{P}(BC) + \mathbf{P}(ABC) - \\ - \big(\mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(AC) + \mathbf{P}(BC) - 2\mathbf{P}(ABC)\big) = \\ = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - 2\big(\mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(AC) + \mathbf{P}(BC)\big) + 3\mathbf{P}(ABC). \end{aligned}$$

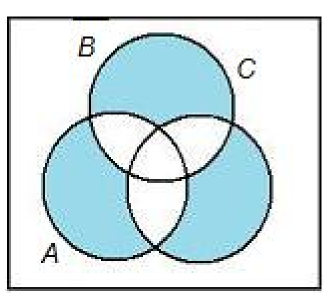

Рис. 17

Получаем

$$\mathbf{P}(F) = 0{,}7 + 0{,}6 + 0{,}5 - 2(0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}2) + 3 \cdot 0{,}1 = 0{,}3.$$

Теперь рассмотрим пример применения формулы (5).

Пример 26. Некто написал n писем и случайным образом разложил их по n заранее надписанным конвертам. Найти вероятность того, что хотя бы один адресат получит предназначенное ему письмо.

Все $N = n!$ раскладов писем равновероятны. Обозначим через A_i событие „i-е письмо оказалось в своем конверте". Число благоприятных исходов равно $(n-1)!$, так как i-е письмо лежит в своем конверте, а остальные письма располагаются произвольно.

$$\mathbf{P}(A_i) = \frac{M}{N} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

Для события A_iA_j число благоприятных исходов $(n-2)!$, так как i-е и j-е письма лежат в своих конвертах, а остальные располагаются произвольно.

$$\mathbf{P}(A_iA_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}.$$

Аналогично

$$\mathbf{P}(A_{i_1} \ldots A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{A_n^k}.$$

Вычислим искомую вероятность по формуле (5):

$$\mathbf{P}\big(A_1 \vee \ldots \vee A_n\big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} \mathbf{P}(A_iA_j) + \\ + \sum_{1 \le i < j < k \le n} \mathbf{P}(A_iA_jA_k) - \ldots + (-1)^{n-1}\mathbf{P}(A_1 \ldots A_n) = \\ = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} C_n^k \frac{1}{A_n^k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k!}.$$

Эта сумма является частичной суммой ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k!} = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = 1 - e^{-1},$$

так что при $n \to \infty$ найденная вероятность очень быстро сходится к числу $1 - e^{-1} \approx 0{,}632$.

2.3 Условные вероятности

Зафиксируем случайное событие C, $0 < \mathbf{P}(C) < 1$, связанное с некоторым случайным экспериментом.

Если мы не знаем, произошло оно или нет, то вычисляли вероятности различных событий A, B, …, связанные с тем же случайным экспериментом, не имея никакой дополнительной информации.

Если мы знаем, что в результате эксперимента C произошло, т. е. C стало достоверным событием, то как изменятся вероятности событий A, $B, \ldots$? Достоверное событие охватывает все пространство исходов, так что переход от ситуации неопределенности „произойдет ли C" к ситуации „C произойдет" означает сужение пространства исходов, как показано на рис. 18:

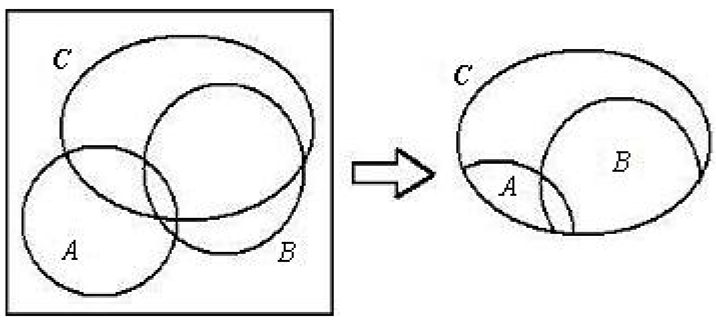

Рис. 18

Поскольку $\mathbf{P}(C) < 1$, в этом новом пространстве придется перенормировать вероятность, чтобы $\mathbf{P}(C) = 1$: все вероятности событий, подчиненных C, разделим на $\mathbf{P}(C)$.

Определение 2. Пусть $0 < \mathbf{P}(C) < 1$. **Условной вероятностью** события A при условии C называется

$$\mathbf{P}(A|C) = \frac{\mathbf{P}(AC)}{\mathbf{P}(C)}.$$

Пример 27. Подбросили две игральные кости. Рассматриваем событие A: „сумма выпавших цифр равна 6". Найти безусловную вероятность A и вероятность A при условии C: „произведение выпавших цифр превысит 8".

Даже если кости одинаковы, мы должны их различать. По принципу умножения имеются $6 \cdot 6 = 36$ элементарных исходов, очевидно, равновероятных. Пространство Ω удобно представить в виде квадратной таблицы из 36 одинаковых клеток (рис. 19), тогда вероятность будет пропорциональна площади.

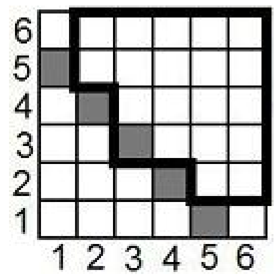

Рис. 19

На этом рисунке событие A закрашено, а событие C обведено. Если пользоваться классическим определением вероятности, то

$$\mathbf{P}(A|C) = \frac{1}{20} = 5\%.$$

Тот же ответ мы получим, если воспользуемся определением условной вероятности:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{5}{36} \approx 14\%;$$

$$\mathbf{P}(C) = \frac{20}{36}, \quad \mathbf{P}(AC) = \frac{1}{36} \implies \mathbf{P}(A|C) = \frac{1/36}{20/36} = 5\%.$$

В данном примере осуществление события C изменило вероятность события A. Но бывает и так, что условная вероятность совпадает с безусловной, т. е. одно событие не влияет на вероятность другого. Возможны пять случаев влияния C на A:

1) $\mathbf{P}(A|C) = 0$ — события A и C несовместны,
2) $0 < \mathbf{P}(A|C) < \mathbf{P}(A)$ — отрицательная зависимость,
3) $\mathbf{P}(A|C) = \mathbf{P}(A)$ — независимость (см. определение 3),
4) $\mathbf{P}(A) < \mathbf{P}(A|C) < 1$ — положительная зависимость,
5) $\mathbf{P}(A|C) = 1$ — событие A достоверно при C.

Приведем пример, в котором встретятся все пять случаев.

Пример 28. В ящике 4 белых и 4 черных шарика. Одновременно, не глядя, один шарик берет мышь, а четыре — обезьяна. Рассмотрим событие A: „мышь возьмет белый шарик" и пять взаимоисключающих событий C_k, где $k = 0, \ldots, 4$: „среди шариков, взятых обезьяной, окажутся k черных". Очевидно, $\mathbf{P}(A) = 1/2$. Условные же вероятности такие:

$$\mathbf{P}(A|C_0) = 0, \quad \mathbf{P}(A|C_1) = \frac{1}{4}, \quad \mathbf{P}(A|C_2) = \frac{1}{2},$$

$$\mathbf{P}(A|C_3) = \frac{3}{4}, \quad \mathbf{P}(A|C_4) = 1.$$

Бывают и такие ситуации, когда условные вероятности известны, а безусловную вероятность приходится вычислять через них. Например, если несколько событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ происходят последовательно, и мы знаем вероятность очередного события при условии осуществления всех предыдущих, то можно вычислить вероятность конъюнкции всех этих событий по **формуле умножения**

$$\mathbf{P}(A_1 \ldots A_n) = \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(A_2|A_1) \cdot \\ \cdot \mathbf{P}(A_3|A_1A_2) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}(A_n|A_1 \ldots A_{n-1}). \quad (6)$$

Пример 29. Даны карточки с буквами А, Б, Р, А, К, А, Д, А, Б, Р, А. Из них случайно вытаскивают 4 карточки и наклеивают одну за другой. С какой вероятностью получится слово АРКА?

Можно решать таким же способом, как пример 18, но поступим по-другому. Обозначим через L_k событие „на k-й раз вышла буква L". Вычисляем по формуле умножения:

$$\mathbf{P}(\mathrm{А}_1\mathrm{Р}_2\mathrm{К}_3\mathrm{А}_4) = \\ = \mathbf{P}(\mathrm{А}_1) \cdot \mathbf{P}(\mathrm{Р}_2|\mathrm{А}_1) \cdot \mathbf{P}(\mathrm{К}_3|\mathrm{А}_1\mathrm{Р}_2) \cdot \mathbf{P}(\mathrm{А}_4|\mathrm{А}_1\mathrm{Р}_2\mathrm{К}_3) = \\ = \frac{5}{11} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{198} \approx 0{,}5\%.$$

Пример 30. Пусть каждый 20-й из слышащих людей является носителем гена глухоты (гг). Найти вероятность того, что ребенок слышащих родителей окажется глухим.

Поскольку гг — рецессивный ген (глухим будет только обладатель пары таких генов), событие „ребенок окажется глухим" равно конъюнкции следующих 4 событий: A: мать — носитель гг, B: отец — носитель гг, C: от матери ребенок унаследует гг, C: от отца ребенок унаследует гг. По общей формуле (6) получаем

$$\mathbf{P}(ABCD) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B|A)\mathbf{P}(C|AB)\mathbf{P}(D|ABC).$$

В данном примере формула несколько упрощается: события A и B независимы благодаря запрету родственных браков; очевидно, что событие C зависит только от A, а D — только от B. Получаем

$$\mathbf{P}(ABCD) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C|A)\mathbf{P}(D|B) = \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{1600}.$$

2.4 Независимость событий

Мы привыкли называть независимыми такие события, которые не могут повлиять одно на другое. Например: результаты выпадения разных игральных костей, завтрашний дождь и падение метеорита, расклад гадальных карт и успех задуманного дела. Но в теории вероятностей нам понадобится чисто математическое определение независимости событий.

Определение 3. События A и B **независимы**, если

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B). \tag{7}$$

Событие с вероятностью 0 или 1 независимо с любым событием. В иных случаях условие (7) равносильно каждому из четырех равенств

$$\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A), \quad \mathbf{P}(A|\overline{B}) = \mathbf{P}(A),$$

$$\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B), \quad \mathbf{P}(B|\overline{A}) = \mathbf{P}(B).$$

Пример 31. (а) Подбросили две игральные кости. События A: „на первой выпадет 1" и B: „на второй выпадет 2" независимы, поскольку $\mathbf{P}(A) = 1/6$, $\mathbf{P}(B) = 1/6$, $\mathbf{P}(AB) = 1/36$. Впрочем, их независимость очевидна и из физических соображений.

(б) Подбросили одну кость. События A: „выпадет четное число" и B: „выпадет число, делящееся на 3" независимы, поскольку $\mathbf{P}(A) = 1/2$, $\mathbf{P}(B) = 1/3$, $\mathbf{P}(AB) = 1/6$. Да, с точки зрения определения 3 они независимы, хотя порождены одним и тем же опытом.

Дадим определение независимости произвольного (конечного или счетного) набора событий.

Определение 4. События $A_1, A_2, A_3, \ldots$ независимы, если для всякого конечного набора номеров $k_1 < \ldots < k_m$

$$\mathbf{P}(A_{k_1} \ldots A_{k_m}) = \mathbf{P}(A_{k_1}) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}(A_{k_m}).$$

Поскольку $\mathbf{P}(A_1 \ldots A_m\overline{B}) = \mathbf{P}(A_1 \ldots A_m) - \mathbf{P}(A_1 \ldots A_m B)$, получаем, что независимость набора событий остается в силе, если некоторые из этих событий заменить их отрицаниями.

Пример 32. Три стрелка A, B, C одновременно выстрелили в мишень. Стрелок A попадает с вероятностью 0,5; B — с вероятностью 0,3; C — с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что хоть кто-то попал.

Попадание стрелка обозначим той же буквой. Имеем $\mathbf{P}(A) = 0{,}5$, $\mathbf{P}(B) = 0{,}3$, $\mathbf{P}(C) = 0{,}2$, события независимы. Следовательно, их отрицания также независимы. Получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A \vee B \vee C) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}) = \\ = 1 - \mathbf{P}(\overline{A})\mathbf{P}(\overline{B})\mathbf{P}(\overline{C}) = 1 - \big(1 - \mathbf{P}(A)\big)\big(1 - \mathbf{P}(B)\big)\big(1 - \mathbf{P}(C)\big) = \\ = 1 - 0{,}5 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 1 - 0{,}28 = 72\%.\end{aligned}$$

Из независимости набора событий следует их попарная независимость. Но обратное неверно.

Пример 33. Подбросим две монеты и рассмотрим три события:
A: „на первой монете выпадет орел",
B: „на второй монете выпадет орел",
C: „две монеты выпадут одинаковой стороной".
Тогда

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(C) = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(AC) = \mathbf{P}(BC) = \frac{1}{4},$$

так что три события попарно независимы. Однако

$$\mathbf{P}(ABC) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2},$$

так что три события вместе не будут независимы.

Интересное обобщение этого примера предложено в задаче 2.13.

2.5 Системы гипотез, формулы полной вероятности и Байеса

Определение 5. События $\{H_k\}_{k=1}^{N}$, $N \le \infty$, образуют **полную группу** (полную систему гипотез), если обязательно произойдет ровно одно из них, т. е.

$$\bigvee_{k=1}^{N} H_k = \Omega, \qquad H_k H_j = \emptyset.$$

Тогда аддитивность вероятности дает соотношения

$$\sum_{k=1}^{N} \mathbf{P}(H_k) = 1, \qquad \forall\, A \in \mathcal{F} \ \ \mathbf{P}(A) = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{P}(AH_k),$$

наглядно показанные на рис. 20.

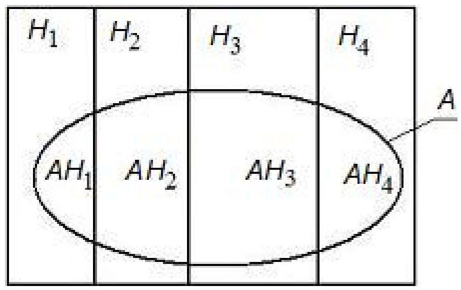

Рис. 20

Формула полной вероятности позволяет вычислить вероятность события, если известны его вероятности при условиях всех гипотез: если события $\{H_k\}_{k=1}^{N}$, $N \leq \infty$, образуют полную группу, то

$$\mathbf{P}(AH_k) = \mathbf{P}(H_k)\,\mathbf{P}(A|H_k); \quad \mathbf{P}(A) = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{P}(H_k)\,\mathbf{P}(A|H_k). \qquad (8)$$

Пример 34. В ящике 1 черный и 3 белых шара. Кроме того, имеются 4 коробки: в одной белый шар, в одной черный, две пустые (рис. 21). Добавляем содержимое одной случайно выбранной коробки в ящик. Затем достаем из ящика один шар. С какой вероятностью он окажется белым?

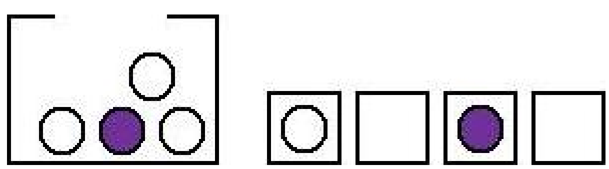

Рис. 21

Имеем полную группу событий: H_1 — „добавили белый шар”, H_2 — „добавили черный шар”, H_3 — „не добавили шар”. Их вероятности

$$\mathbf{P}(H_1) = \mathbf{P}(H_2) = \frac{1}{4}, \quad \mathbf{P}(H_3) = \frac{1}{2}.$$

Интересующее нас событие A имеет условные вероятности

$$\mathbf{P}(A|H_1) = \frac{4}{5}, \quad \mathbf{P}(A|H_2) = \frac{3}{5}, \quad \mathbf{P}(A|H_3) = \frac{3}{4}.$$

По формуле (8) получаем

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = 0{,}725.$$

Пример 35. Подводная лодка атакует корабль, пуская независимо одна от другой n торпед. Каждая торпеда попадает в корабль с вероятностью p, с одинаковой вероятностью в каждый из k отсеков. Корабль тонет, если поражено не менее двух отсеков. Найти вероятность того, что корабль будет потоплен.

Пусть H_m — гипотеза „в корабль попало m торпед"; событие A — „корабль потоплен". События $H_0, H_1, \ldots, H_n$ образуют полную группу, их вероятности находим по формуле Бернулли (см. параграф 3.5)

$$\mathbf{P}(H_m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}.$$

Очевидно, $\mathbf{P}(A|H_0) = 0$. При $m \geq 1$ корабль не тонет, если все торпеды попали в один отсек, значит

$$\mathbf{P}(A|H_m) = 1 - k\left(\frac{1}{k}\right)^m = 1 - k^{1-m}.$$

Действительно, $(1/k)^m$ — вероятность попасть все эти m раз в какой-то один отсек; $k(1/k)^m$ — попасть m раз в любой отсек. Значит, полная вероятность затопления

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{m=1}^{n} \mathbf{P}(H_m)\,\mathbf{P}(A|H_m) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} (1 - k^{1-m}) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} - k \sum_{m=1}^{n} C_n^m \left(\frac{p}{k}\right)^m (1-p)^{n-m} =$$

$$= 1 - (1-p)^n - k\left(\left(\frac{p}{k} + 1 - p\right)^n - (1-p)^n\right).$$

Пример 36. Решив при помощи монеты, кто выстрелит первым, Печорин и Грушницкий стреляют по очереди до первого попадания. Печорин попадает с вероятностью $1/2$, Грушницкий — с вероятностью $1/3$. Найти вероятность события A — победы Печорина.

Поскольку монета симметрична, вероятности обеих гипотез H_1 „Печорин стреляет первым" и H_2 „Грушницкий стреляет первым" равны $1/2$.

Пусть $P_1 = \mathbf{P}(A|H_1)$. Первый выстрел принесет Печорину победу с вероятностью $1/2$, второй — поражение с вероятностью $(1-1/2)\cdot 1/3 = 1/6$, а с вероятностью $(1-1/2)(1-1/3) = 1/3$ оба промахнутся, и поединок фактически начнется заново. Получим соотношение

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}P_1 = P_1, \quad \text{следовательно,} \quad P_1 = \frac{3}{4}.$$

Пусть $P_2 = \mathbf{P}(A|H_2)$. Первый выстрел поразит Печорина с вероятностью $1/3$, второй выстрел принесет ему победу с вероятностью $(1-1/3)\cdot 1/2 = 1/3$, а с вероятностью $(1-1/3)(1- -1/2) = 1/3$ оба промахнутся, и поединок фактически начнется заново. Получаем соотношение

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3}P_2 = P_2, \quad \text{следовательно,} \quad P_2 = \frac{1}{2}.$$

Итоговая вероятность равна

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(H_1)\mathbf{P}(A|H_1) + \mathbf{P}(H_2)\mathbf{P}(A|H_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{8}.$$

Теперь рассмотрим другой тип задач. Пусть известны вероятности гипотез, образующих полную группу, и вероятности события A при условии каждой гипотезы. Мы хотим узнать, как изменятся вероятности гипотез, если станет известно, что событие A произошло. Из формулы (8) получаем **формулу Байеса**:

$$\mathbf{P}(H_k|A) = \frac{\mathbf{P}(AH_k)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(H_k)\,\mathbf{P}(A|H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{N}\mathbf{P}(H_i)\,\mathbf{P}(A|H_i)} \tag{9}$$

Пример 34 (продолжение). В ящике 1 черный и 3 белых шара, рядом 4 коробки: в одной белый шар, в одной черный, две пустые. Добавляем содержимое одной коробки в ящик. Затем достаем из ящика один шар, он оказался белым. С какой вероятностью была взята коробка с черным шаром (гипотеза H_2)?

По формуле Байеса получаем

$$\mathbf{P}(H_2|A) = \frac{\mathbf{P}(H_2)\mathbf{P}(A|H_2)}{\mathbf{P}(H_1)\mathbf{P}(A|H_1)+\mathbf{P}(H_2)\mathbf{P}(A|H_2)+\mathbf{P}(H_3)\mathbf{P}(A|H_3)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}} = \frac{0{,}15}{0{,}725} \approx 21\% < \mathbf{P}(H_2).$$

Пример 28 (продолжение). В ящике 4 белых и 4 черных шарика. Мышь берет один, обезьяна — четыре. События C_k, $k = 0, \dots, 4$: „из шариков, взятых обезьяной, k черных” образуют полную систему. Вычислим их вероятности, временно забыв мышь. Взять 4 шарика из 8 можно $C_8^4 = 70$ равновероятными способами. При этом k черных и $4 - k$ белых можно выбрать, $C_4^k\, C_4^{4-k} = (C_4^k)^2$ способами (принцип умножения). Получаем

$$\mathbf{P}(C_0) = \mathbf{P}(C_4) = \frac{1}{70}; \quad \mathbf{P}(C_1) = \mathbf{P}(C_3) = \frac{16}{70}; \quad \mathbf{P}(C_2) = \frac{36}{70}.$$

Рассмотрим событие A: „мышь возьмет белый шарик”. Его условные вероятности при разных гипотезах:

$$\mathbf{P}(A|C_0) = 0; \quad \mathbf{P}(A|C_1) = \frac{1}{4}; \quad \mathbf{P}(A|C_2) = \frac{1}{2};$$

$$\mathbf{P}(A|C_3) = \frac{3}{4}; \quad \mathbf{P}(A|C_4) = 1.$$

Посмотрим, как изменятся вероятности гипотез, если событие A произойдет. Его полная вероятность

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{k=0}^{4} \mathbf{P}(C_k)\mathbf{P}(A|C_k) =$$

$$= 0 + \frac{16}{70}\cdot\frac{1}{4} + \frac{36}{70}\cdot\frac{1}{2} + \frac{16}{70}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{70}\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(C_0|A) = 0,\\
&\mathbf{P}(C_1|A) = \frac{16}{70}\cdot\frac{1}{4}/\,\mathbf{P}(A) = \frac{4}{35} < \mathbf{P}(C_1),\\
&\mathbf{P}(C_2|A) = \frac{36}{70}\cdot\frac{1}{2}/\,\mathbf{P}(A) = \frac{18}{35} = \mathbf{P}(C_2),\\
&\mathbf{P}(C_3|A) = \frac{16}{70}\cdot\frac{3}{4}/\,\mathbf{P}(A) = \frac{12}{35} > \mathbf{P}(C_3),\\
&\mathbf{P}(C_4|A) = \frac{1}{70}\cdot 1/\,\mathbf{P}(A) = \frac{1}{35} > \mathbf{P}(C_4).
\end{aligned}$$

Пример 37. Три стрелка A, B, C одновременно выстрелили в мишень. A попадает с вероятностью 0,5; B — с вероятностью 0,3; C — с вероятностью 0,2. Было одно попадание. Найти вероятности того, чья это пуля.

Есть три гипотезы: $H_1 = A\overline{B}\,\overline{C}$, $H_2 = \overline{A}B\overline{C}$, $H_3 = \overline{A}\,\overline{B}C$. Но чтобы получить полную группу событий, к ним надо добавить фиктивную гипотезу H_4: „число попаданий отличается от 1” (рис. 22).

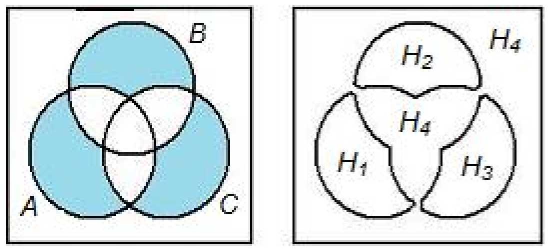

Рис. 22

При гипотезах H_1, H_2, H_3 событие D (ровно одно попадание) достоверно, а при гипотезе H_4 невозможно. Априорные вероятности гипотез таковы:

$$\mathbf{P}(H_1) = \mathbf{P}(A)(1 - \mathbf{P}(B))(1 - \mathbf{P}(C)) = 0{,}5 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}28,$$
$$\mathbf{P}(H_2) = (1 - \mathbf{P}(A))\mathbf{P}(B)(1 - \mathbf{P}(C)) = 0{,}5 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}12,$$
$$\mathbf{P}(H_3) = (1 - \mathbf{P}(A))(1 - \mathbf{P}(B))\mathbf{P}(C) = 0{,}5 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}07.$$

Про формуле (8) получаем

$$\mathbf{P}(D) = \mathbf{P}(H_1) \cdot 1 + \mathbf{P}(H_2) \cdot 1 + \mathbf{P}(H_3) \cdot 1 + \mathbf{P}(H_4) \cdot 0 = 0{,}47;$$

$$\mathbf{P}(H_1|D) = \frac{\mathbf{P}(H_1) \cdot 1}{\mathbf{P}(D)} = \frac{0{,}28}{0{,}47} \approx 60\% \qquad (\text{попал } A),$$

$$\mathbf{P}(H_2|D) = \frac{\mathbf{P}(H_2) \cdot 1}{\mathbf{P}(D)} = \frac{0{,}12}{0{,}47} \approx 25\% \qquad (\text{попал } B),$$

$$\mathbf{P}(H_3|D) = \frac{\mathbf{P}(H_3) \cdot 1}{\mathbf{P}(D)} = \frac{0{,}07}{0{,}47} \approx 15\% \qquad (\text{попал } C).$$

Еще несколько примеров на применение формулы Байеса будут рассмотрены в параграфе 3.5.

2.6 Геометрические вероятности

Во многих задачах вероятностное пространство отождествимо с некоторым геометрическим объектом. Простейшие примеры: мишень (куда попадет пуля), рулетка (на какой угол повернется). Соответственно, события можно отождествить с частями эти объектов: областями мишени, секторами рулетки и т. п.

Для правильного решения задач геометрической вероятности необходимо знать распределение вероятности. Например, меткий стрелок вероятнее попадет в маленький центральный круг, чем в большое внешнее кольцо, так что у него вероятностная мера не пропорциональна площади.

Следующий пример показывает, к чему может привести нечеткость постановки задачи.

Пример 38. (Парадокс Бертрана). В круге радиуса 1 взяли случайную хорду AB (рис. 23, слева). Какова вероятность того, что ее длина меньше 1?

(1) Пусть A и B независимо и равномерно распределены на окружности. Тогда угол $\angle AOB$ равномерно распределен на $(0, \pi)$. Событие „$AB < 1$" совпадает с событием „$\angle AOB < \pi/3$", его вероятность $1/3$.

(2) Если середина хорды M равномерно распределена внутри круга, событие „$AB < 1$" означает, что $OM > r = \sqrt{3}/2$, вероятность этого события (непопадания M в круг радиуса r) равна $1 - \pi r^2/\pi = 1/4$.

(3) Пусть расстояние от центра до хорды, т. е. OM, равномерно распределено на $(0, 1)$, а угол φ ее поворота равномерно распределен на $[0, 2\pi)$. Тогда событие „$AB < 1$" означает $OM > r$, вероятность этого равна $1 - r \approx 0{,}134$.

На самом деле это не парадокс, а три разные задачи! В качестве пространства элементарных исходов возьмем прямоугольник

$$\Omega = [0, 2\pi) \times (0, 1) = \{(\rho, \varphi) : \ 0 \le \varphi < 2\pi, 0 < \rho < 1\},$$

где (ρ, φ) — полярные координаты точки M (рис. 23, справа).

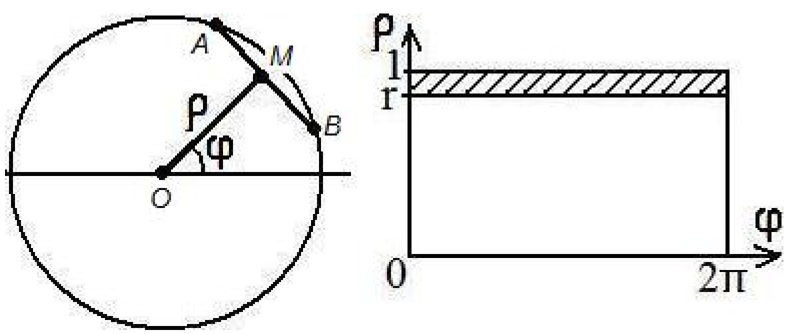

Рис. 23

Указанным трем подходам соответствуют разные вероятностные меры на Ω:

$$d\mathbf{P}_1 = \frac{d\rho d\varphi}{\pi^2\sqrt{1-\rho^2}}, \qquad d\mathbf{P}_2 = \frac{\rho\, d\rho d\varphi}{\pi}, \qquad d\mathbf{P}_3 = \frac{d\rho d\varphi}{2\pi}.$$

Интересующее нас событие (на рисунке заштриховано) имеет во всех трех случаях разные вероятности.

Как говорил П.Л.Чебышёв, правильно поставить задачу — значит наполовину ее решить!

Пример 39. Метеор прилетел со стороны пояса Ориона. Предположим, что он упадет на Землю, и что его скорость намного больше 2-й космической, так что земное притяжение мало искривит его траекторию. С какой вероятностью он упадет севернее 30^o с.ш.?

Было бы ошибкой считать точку падения метеора равномерно распределенной по поверхности Земли. Спроецируем Землю на плоскость, перпендикулярную скорости метеора (пояс Ориона расположен примерно в плоскости экватора Земли, так что картина будет несложной, см. рис. 24):

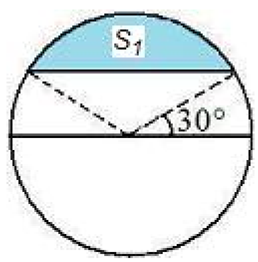

Рис. 24

Возможные траектории метеора отобразятся в точки, равномерно распределенные по кругу площади $S = \pi R^2$. Область севернее 30^o с.ш. изобразится сегментом площади S_1. Получаем

$$\mathbf{P} = \frac{S_1}{S} = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2/\pi R^2 = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \approx 19{,}6\%,$$

хотя данная область составляет $1/4$ поверхности Земли.

Еще один пример на геометрические вероятности (пример 59) будет рассмотрен в главе о непрерывных случайных величинах.

Задачи по теме главы 2

2.1. Пусть в электрической схеме на рис. 14 каждый из 5 выключателей, независимо от других, включен с вероятностью p. С какой вероятностью включена лампа?

2.2. Даны вероятности: $\mathbf{P}(A) = 0{,}3$, $\mathbf{P}(B) = 0{,}6$, $\mathbf{P}(C) = 0{,}7$, $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(AC) = 0{,}2$, $\mathbf{P}(BC) = 0{,}45$, $\mathbf{P}(ABC) = 0{,}15$. Найти вероятности событий, представленных диаграммами на рис. 15.

2.3. При параллельном включении реле надежность блока из реле повышается. Сколько реле нужно взять, чтобы надежность блока была равна 0,999, если надежность отдельного реле (вероятность срабатывания при сигнале) равна 0,8 ?

2.4. На карточках написаны числа от 1 до 12. Из них случайно выбрали три карточки.

а) Найти вероятность того, что наименьшее из выбранных чисел не больше 3.

б) Найти вероятность того же события при условии, что наибольшее из выбранных чисел равно 8.

2.5. На пустую шахматную доску случайно поставили белого коня и черного короля. Найти вероятность того, что белый конь оказался в центральном квадрате 4×4, при условии, что он объявил шах (рис.25).

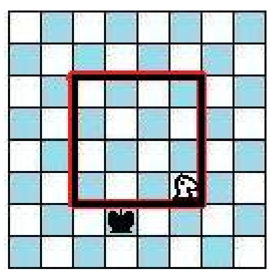

Рис. 25

2.6. Подбросили 4 игральные кости: две белых и две серых. Сумма на белых и сумма на серых совпали. Найти вероятность того, что эта сумма меньше 5.

2.7. Из урны, содержащей 3 белых и 7 черных шаров, три игрока по очереди вытаскивают по одному шару с возвращением. Выигрывает тот игрок, который первым вынет белый шар. Найти вероятность выигрыша для каждого из игроков.

2.8. Игральную кость бросают 8 раз подряд. Найти вероятность того, что появилось не менее двух шестерок, если известно, что

а) шестерка выпала при пятом броске;

б) шестерка выпала хотя бы один раз.

2.9. У куба одна грань красная и одна (смежная с ней) синяя. Куб положили в темноте на полку. Зависимы ли события „красная грань окажется сверху” и „синяя грань окажется спереди”?

2.10. Бросили две игральные кости, на них выпали цифры X и Y. Зависимы ли события „$X+Y$ делится на 3” и „$X-Y$ делится на 3”?

2.11. Точка случайно бросается на отрезок [0,1]. Обозначим через ξ_1 и ξ_2 первый и второй знаки после запятой в десятичной записи координаты этой точки. Зависимы ли события $\{\xi_1 = k\}$ и $\{\xi_2 = m\}$ при $k, m = 0, 1, \ldots, 9$?

2.12. Некто взглянул на цифровые часы. Пусть τ — число секунд на часах (от 0 до 59). Независимы ли три события: „τ делится на 3", „τ делится на 4" и „τ делится на 5"?

2.13. Подбрасывают n различных монет. Рассмотрим $n+1$ случайных событий:

A_k: „на k-й монете выпал орел", $k = 1, \ldots, n$,

A_{n+1}: „выпало четное число орлов".

Доказать, что эти события зависимы, но любые n из них независимы.

2.14. В первой урне было 2 белых и 4 черных шара, во второй 4 белых и 3 черных. Из первой урны наудачу выбирают 2 шара и перекладывают во вторую. Найти вероятность вытянуть из второй урны белый шар.

2.15. По самолету дают 4 независимых выстрела, вероятность попадания в каждом из которых равна 0,3. Самолет поражается с вероятностью 1, если в него попало не менее 2 снарядов, и с вероятностью 0,6, если попал только один снаряд. Какова вероятность того, что в самолет попал только один снаряд, если самолет сбит?

2.16. Вероятности попадания при одном выстреле для каждого из стрелков равны 0,4, 0,6 и 0,8. При одновременном выстреле трех стрелков обнаружено два попадания. Кто из стрелков вероятнее промахнулся?

2.17. Игрок бросает две игральные кости. После этого он бросает столько монет, сколько очков выпало, и считает число выпавших орлов. Найти наиболее вероятное число очков, выпавшее при бросании костей, если известно, что потом выпало 3 орла.

2.18. В 1-м ящике по 3 красных, белых и синих шарика; во 2-м ящике — 4 красных, 3 белых и 2 синих. Из случайно выбранного ящика взяли 3 шарика, они оказались разных цветов. Какова вероятность того, что был выбран 1-й ящик?

2.19. Партия из 5 ламп с вероятностью 1/6 поступила с завода А, с вероятностью 1/3 — с завода Б, с вероятностью 1/2 — с завода В. Лампа с завода А перегорает за год с вероятностью 0,5, лампа с Б — с вероятностью 0,3, лампа с В — с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что лампы с завода А, если за год перегорели 3 лампы из 5.

2.20. Две точки P и Q выбираются наудачу из отрезка $[-1, 1]$. Найти вероятность того, что уравнение $x^2 + Px + Q = 0$ имеет вещественные корни.

3 Дискретные случайные величины

3.1 Ряд распределения и функция распределения

Определение 6. Дискретной случайной величинойназывается скалярная функция ξ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, принимающая конечное или счетное множество значений $x_1, x_2, \ldots$, такая, что для любого значения x множество $\{\xi = x\}$ принадлежит $\mathcal{F}$.

Дискретная случайная величина задается **рядом распределения** — таблицей

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \ldots \end{array}$$

где $p_k = \mathbf{P}\{\xi = x_k\}$. Поскольку $\Omega = \bigvee\limits_{k=1}^{N} \{\xi = x_k\}$, $N \leq \infty$, имеем

$$\sum_{k=1}^{N} p_k = 1.$$

Пример 40. (а) Бросим игральную кость. Пусть η — выпавшая цифра. Эта случайная величина принимает значения от 1 до 6 с одинаковыми вероятностями, т. е. ее ряд распределения выглядит так:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{array}$$

(б) Подбрасываем монету неограниченное число раз, пока не выпадет орел. Пусть ξ — число бросков. Эта случайная величина принимает все натуральные значения. Вычислим их вероятности. Пусть A_k — событие „при k-м броске выпадет орел". Все A_k имеют вероятности $1/2$ и независимы. Вычислим вероятности различных значений ξ:

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\{\xi = 1\} = \mathbf{P}(A_1) = 1/2, \\ &\mathbf{P}\{\xi = 2\} = \mathbf{P}(\overline{A}_1 A_2) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4, \ldots, \\ &\mathbf{P}\{\xi = n\} = \mathbf{P}(\overline{A}_1 \ldots \overline{A}_{n-1} A_n) = (1/2)^n, \ldots \end{aligned}$$

Получаем ряд распределения

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & n & \ldots \\ 1/2 & 1/4 & 1/8 & \ldots & 2^{-n} & \ldots \end{array}$$

Определение 7. Функцией распределения случайной величины ξ называется функция $F_\xi :\ \mathbb{R} \mapsto [0,1]$, равная

$$F_\xi(x) = \mathbf{P}\{\xi < x\}.$$

Теорема 1. *Функция распределения обладает следующими свойствами:*
(1) *F_ξ не убывает, т. е. при $x < y$ выполнено $F_\xi(x) \leq F_\xi(y)$;*
(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0$;
(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} F_\xi(x) = 1$;
(4) *F_ξ непрерывна слева: $F_\xi(x-0) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \lim\limits_{u\to x-0} F_\xi(u) = F_\xi(x)$.*

Доказательство. Свойство (1) вытекает из того, что $\{\xi < x\} \Rightarrow \Rightarrow \{\xi < y\}$, откуда $\mathbf{P}\{\xi < x\} \leq \mathbf{P}\{\xi < y\}$. Остальные свойства следуют из непрерывности вероятностной меры:

$$(2):\quad \bigwedge_{n=1}^{\infty}\{\xi < -n\} = \emptyset \implies \mathbf{P}\{\xi < -n\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$$(3):\quad \bigvee_{n=1}^{\infty}\{\xi < n\} = \Omega \implies \mathbf{P}\{\xi < n\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

$$(4):\quad \bigvee_{n=1}^{\infty}\left\{\xi < x - \frac{1}{n}\right\} = \{\xi < x\}, \quad \text{следовательно,}$$

$$\mathbf{P}\left\{\xi < x - \frac{1}{n}\right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{P}\{\xi < x\}.$$ □

В том случае, когда случайная величина ограничена снизу, свойство (2) усилится: $F_\xi(x) = 0$ при всех $x \leq \inf \xi$; если же случайная величина ограничена сверху, усилится свойство (3): $F_\xi(x) = 1$ при всех $x > \sup \xi$.

Если случайная величина ограничена снизу, и ее значения $\{x_n\}_{n=1}^N$, $N \leq \infty$, занумерованы по возрастанию, то, положив $h_n = p_1 + \ldots + p_n$, получим явный вид функции распределения:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq x_1, \\ h_n & \text{при } x_n < x \leq x_{n+1}, \\ 1 & \text{при } x > x_N \text{ (если } N < \infty). \end{cases}$$

Построим графики функций распределения для случайных величин из примера 40 — цифры, выпавшей на игральной кости (а), и числа бросков монеты до первого орла (б), см. рис. 26.

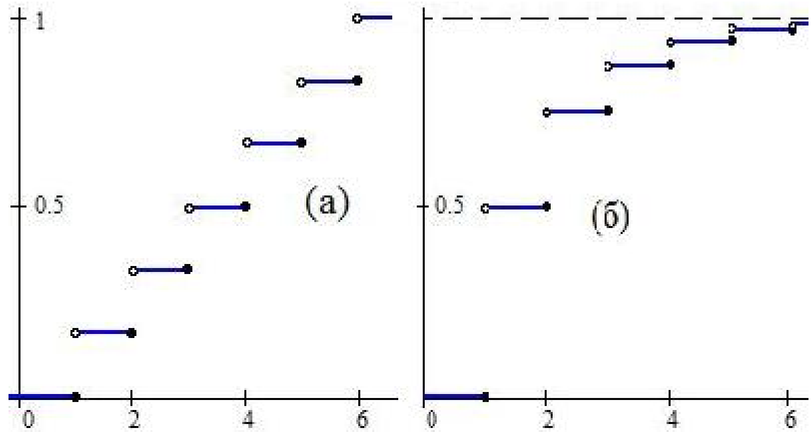

Рис. 26

Определение 8. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ называют **независимыми**, если при любых $t_1, t_2, \ldots \in \mathbb{R}$ независимы события $\{\xi_1 < t_1\}$, $\{\xi_2 < t_2\}, \ldots$.

В случае дискретных случайных величин это равносильно независимости событий $\{\xi_1 = x_i\}$, $\{\xi_2 = y_j\}, \ldots$

Пример 41. Подбрасывают кубик с цифрами от 1 до 6, кубик с цифрами 1,1,2,2,3,3 и монету 1 рубль. С какой вероятностью сумма выпавших цифр будет 10 ?

Пусть на первом кубике выпадет X, на втором Y, на монете Z. Их ряды распределения

$$X: \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{array}$$

$$Y: \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array} \qquad Z: \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Случайные величины X, Y, Z независимы. Сумма 10 может получиться одним способом, так что

$$\mathbf{P}\{X + Y + Z = 10\} = \mathbf{P}\{X = 6, Y = 3, Z = 1\} =$$
$$= \mathbf{P}\{X = 6\} \cdot \mathbf{P}\{Y = 3\} \cdot \mathbf{P}\{Z = 1\} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{36}.$$

3.2 Числовые характеристики случайных величин

Во многих задачах нас может интересовать не полное описание распределения случайной величины, а ее обобщенные числовые характеристики. Самой важной из таких характеристик является **математическое ожидание** (его также называют средним значением). Общее определение таково:

Определение 9. Математическим ожиданием случайной величины $\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ называется ее интеграл по вероятностной мере

$$\mathbf{E}\,\xi = \int\limits_{\Omega} \xi(\omega) d\mathbf{P}. \tag{10}$$

В случае дискретной случайной величины ξ со множеством значений $\{x_i\}_{i=1}^{N}$, $N \le \infty$, интеграл сводится к сумме

$$\mathbf{E}\,\xi = \sum_{i=1}^{N} x_i\, \mathbf{P}\{\xi = x_i\}. \tag{11}$$

Таким образом, математическое ожидание дискретной случайной величины легко вычисляется по ее ряду распределения.

Моменты — важное обобщение математического ожидания.

Определение 10. k-м начальным моментом случайной величины ξ называется величина

$$m_k = \mathbf{E}\,(\xi^k), \qquad k \in \mathbb{N};$$

k-м центральным моментом называется

$$\mu_k = \mathbf{E}\,(\xi - \mathbf{E}\,\xi)^k, \qquad k \in \mathbb{N}, \quad k > 1.$$

Математическое ожидание — это 1-й начальный момент. Из центральных моментов важнейшим является 2-й, называемый **дисперсией**:

$$\mathbf{D}\,\xi = \mathbf{E}\,(\xi - \mathbf{E}\,\xi)^2.$$

Используя свойства математических ожиданий (см. теорему 2 далее), можно выразить дисперсию в таком виде:

$$\mathbf{D}\,\xi = \mathbf{E}\left(\xi^2 - 2\mathbf{E}\,\xi \cdot \xi + (\mathbf{E}\,\xi)^2\right) = \mathbf{E}\,(\xi^2) - (\mathbf{E}\,\xi)^2.$$

Дисперсия наиболее удобна для того, чтобы охарактеризовать разброс случайной величины. Чтобы иметь дело с величинами той же физической размерности, что и сама случайная величина, часто вместо дисперсии используют **среднеквадратичное отклонение**

$$\sigma = \sqrt{\mathbf{D}\,\xi}.$$

Пример 42. Для случайной величины η — цифры, выпавшей на игральной кости — получаем

$$\mathbf{E}\,\xi = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{6}k = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3{,}5, \qquad \mathbf{E}\,(\xi^2) = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{6}k^2 = \frac{91}{6},$$

$$\mathbf{D}\,\xi = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}, \qquad \sigma = \sqrt{\frac{35}{12}} \approx 1{,}71.$$

Квантили.

Определение 11. Пусть $0 < \gamma < 1$. **Квантилью уровня** γ случайной величины ξ называется такое число c_γ, что

$$\mathbf{P}\{\xi < c_\gamma\} \le \gamma; \qquad \mathbf{P}\{\xi > c_\gamma\} \le 1 - \gamma.$$

При помощи графика функции распределения можно наглядно показать (рис. 27), как находить квантили.

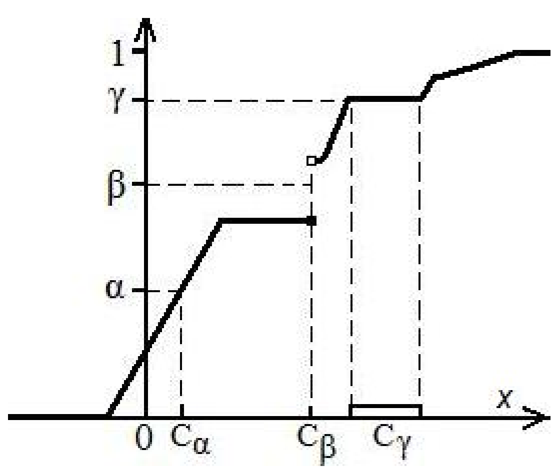

Рис. 27

Мы видим, что в некоторых случаях (квантиль уровня γ на рисунке) квантиль определена неоднозначно. Для дискретных случайных величин этот случай соответствует тому, что уровень γ совпал с одним из значений функции распределения.

Наибольший интерес представляют квантили уровней $1/2$ (**медиана**), $1/4$ и $3/4$ (нижняя и верхняя квартили). Разность $c_{3/4} - c_{1/4}$ называется интерквартильным размахом. Квантиль уровня $k/100$ называют k-й процентилью.

Пример 43. Рассмотрим случайную величину X — цифру, выпадающую на игральной кости. Медиане можно приписать любое значение из отрезка $[3, 4]$, поскольку

$$\mathbf{P}\{X > 3\} = \mathbf{P}\{X < 4\} = 1/2.$$

Нижняя квартиль равна 2, так как

$$\mathbf{P}\{X < 2\} < 1/4, \quad \mathbf{P}\{X > 2\} < 3/4.$$

Аналогично, верхняя квартиль равна 5.

Моды.

Модой случайной величины называется ее значение, имеющее наибольшую вероятность. Таких значений может быть любое конечное число, но чаще мода бывает одна.

Пример 44. (а) При бросании одной игральной кости вероятности всех 6 значений одинаковы, так что случайная величина имеет 6 мод.

(б) Бросаем две кости, пусть ξ — сумма выпавших цифр. Имеются 36 равновероятных элементарных исходов. Посчитав, какая сумма сколькими способами получается, строим ряд распределения:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{array}$$

Мода ξ единственна и равна 7.

3.3 Свойства математических ожиданий и дисперсий

Математическое ожидание обладает свойством монотонности:

$$\text{если} \quad \mathbf{P}\{\xi \le \eta\} = 1, \quad \text{то} \quad \mathbf{E}\,\xi \le \mathbf{E}\,\eta. \tag{12}$$

Если применить это свойство к неравенствам $-|\xi| \le \xi \le |\xi|$, получаем оценку по модулю:

$$|\mathbf{E}\,\xi| \le \mathbf{E}\,|\xi|.$$

Теорема 2. (*Свойства математических ожиданий*).
Пусть ξ, η *— случайные величины,* a, b *— константы. Тогда*:
(1) $\mathbf{E}\,(a\xi + b) = a\mathbf{E}\,\xi + b$;
(2) $\mathbf{E}\,(\xi + \eta) = \mathbf{E}\,\xi + \mathbf{E}\,\eta$;
(3) *если* ξ *и* η *независимы, то* $\mathbf{E}\,(\xi\,\eta) = \mathbf{E}\,\xi\,\mathbf{E}\,\eta$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{P}\{\xi = x_i\} = p_i$, $\mathbf{P}\{\eta = y_j\} = q_j$, $\mathbf{P}\{\xi = x_i,\, \eta = y_j\} = r_{ij}$. Тогда

$$\sum_i p_i = \sum_j q_j = 1, \quad \sum_j r_{ij} = p_i, \quad \sum_i r_{ij} = q_j.$$

(1):

$$\mathbf{E}\,(a\xi + b) = \sum_i p_i(ax_i + b) = a\sum_i p_i x_i + b\sum_i p_i = a\mathbf{E}\,\xi + b.$$

(2): $\mathbf{E}\,(\xi + \eta) =$

$$= \sum_i \sum_j r_{ij}(x_i + y_j) = \sum_i \left(\sum_j r_{ij}\right) x_i + \sum_j \left(\sum_i r_{ij}\right) y_j =$$
$$= \sum_i p_i x_i + \sum_j q_j y_j = \mathbf{E}\,\xi + \mathbf{E}\,\eta.$$

(3): в силу независимости имеем $r_{ij} = p_i q_j$, и тогда

$$\mathbf{E}\,(\xi\,\eta) \quad = \quad \sum_i \sum_j r_{ij} x_i y_j \quad = \quad \left(\sum_i p_i x_i\right)\left(\sum_j q_j y_j\right) \quad = \quad \mathbf{E}\,\xi\,\mathbf{E}\,\eta.$$

□

Пример 45. Шапки n гостей лежали в одном ящике. Уходя в темноте, все гости надели шапки. Найти математическое ожидание числа тех, кто оказался в своей шапке.

События A_k „k-й гость наденет свою шапку” зависимы, у каждого вероятность $1/n$. Пусть $\xi_k = \mathbf{1}_{A_k}$, т. е. $\xi_k = 1$ при A_k и $\xi_k = 0$ при $\overline{A}_k$. Имеем $\mathbf{E}\,\xi_k = 1/n$. Число тех, кто наденет свою шапку, выразится так:

$$X = \sum_{k=1}^{n} \xi_k; \qquad \mathbf{E}\,X = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}\,\xi_k = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

Теорема 3. (*Свойства дисперсий*). *Пусть ξ, η — случайные величины, a, b — константы. Тогда:*
(1) $\mathbf{D}\,(a\xi + b) = a^2\mathbf{D}\,\xi$*;*
(2) *если ξ и η независимы, то* $\mathbf{D}\,(\xi + \eta) = \mathbf{D}\,\xi + \mathbf{D}\,\eta$*.*

Доказательство. (1):

$$\mathbf{D}\,(a\xi + b) = \mathbf{E}\,\big(a\xi + b - \mathbf{E}\,(a\xi + b)\big)^2 = \\ = \mathbf{E}\,(a\xi + b - a\mathbf{E}\,\xi - b)^2 = a^2\mathbf{E}\,(\xi - \mathbf{E}\,\xi)^2 = a^2\mathbf{D}\,\xi.$$

(2): Пусть ξ и η независимы. Тогда случайные величины $\xi_o = \xi - \mathbf{E}\,\xi$, $\eta_o = \eta - \mathbf{E}\,\eta$ также независимы.

$$\mathbf{D}\,(\xi + \eta) = \mathbf{D}\,(\xi_o + \eta_o) = \mathbf{E}\,(\xi_o + \eta_o)^2 = \\ = \mathbf{E}\,(\xi_o^2 + \eta_o^2 + 2\xi_o\eta_o) = \mathbf{E}\,\xi_o^2 + \mathbf{E}\,\eta_o^2 + 2\mathbf{E}\,(\xi_o\eta_o) = \\ = \mathbf{D}\,\xi_o + \mathbf{D}\,\eta_o + 2\mathbf{E}\,\xi_o\mathbf{E}\,\eta_o = \mathbf{D}\,\xi + \mathbf{D}\,\eta + 0 \cdot 0,$$

что и требовалось доказать. □

Пример 41 (продолжение). Найдем математическое ожидание и дисперсию суммы цифр, выпавших на кубике с 6 цифрами (X), с 3 цифрами (Y) и монете (Z).

$$\mathbf{E}\,(X + Y + Z) = \mathbf{E}\,X + \mathbf{E}\,Y + \mathbf{E}\,Z = 3{,}5 + 2 + 0{,}5 = 6.$$

В силу независимости X, Y, Z

$$\mathbf{D}\,(X + Y + Z) = \mathbf{D}\,X + \mathbf{D}\,Y + \mathbf{D}\,Z = \frac{35}{12} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{23}{6} \approx 3{,}83.$$

Определение 12. Пусть у случайной величины ξ существует конечное математическое ожидание. **Условным математическим ожиданием** случайной величины ξ относительно условия C называется число

$$\mathbf{E}\,(\xi|C) = \frac{1}{\mathbf{P}(C)}\mathbf{E}\,(\mathbf{1}_C\,\xi) = \frac{1}{\mathbf{P}(C)}\int\limits_C \xi(\omega)d\mathbf{P}.$$

В дискретном случае имеем

$$\mathbf{E}\,(\xi|C) = \sum_i \mathbf{P}(\xi = x_i|C)x_i.$$

Пример 46. Подбросили две игральные кости, выпали цифры X и Y. Найти условное математическое ожидание $\mathbf{E}\,(X|X<Y)$.

Имеем $\mathbf{P}\{X<Y\} = 15/36$; $\mathbf{P}\{X=k<Y\} = \dfrac{6-k}{36}$ при $k = 1,2,3,4,5$. Следовательно,

$$\mathbf{P}\{X=k|X<Y\} = \frac{\mathbf{P}\{X=k<Y\}}{\mathbf{P}\{X<Y\}} = \frac{6-k}{15},$$

$$\mathbf{E}\,(X|X<Y) = \sum_{k=1}^{5} \frac{6-k}{15}k = \frac{7}{3}.$$

Оно получилось в полтора раза меньше, чем безусловное математическое ожидание $\mathbf{E}\,X = 7/2$.

Если $H_1, H_2, \ldots$ — полная группа событий, то математическое ожидание можно выразить через условные математические ожидания:

$$\mathbf{E}\,\xi = \sum_k \mathbf{P}(H_k)\mathbf{E}\,(\xi|H_k). \tag{13}$$

Равенство (13) называют формулой полной вероятности для математических ожиданий.

Пример 47. Монету бросают до тех пор, пока последовательно не появятся

(А) два орла;

(Б) орел и решка.

В обоих случаях найти среднее необходимое число бросаний.

Пусть ξ^{XY} — число бросаний монеты до появления последовательности XY, $m^{XY} = \mathbf{E}\,\xi^{XY}$. Пусть H_P — событие „первой выпадет решка", H_O — „первым выпадет орел". Обозначим

$$m_T^{XY} = \mathbf{E}\,(\xi^{XY}|H_T),$$

где $X, Y, T \in \{P, O\}$. По формуле (13) получаем

$$m^{XY} = \frac{1}{2}(m_O^{XY} + m_P^{XY}).$$

Выпишем рекуррентные соотношения для m_O^{XY} и m_P^{XY}, используя однородность последовательности испытаний. А именно, вероятностные свойства последовательности сохранятся, если ее начало перенести на один знак вправо.

Начнем со случая (А) (последовательного выпадения двух орлов). Первый и второй результаты бросания монеты будем обозначать A_1 и A_2. Пусть $A_1 = O$. Считая, что последовательность началась со второго знака, получим

$$m_O^{OO} = 1 + 1 \cdot \mathbf{P}\{A_2 = O\} + m_P^{OO}\mathbf{P}\{A_2 = P\} = 1 + \frac{1 + m_P^{OO}}{2},$$

$$m_P^{OO} = 1 + m_O^{OO}\mathbf{P}\{A_2 = O\} + m_P^{OO}\mathbf{P}\{A_2 = P\} = 1 + \frac{m_P^{OO} + m_O^{OO}}{2}.$$

Решая эти уравнения, получим $m_P^{OO} = 7$, $m_O^{OO} = 5$, откуда $m^{OO} = 6$.

Аналогично, в случае (Б)

$$m_O^{OP} = 1 + 1 \cdot \mathbf{P}\{A_2 = P\} + m_O^{OP}\mathbf{P}\{A_2 = O\} = 1 + \frac{1 + m_O^{OP}}{2},$$

$$m_P^{OP} = 1 + m_O^{OP}\mathbf{P}\{A_2 = O\} + m_P^{OP}\mathbf{P}\{A_2 = P\} = 1 + \frac{m_P^{OP} + m_O^{OP}}{2},$$

откуда $m_P^{OP} = 5$, $m_O^{OP} = 3$, следовательно, $m^{OP} = 4$.

Полученные результаты показывают, что комбинация OP выпадет „в среднем раньше", чем OO.

3.4 Дискретные законы распределения

Рассмотрим несколько семейств распределений случайных величин, принимающих целые значения.

Индикатор события A $(0 < p = \mathbf{P}(A) < 1)$ — самая простая случайная величина. График ее функции распределения показан на рис. 28.

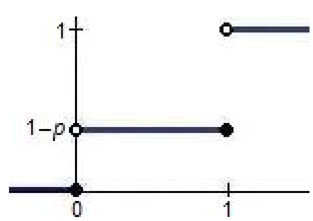

Рис. 28

Вычислим ее математическое ожидание и дисперсию.

$$\mathbf{E}\,\mathbf{1}_A = \mathbf{E}\,\mathbf{1}_A^2 = (1-p)\cdot 0 + p \cdot 1 = p; \quad \mathbf{D}\,\mathbf{1}_A = p - p^2 = p(1-p).$$

Равномерное дискретное распределение: случайная величина ξ с равными вероятностями $1/n$ принимает значения от 1 до n. Такие случайные величины легко моделируются: при $n = 2$ достаточно подбросить монету, при $n = 6$ — кубик, при $n = 60$ — посмотреть секунды на часах. График функции распределения имеет n ступенек, одинаковых по ширине и высоте. Вычислим математическое ожидание и дисперсию.

$$\mathbf{E}\,\xi = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} k = \frac{1}{n}(1 + \ldots + n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2},$$

$$\mathbf{E}\,(\xi^2) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\mathbf{D}\,\xi = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n^2-1}{12}.$$

Геометрическое распределение имеет случайная величина τ, равная числу независимых опытов до первого появления некоторого события („успеха”), если в каждом опыте вероятность успеха одинакова и равна p, где $0 < p < 1$. Случайная величина τ принимает все натуральные значения. Вычислим их вероятности. Пусть A_k — событие „успех при k-м опыте”. Все A_k имеют вероятности p и независимы.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{\tau = 1\} = \mathbf{P}(A_1) = p,\\
&\mathbf{P}\{\tau = 2\} = \mathbf{P}(\overline{A}_1 A_2) = (1-p)p,\\
&\mathbf{P}\{\tau = 3\} = \mathbf{P}(\overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3) = (1-p)^2 p \quad \text{и т. д.}
\end{aligned}$$

Получаем формулу

$$\mathbf{P}\{\tau = n\} = p(1-p)^{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{14}$$

т. е. вероятности $p_n = \mathbf{P}\{\tau = n\}$ образуют геометрическую прогрессию (отсюда название). Вычислим математическое ожидание и дисперсию τ.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\,\tau = \sum_{n=1}^{\infty} np(1-p)^{n-1} = -p\,\frac{d}{dp} \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^n =&\\
= -p\,\frac{d}{dp}\Big((1-p)\,\frac{1}{1-(1-p)}\Big) =&\\
= -p\,\frac{d}{dp}\Big(\frac{1}{p} - 1\Big) = -p\Big(-\frac{1}{p^2}\Big) = \frac{1}{p}.&
\end{aligned}$$

Именно такого результата и следовало ожидать, раз в каждом опыте вероятность успеха равна p.

$$\mathbf{E}\,\tau^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 p(1-p)^{n-1} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} np(1-p)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)n(n-1)(1-p)^{n-2} =$$
$$= \frac{1}{p} + p(1-p)\,\frac{d^2}{dp^2}\sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^n = \frac{1}{p} + p(1-p)\,\frac{d^2}{dp^2}\Big(\frac{1}{p}-1\Big) =$$
$$= \frac{1}{p} + p(1-p)\,\frac{2}{p^3} = \frac{2-p}{p^2};$$
$$\mathbf{D}\,\tau = \frac{2-p}{p^2} - \Big(\frac{1}{p}\Big)^2 = \frac{1-p}{p^2}.$$

Пример 48. Двое подбрасывают игральную кость по очереди. Выигрывает тот, у кого впервые выпадет шестерка. С какой вероятностью выиграет первый?

Можно решить задачу такими же рассуждениями, как в примере 47, рассмотрев две гипотезы: „при первом броске выпадет 6" и ее отрицание. Но можно решить задачу, используя геометрическое распределение. Случайная величина τ — номер броска, при котором „6" выпадет впервые — имеет геометрическое распределение с параметром $p = 1/6$. Победа первого игрока A означат, что τ нечетна.

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\tau = 2k+1\} = \sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^{2k} =$$
$$= p \cdot \frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2p-p^2} = \frac{1}{2-p} = \frac{6}{11} = 0{,}545454...$$

Уникальное свойство геометрического распределения — это „отсутствие памяти": условное распределение случайной величины $\xi - T$ при условии $\xi > T$ совпадает с безусловным распределением ξ. Это можно проверить непосредственным вычислением, а можно усмотреть из схемы независимых испытаний до первого успеха: событие $\{\xi > T\}$ означает, что в первых T опытах успеха не было, но на результаты дальнейших опытов это не влияет.

Гипергеометрическое распределение появляется в следующей ситуации: пусть имеются N элементов, из которых M „окрашены"; случайно выбираем n элементов, и нас интересует случайная величина ξ — число „окрашенных" элементов среди выбранных.

Число равновероятных элементарных исходов C_N^n. Из них в событие $\{\xi = k\}$ входят $C_M^k\, C_{N-M}^{n-k}$, так как нужно выбрать k элементов из M „окрашенных" и $n-k$ из $N-M$ остальных, причем оба выбора независимы. Получаем

$$\mathbf{P}(k) = \frac{C_M^k\, C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, \quad \max\{0, n-N+M\} \le k \le \min\{n, M\}.$$

Математическое ожидание гипергеометрической случайной величины вычисляется тем же способом, что в примере 45: предположим, что мы выбираем элементы один за другим в случайном порядке; пусть $\varkappa_i = 1$, если i-й элемент окрашен, и $\varkappa_i = 0$ в противном случае; $i = 1, 2, \ldots, n$. Безусловные вероятности таковы:

$$\mathbf{P}\{\varkappa_i = 1\} = \frac{M}{N}, \quad \mathbf{P}\{\varkappa_i = 0\} = \frac{N-M}{N}; \quad \mathbf{E}\,\varkappa_i = \frac{M}{N}.$$

Поскольку $\xi = \varkappa_1 + \ldots + \varkappa_n$, получаем

$$\mathbf{E}\,\xi = \frac{nM}{N}. \tag{15}$$

Пример 49. В коробке лежат 10 шариков, из них 3 красные. Возьмем не глядя 4 шарика. Найти распределение числа ξ красных шариков среди взятых.

По формуле гипергеометрического распределения

$$\mathbf{P}(k) = \frac{C_3^k\, C_7^{4-k}}{C_{10}^4}, \qquad 0 \le k \le 3;$$

следовательно,

$$\mathbf{P}(0) = \frac{1 \cdot 35}{210}, \quad \mathbf{P}(1) = \frac{3 \cdot 35}{210}, \quad \mathbf{P}(2) = \frac{3 \cdot 21}{210}, \quad \mathbf{P}(3) = \frac{1 \cdot 7}{210}.$$

Получаем ряд распределения:

0	1	2	3
0,167	0,5	0,3	0,033

Математическое ожидание по формуле (15) равно $\frac{4 \cdot 3}{10} = 1{,}2$. Но вычислить дисперсию так же легко не удастся, поскольку случайные величины κ_i зависимы. Считаем непосредственно:

$$\mathbf{E}\,(\xi^2) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{3}{10} \cdot 4 + \frac{1}{30} \cdot 9 = 2; \qquad \mathbf{D}\,\xi = 2 - 1{,}2^2 = 0{,}56.$$

Теперь рассмотрим задачу, где гипергеометрическое распределение используется в формуле полной вероятности.

Пример 50. На тестировании дают два вопроса из 40 возможных. Каждый вопрос предусматривает три варианта ответа. К скольким вопросам надо подготовиться, чтобы сдать тест с вероятностью не менее 1/2 ?

Подготовимся к M вопросам. Пусть событие H_k, $k = 0, 1, 2$, означает, что из попавшихся 2 вопросов k подготовлены; событие A — „удастся ответить на оба вопроса". Тогда:

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{P}(H_0) = C^2_{40-M}/C^2_{40} & \mathbf{P}(A|H_0) = 1/9 \\
\mathbf{P}(H_1) = C^1_M C^1_{40-M}/C^2_{40} & \mathbf{P}(A|H_1) = 1/3 \\
\mathbf{P}(H_2) = C^2_M/C^2_{40} & \mathbf{P}(A|H_2) = 1
\end{array}$$

Итоговая вероятность

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{k=0}^{2} \mathbf{P}(H_k)\mathbf{P}(A|H_k) = \frac{\frac{1}{9}C^2_{40-M} + \frac{1}{3}C^1_M C^1_{40-M} + C^2_M}{C^2_{40}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{9}(40 - M)(39 - M) + \frac{2}{3}M(40 - M) + M(M - 1)}{40 \cdot 39} =$$

$$= \frac{4M^2 + 152M + 40 \cdot 39}{9 \cdot 40 \cdot 39} = \frac{M^2 + 38M + 390}{9 \cdot 390}.$$

Получится $\mathbf{P}(A) > 1/2$ при $M^2 + 38M - 1365 > 0$, т. е. $M > -19 + \sqrt{19^2 + 1365} \approx 22{,}5$.

Ответ: надо подготовиться к 23 вопросам.

3.5 Биномиальное распределение (схема Бернулли)

Первым семейством распределений случайных величин, изученным подробно, было биномиальное распределение, рассмотренное Я. Бернулли в начале XVIII века. Появилось оно из следующей задачи.

Проводят n независимых опытов, в каждом из которых может произойти определенное событие („успех") с вероятностью p, или не произойти („неудача") с вероятностью $1-p$. Требуется найти вероятность получения k успехов в данной серии опытов.

Обозначим через A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, событие „успех в i-ом опыте". Обозначим символом $\mathcal{K}$ совокупность всех k-элементных подмножеств

$$K = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Тогда вероятность того события, что произойдет ровно k успехов в n опытах, можно вычислить, представив это сложное событие в дизъюнктивно-нормальной форме:

$$\mathbf{P}(k) = \sum_{K \in \mathcal{K}} \mathbf{P}\left(\bigwedge_{i \in K} A_i \bigwedge_{j \notin K} \overline{A}_j\right) =$$

$$= \sum_{K \in \mathcal{K}} \left(\prod_{i \in K} \mathbf{P}(A_i) \prod_{j \notin K} \big(1 - \mathbf{P}(A_j)\big)\right) = \sum_{K \in \mathcal{K}} \left(\prod_{i \in K} p \prod_{j \notin K} (1-p)\right) =$$

$$= \sum_{K \in \mathcal{K}} p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Количество успехов в схеме Бернулли — случайная величина ξ с целыми значениями от 0 до n, которая имеет **биномиальное распределение** (обозначение: $\xi \sim Bi(n, p)$), задаваемое формулой Бернулли

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{16}$$

Математическое ожидание и дисперсию биномиальной случайной величины можно вычислить, не прибегая к формуле (11). Пусть $\xi_i = \mathbf{1}_{A_i}$. Тогда $\mathbf{E}\,\xi_i = p$, $\mathbf{D}\,\xi_i = p(1-p)$. Воспользуемся теоремами 2 и 3. Поскольку $\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, получаем

$$\mathbf{E}\,\xi = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}\,\xi_i = np.$$

В силу независимости случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ получаем

$$\mathbf{D}\,\xi = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{D}\,\xi_i = np(1-p).$$

Медиана и мода биномиальной случайной величины отличаются от ее математического ожидания менее, чем на 1.

Пример 51. В коробке лежат 10 шариков, из них 3 красные. Повторим 4 раза такой опыт: берем не глядя шарик, записываем его цвет, кладем обратно и встряхиваем коробку. Успехом будет считаться, если шарик оказался красным. Найти распределение числа X успехов.

В отличие от примера 49, здесь не важно число шариков, а важна лишь доля красных (30%), которая и будет вероятностью успеха в каждом опыте. По формуле Бернулли (16) получаем

$$\mathbf{P}\{X = k\} = C_4^k\, 0{,}3^k\, 0{,}7^{4-k}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Выпишем ряд распределения и построим график функции распределения (рис. 29).

0	1	2	3	4
0,240	0,412	0,265	0,076	0,008

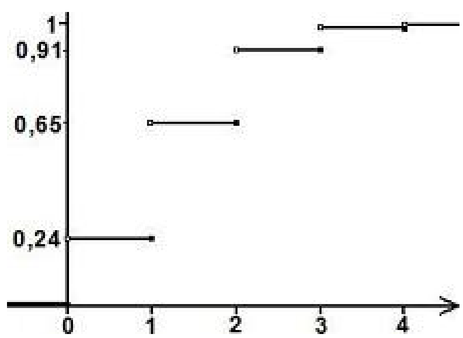

Рис. 29

Очевидно, полученный ряд распределения отличается от полученного в примере 49, где шарики в коробку не возвращали. Математическое ожидание $\mathbf{E}\, X = 4 \cdot 0{,}3 = 1{,}2$ — такое же, но дисперсия получится в 1,5 раза больше, чем в примере 49: $\mathbf{D}\, X = 4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}84$.

Однако, если бы в примере 49 было 10 000 шариков, из которых 3 000 красных, то разница была бы незаметна.

Пример 52. Стрелок X попадает в мишень с вероятностью p, стрелок Y — с вероятностью $1 - p$. Найти вероятность того, что, сделав по n независимых выстрелов, X и Y попадут одинаковое число раз.

Обозначим события

A_k — „X попал при k-м выстреле", $k = 1, \ldots, n$,

A_{n+k} — „Y промахнулся при k-м выстреле", $k = 1, \ldots, n$.

События $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ независимы, каждое имеет вероятность p. Равноуспешность двух стрелков равносильна тому, что произойдет ровно половина из событий $A_1, \ldots, A_{2n}$, вероятность чего по формуле Бернулли равна

$$C_{2n}^n \, p^n \, (1-p)^n.$$

Теперь рассмотрим ранее обещанные примеры на формулу Байеса, использующие схему Бернулли.

Пример 53. Петя попадает в мишень с вероятностью $1/2$, Вася с вероятностью $1/3$. Бросили жребий, затем один из них

а) выстрелил 10 раз и попал 3 раза;

б) выстрелил 20 раз и попал 6 раз.

В обоих случаях найти вероятность того, что стрелял Вася.

Гипотезы H_1 — „стреляет Петя" и H_2 — „стреляет Вася" имеют вероятности $1/2$ и образуют полную группу событий. Пусть событие A — „выстреливший 10 раз попал 3 раза", B — „выстреливший 20 раз попал 6 раз". По формуле Бернулли получаем в случае а)

$$\mathbf{P}(A|H_1) = C_{10}^3 \big(1/2\big)^3 \big(1/2\big)^7 \approx 0{,}117,$$

$$\mathbf{P}(A|H_2) = C_{10}^3 \big(1/3\big)^3 \big(2/3\big)^7 \approx 0{,}260,$$

и формула Байеса дает

$$\mathbf{P}(H_2|A) = \frac{\mathbf{P}(H_2)\mathbf{P}(A|H_2)}{\mathbf{P}(H_1)\mathbf{P}(A|H_1) + \mathbf{P}(H_2)\mathbf{P}(A|H_2)} \approx$$

$$\approx \frac{1/2 \cdot 0{,}260}{1/2 \cdot 0{,}117 + 1/2 \cdot 0{,}260} \approx 69\%.$$

В случае б)

$$\mathbf{P}(B|H_1) = C_{20}^6 \big(1/2\big)^6 \big(1/2\big)^{14} \approx 0{,}037,$$

$$\mathbf{P}(B|H_2) = C_{20}^6 \big(1/3\big)^6 \big(2/3\big)^{14} \approx 0{,}182,$$

получаем

$$\mathbf{P}(H_2|B) = \frac{\mathbf{P}(H_2)\mathbf{P}(B|H_2)}{\mathbf{P}(H_1)\mathbf{P}(B|H_1) + \mathbf{P}(H_2)\mathbf{P}(B|H_2)} \approx$$

$$\approx \frac{1/2 \cdot 0{,}182}{1/2 \cdot 0{,}037 + 1/2 \cdot 0{,}182} \approx 83\%.$$

Чем больше число независимых экспериментов, тем с большей вероятностью можно сделать верный вывод.

Пример 54. Спускаемый аппарат имеет 4 парашюта. Каждый из парашютов не раскроется (независимо от других) с вероятностью 0,1. При нераскрытии 1 парашюта аппарат разобьется с вероятностью 0,2; при нераскрытии 2 парашютов — с вероятностью 0,5; при нераскрытии 3 или 4 парашютов — обязательно разобьется. Найти вероятность того, что не раскрылся лишь один парашют, если аппарат разбился.

Обозначим события: H_k — „не раскроются k парашютов", A — „аппарат разобьется". События $H_0, \ldots, H_4$ образуют полную группу событий. По формуле Бернулли

$$\mathbf{P}(H_k) = C_4^k\, 0{,}1^k\, 0{,}9^{4-k}.$$

Исходные данные для формулы Байеса соберем в таблицу:

$\mathbf{P}(H_0) = 0{,}6561$	$\mathbf{P}(A\|H_0) = 0$	$\mathbf{P}(AH_0) = 0$
$\mathbf{P}(H_1) = 0{,}2916$	$\mathbf{P}(A\|H_1) = 0{,}2$	$\mathbf{P}(AH_1) = 0{,}0583$
$\mathbf{P}(H_2) = 0{,}0486$	$\mathbf{P}(A\|H_2) = 0{,}5$	$\mathbf{P}(AH_2) = 0{,}0243$
$\mathbf{P}(H_3) = 0{,}0036$	$\mathbf{P}(A\|H_3) = 1$	$\mathbf{P}(AH_3) = 0{,}0036$
$\mathbf{P}(H_4) = 0{,}0001$	$\mathbf{P}(A\|H_4) = 1$	$\mathbf{P}(AH_4) = 0{,}0001$

Сложив числа в правом столбце, получаем итоговую вероятность гибели аппарата $\mathbf{P}(A) = 0{,}0863$. По формуле Байеса получаем ответ:

$$\mathbf{P}(H_1|A) = \frac{\mathbf{P}(AH_1)}{\mathbf{P}(A)} \approx 67{,}6\%.$$

3.6 Распределение Пуассона

В 1837 г. С.Д. Пуассон открыл семейство дискретных случайных распределений, которое назвал законом редких событий.

Определение 13. Случайная величина ξ, принимающая значения $0, 1, 2, \ldots$, называется пуассоновской с математическим ожиданием $\lambda > 0$, если

$$\mathbf{P}\{\xi = n\} = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Обозначение: $\xi \sim \Pi(\lambda)$ или $\mathcal{L}(\xi) = \Pi(\lambda)$.

Покажем графики ряда распределения (рис. 30, для наглядности точки соединены) для небольших значений λ:

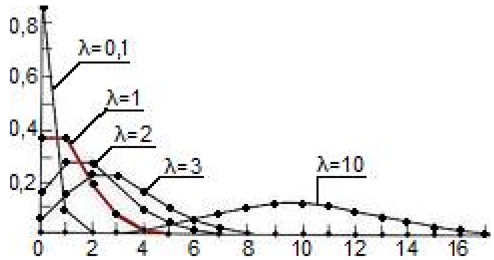

Рис. 30

Чтобы понять, откуда возникает распределение Пуассона и почему его можно назвать „законом редких событий", возьмем схему Бернулли с большим числом испытаний n, но небольшим математическим ожиданием $\lambda = np$ числа успехов. Вычисление по формуле Бернулли (16) потребует использования чисел сочетания, больших по величине. Посмотрим, к чему стремятся вероятности различных значений числа успехов при стремлении n к бесконечности и постоянном значении λ (т. е. при $p = \lambda/n$):

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = C_n^k\, p^k(1-p)^{n-k} =$$
$$= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$
$$= \frac{n^k}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k},$$

что при $n \to \infty$ стремится к $\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, так как $\left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^n \to e^{-\lambda}$, а последние k сомножителей стремятся к 1.

Пример 55. В городе 100 000 автомобилей, и каждый из них, независимо от других, с вероятностью 0,01% станет виновником ДТП в течение суток. Какова вероятность того, что за сутки произойдут ровно k аварий?

Имеем схему Бернулли с $n = 10^5$, $p = 10^{-4}$. Погрешность пуассоновского приближения будет незначительна. Математическое ожидание числа аварий $\lambda = np = 10$.

Ответ: $\mathbf{P}(k) = e^{-10}\, 10^k/k!$

Вычислим дисперсию пуассоновской случайной величины ξ с математическим ожиданием λ.

$$\mathbf{E}\,\xi^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\,e^{-\lambda}k^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\lambda^k}{k!}\,e^{-\lambda} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(k-1)\lambda^k}{k!}\,e^{-\lambda} =$$

$$= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\,e^{-\lambda} + \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}\,e^{-\lambda} = \lambda + \lambda^2;$$

$$\mathbf{D}\,\xi = \lambda + \lambda^2 - (\mathbf{E}\,\xi)^2 = \lambda.$$

Медиана и мода пуассоновской случайной величины отличаются от ее математического ожидания менее, чем на 1. При целом λ мода имеет два значения $\lambda - 1$ и λ (см.график), при дробном λ она равна целой части λ.

Распределение Пуассона моделирует случайную величину, представляющую собой число событий, произошедших за фиксированное время, при условии, что данные события происходят с некоторой фиксированной средней интенсивностью и независимо друг от друга. Это связано со следующим свойством пуассоновских случайных величин:

Теорема 4. *Если случайные величины* $\xi_i \sim \Pi(\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, n$, *независимы, то их сумма имеет распределение* $\Pi(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)$.

Доказательство. Применим индукцию по n. Для шага индукции нам достаточно рассмотреть случай двух слагаемых $\xi \sim \Pi(\lambda)$ и $\eta \sim \Pi(\mu)$. Обозначив $\nu = \lambda + \mu$, для их суммы получаем

$$\mathbf{P}\{\xi + \eta = m\} = \sum_{k=0}^{m} \mathbf{P}\{\xi = k\}\mathbf{P}\{\eta = m - k\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{\lambda^k}{k!}\,e^{-\lambda} \frac{\mu^{m-k}}{(m-k)!}\,e^{-\mu} = \frac{e^{-\nu}}{m!} \sum_{k=0}^{m} C_m^k \lambda^k \mu^{m-k} = \frac{e^{-\nu}}{m!}\nu^m,$$

что и требовалось доказать. □

Следствие 3.1. *Если* $\xi \sim \Pi(\lambda)$ *и* $\eta \sim \Pi(\mu)$ *независимы, то*

$$\mathbf{P}\{\xi = k | \xi + \eta = m\} = C_m^k \Big(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\Big)^k \Big(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\Big)^{m-k},$$

т. е. условное распределение ξ *при* $\xi + \eta = m$ *— биномиальное* $Bi\Big(m, \dfrac{\lambda}{\lambda + \mu}\Big)$.

Пример 56. В проходе стоит турникет с двумя лопастями. Каждую секунду с вероятностью $1/1000$ через него проходит один человек, независимо от других. Найти вероятность того, что через час турникет будет в исходном положении.

Нам нужна вероятность того, что число X людей, прошедших за час, четно.

$$\mathcal{L}(X) = Bi\Big(3600, \frac{1}{1000}\Big) \approx \Pi(3{,}6).$$

$$\mathbf{P}\{X \text{ четно}\} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\{X = 2k\} = e^{-3,6} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3{,}6^{2k}}{(2k)!} =$$
$$= e^{-3,6}\operatorname{ch} 3{,}6 = \frac{1+e^{-7,2}}{2} \approx 0{,}5004.$$

Задачи по теме главы 3

3.1. Подбросили монеты: десять по 1 рублю, пять по 2, две по 5 и одну в 10 рублей. Найти математическое ожидание и дисперсию суммы выпавших решек.

3.2. Стрелок имеет 6 пуль и стреляет до двух попаданий. В каждом выстреле вероятность попадания равна p. Случайная величина ν — число сделанных выстрелов. Найти для нее ряд и функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию.

3.3. Из карточек с номерами 00, 01,Ж, 99 наудачу берут одну. Обозначим через ξ сумму цифр на выбранной карточке. Найти:

а) ряд распределения случайной величины ξ,

б) ее математическое ожидание и дисперсию.

3.4. Дан скелет октаэдра. Покрасили случайно выбранные m ребер. Найти математическое ожидание числа граней с полностью покрашенным контуром. *Указание*: для каждой грани найти вероятность того, что ее контур покрашен (рис. 31).

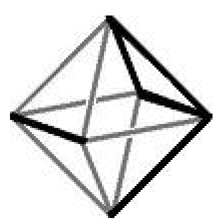

Рис. 31

3.5. Пусть $(a_1, a_2, \ldots, a_8)$ — случайная перестановка чисел от 1 до 8. Найти математическое ожидание

а) числа тех $k \in \{1, \ldots, 7\}$, при которых $|a_k - a_{k+1}| = 1$;

б) суммы $\displaystyle\sum_{k=1}^{7} |a_k - a_{k+1}|$.

3.6. В 5 ячеек равновероятно попадают 6 различимых частиц.

а) Найти ряд и функцию распределения случайной величины ξ, равной числу ячеек, в которых лежит по одной частице;

б) для случайной величины ξ вычислить математическое ожидание и дисперсию.

3.7. В 5 ячеек равновероятно попадают 6 неразличимых частиц.

а) Найти ряд и функцию распределения случайной величины ξ, равной числу ячеек, в которых лежит по две частицы;

б) для случайной величины ξ вычислить математическое ожидание и дисперсию.

3.8. Игральную кость бросают до того момента, когда во второй раз выпадет число очков, меньшее 5. Для случайной величины τ, равной числу бросков игральной кости, построить график функции распределения, найти моду, математическое ожидание и дисперсию.

3.9. Из 8 ключей 2 подходят к двери. Ключи последовательно выбираются без возвращения до первого подходящего. Найти:

а) ряд и функцию распределения случайной величины ξ, равной числу выбранных ключей до нужного;

б) ее математическое ожидание и дисперсию.

3.10. В мешке лежали 8 белых и 6 красных шаров. В темноте двое поделили шары поровну. Найти вероятность того, что у кого-нибудь окажется больше красных шаров, чем белых.

3.11. Цифры $1, 2, 3, 4, 5, 6$ случайно переставили. Пусть X — число цифр, оставшихся на своих местах. Для случайной величины X построить график функции распределения, найти моду, математическое ожидание и дисперсию.

3.12. Сколько раз надо бросить куб в лужу липкой краски, чтобы с вероятностью более 90% окрасились не менее трех его граней?

3.13. Куб с 2 красными и 4 белыми гранями подбросили 10 раз. Красная грань выпала X раз. Для случайной величины X построить график функции распределения, найти моду, математическое ожидание и дисперсию.

3.14. Вероятность прорастания семян данной партии пшеницы равна 0,95. Сколько семян следует взять из этой партии, чтобы наивероятнейшее число взошедших семян равнялось 100?

3.15. Контрольная работа состоит из 6 задач, причем для ее успешного решения необходимо решить 4 задачи. Если в течение отведенного времени студент будет решать 4 задачи, то вероятность правильного решения каждой из них равна 0,8. Если он попробует решить 5 задач, то вероятность правильного решения каждой задачи снизится до 0,7. Если же он возьмется за решение всех 6 задач, то вероятность правильного решения каждой будет 0,6. Какой тактики следует придерживаться студенту для выполнения контрольной?

3.16. При надувании шарик лопнет с вероятностью $1/3$. Сколько шариков надо купить, чтобы с вероятностью 99% надуть хотя бы три?

3.17. Вероятность того, что изделие браковано, равна 0,002. Определить вероятность того, что при проверке 1000 изделий число бракованных не превысит 1%.

3.18. На территорию 1 км^2 равномерно выпали 5 млн. дождевых капель. Найти вероятность того, что в бак диаметром 1 м упадут не менее 3 капель.

3.19. Пусть 1500 символов передаются по каналу связи. Каждый символ искажается независимо от остальных с вероятностью 0,001. Чему равна вероятность того, что число искаженных символов будет от 3 до 5 ?

3.20. На телефонную станцию каждый вызов поступает независимо остальных, в среднем поступает 3 вызова в минуту. Считая, что число X вызовов в минуту распределено по закону Пуассона, найти:

а) вероятность того, что за четверть часа придет не менее 70 вызовов;

б) закон распределения числа вызовов, поступивших на станцию за 5 минут.

3.21. Используя пуассоновское приближение, найти вероятность того, что при случайной перестановке 100 карточек ровно три останутся на своих местах.

4 Непрерывные случайные величины

4.1 Функция распределения, плотность распределения и их свойства

Напомним, что функция распределения F любой случайной величины обладает следующими свойствами:

(1) F не убывает,

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$,

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$,

(4) F непрерывна слева.

Верно и обратное: функция F, обладающая свойствами (1) – (4), является функцией распределения случайной величины.

Доказательство. Возьмем пространство элементарных исходов $\Omega = (0,1)$, пусть вероятностная мера на нем — мера Лебега. Поскольку функция F принимает значения на $[0,1]$ и не убывает, можно определить „обратную функцию, продолженную по монотонности":

$$\xi(\omega) = \sup\{x\colon\ F(x) \le \omega\} = \inf\{x\colon\ F(x) > \omega\}, \quad \omega \in (0,1).$$

Нетрудно проверить, что функцией распределения случайной величины ξ будет функция F. $\square$

Функция F, заданная на промежутке $I \subset \mathbb{R}$, называется **абсолютно непрерывной**, если существует функция f на I, интегрируемая по Лебегу, такая, что при каждом $x \in I$ она выражается формулой

$$F(x) = c + \int\limits_a^x f(u)du,$$

где $a \in I$ — фиксированная точка, $c = const$.

Если F абсолютно непрерывна на I, то она непрерывна и при почти любом $x \in I$ существует $F'(x) = f(x)$.

Определение 14. Случайная величина ξ называется **непрерывной**, если ее функция распределения F_ξ абсолютно непрерывна. Функция f_ξ, являющаяся почти всюду производной F_ξ, называется **плотностью распределения**.

Как видно из определения, плотность задана не вполне однозначно: если поменять ее значение на множестве меры Лебега 0, она останется плотностью того же самого распределения.

Пример 57. Пусть функция распределения случайной величины равна

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ \sqrt{x}, & 0<x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$$

Данная функция обладает свойствами (1) – (4), кроме того, она абсолютно непрерывна. Ее производной почти всюду, т. е. плотностью распределения, является функция

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, & 0<x<1,\\ 0, & x\notin[0,1].\end{cases}$$

Значения $f(0)$ и $f(1)$ задавать не обязательно, так как плотность может быть не определена на множестве лебеговской меры 0. Графики функции распределения и плотности распределения показаны на рис. 32.

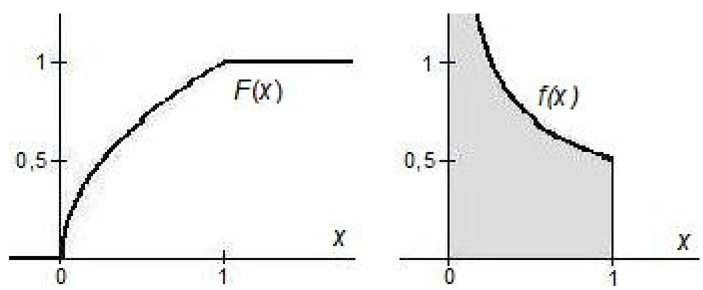

Рис. 32

Лемма 4.1. *Интегрируемая по Лебегу функция f на $\mathbb{R}$ может быть плотностью распределения случайной величины, если и только если*

(1) $f(x)\ge 0$ *при почти всех x,*

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1.$

Это вытекает из свойств (1) – (3) функции распределения. Геометрически это означает, что площадь под графиком плотности равна 1.

4.2 Числовые характеристики случайных величин

Общее определение математического ожидания (10) — через интеграл по вероятностной мере — в случае непрерывной случайной величины сводится к интегралу по числовой оси:

$$\mathbf{E}\,\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, f_\xi(x)dx. \tag{17}$$

Моменты.

Напомним, что k-м начальным моментом случайной величины ξ называется число $m_k = \mathbf{E}\,(\xi^k)$, а k-м центральным моментом число $\mu_k = \mathbf{E}\,(\xi - \mathbf{E}\,\xi)^k$. В случае непрерывной случайной величины их можно вычислить по формулам, аналогичным (17):

$$m_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k f_\xi(x)dx, \qquad \mu_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbf{E}\,\xi)^k f_\xi(x)dx.$$

Дисперсию (2-й центральный момент) также можно вычислить по формуле $\mathbf{D}\,\xi = \mathbf{E}\,(\xi^2) - (\mathbf{E}\,\xi)^2$.

Для математических ожиданий и дисперсий непрерывных случайных величин остаются в силе теоремы 2 и 3. Доказать их можно, приближая непрерывную случайную величину ξ дискретными ξ_n, например, округляя ξ до n десятичных знаков после запятой.

Пример 58. Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ из примера 57.

$$\mathbf{E}\,\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, f_\xi(x)dx = \int\limits_0^1 x\,\frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{1}{3},$$

$$\mathbf{E}\,(\xi^2) = \int\limits_0^1 x^2\,\frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^{3/2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}x^{5/2}\Big|_0^1 = \frac{1}{5},$$

$$\mathbf{D}\,\xi = \mathbf{E}\,(\xi^2) - (\mathbf{E}\,\xi)^2 = \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{45}, \quad \sigma = \sqrt{4/45} \approx 0{,}298.$$

Квантили.

Если случайная величина непрерывна, то неравенства в определении квантили всегда обращаются в равенства:

$$\mathbf{P}\{\xi < c_\gamma\} = \gamma, \qquad \mathbf{P}\{\xi > c_\gamma\} = 1 - \gamma.$$

Геометрически можно находить квантили не только по графику функции распределения, но и по графику плотности (рис. 33). Вертикальная полупрямая, выходящая из точки c_γ на оси Ox, делит площадь под графиком плотности таким образом, что площадь слева равна γ.

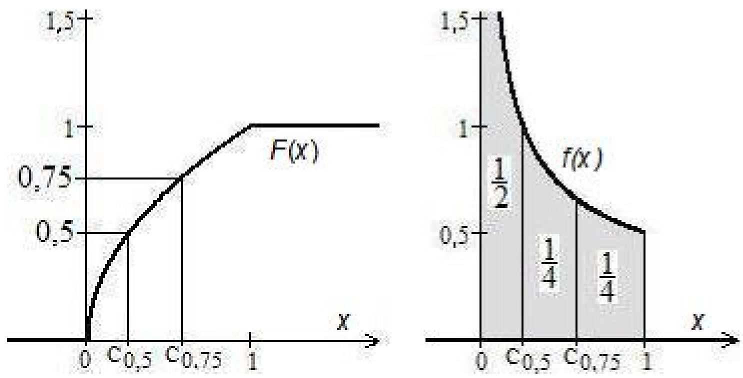

Рис. 33

Моды.

Для непрерывной случайной величины ξ мода имеет совсем иной смысл, чем для дискретной, поскольку для любого числа x имеем $\mathbf{P}\{\xi = x\} = 0$. Если существует кусочно-непрерывная версия плотности непрерывной случайной величины, то модой считают точку максимума этой плотности. Так, в примере 57 мода равна 0 (там плотность стремится к бесконечности). Мода может принимать конечное или бесконечное множество значений, даже целый отрезок (например, у равномерного распределения).

Пример 59. На сфере радиусом 1 фиксирована точка A; точка P равномерно распределена на сфере (рис. 34). Пусть $\xi = AP$. Найти медиану, моду, начальные моменты и дисперсию ξ.

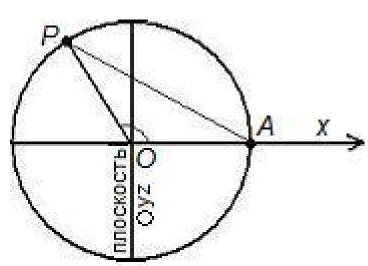

Рис. 34

Случайная величина ξ принимает значения в отрезке $[0,2]$. Пусть $O(0,0,0)$ — центр сферы, $A(1,0,0)$, $P(x,y,z)$. Вычислим функцию распределения ξ. При $0<t<2$

$$F_\xi(t) = \mathbf{P}\{AP<t\} =$$

$$= \mathbf{P}\Big\{2\sin\frac{\angle AOP}{2} < t\Big\} = \mathbf{P}\Big\{\angle AOP < 2\arcsin\frac{t}{2}\Big\} =$$

$$= \mathbf{P}\Big\{x > \cos\Big(2\arcsin\frac{t}{2}\Big)\Big\} = \mathbf{P}\Big\{x > 1-2\Big(\frac{t}{2}\Big)^2\Big\} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}S\{x^2+y^2+z^2=1,\ x>1-t^2/2\} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}2\pi\int\limits_{1-t^2/2}^{1}\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\Big(\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2}\Big)^2}dx = \int\limits_{1-t^2/2}^{1}\frac{dx}{2} = \frac{t^2}{4}.$$

Отсюда видно, что медиана равна $\sqrt{2}$. Плотность распределения при $0<t<2$ равна $f_\xi(t)=F'_\xi(t)=t/2$. Мода равна 2 (диаметру). Вычислим моменты:

$$m_k = \int\limits_0^2 t^k f_\xi(t)dt = \int\limits_0^2 \frac{t^{k+1}}{2}dt = \frac{t^{k+2}}{2(k+2)}\Big|_0^2 = \frac{2^{k+1}}{k+2},$$

$$\mathbf{D}\,\xi = m_2 - m_1^2 = \frac{2^3}{4} - \Big(\frac{2^2}{3}\Big)^2 = \frac{2}{9}.$$

Замечание 4.1. Существуют случайные величины, не являющиеся ни дискретными, ни непрерывными. Например:

а) Пусть ξ равномерно распределена на $[0,2]$, рассмотрим случайную величину $\eta=\min\{\xi,1\}$. Величину η можно назвать смесью непрерывной и дискретной величин, для вычисления ее моментов придется сложить дискретное слагаемое и интеграл.

б) Пусть $\mathbf{P}\{\xi_k=0\}=\mathbf{P}\{\xi_k=1\}=1/2$, все ξ_k независимы. Случайная величина

$$\zeta = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{3^k}\xi_k$$

распределена на канторовом множестве K, имеющем мощность континуум, но меру Лебега 0. Ее функция распределения („канторова лестница") непрерывна, но не абсолютно непрерывна — она возрастает, несмотря на то, что почти всюду (а именно, всюду вне K) имеет производную 0.

Графики функций распределения описанных случайных величин η и ζ показаны на рис. 35.

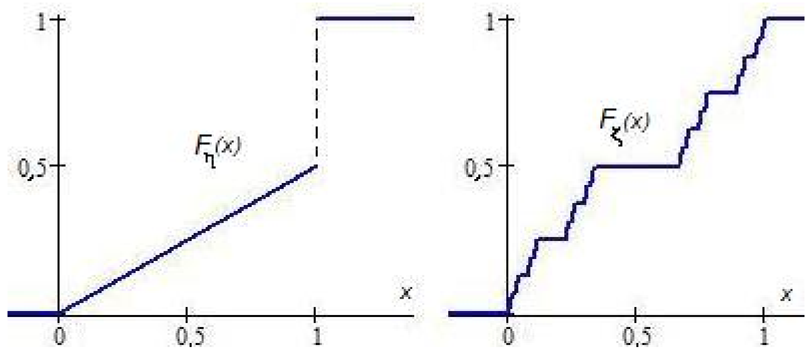

Рис. 35

4.3 Законы распределения непрерывных случайных величин

Равномерное распределение.

Случайная величина ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[a, b]$ (пишут $\xi \sim R[a, b]$ или $\mathcal{L}(\xi) = R[a, b]$), если ее плотность равна

$$f(x) = \begin{cases} (b-a)^{-1}, & x \in (a, b), \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Соответствующая функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ (x-a)/(b-a), & x \in (a, b), \\ 1, & x \ge b. \end{cases}$$

Графики $F(x)$ и $f(x)$ показаны на рис. 36.

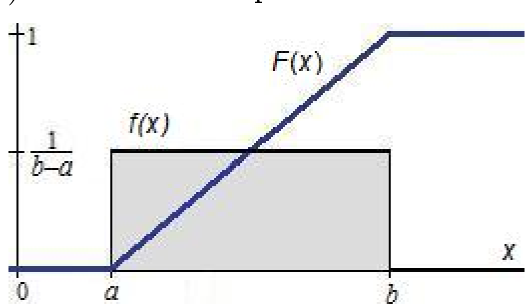

Рис. 36

Нетрудно проверить, что если $\xi_1 \sim R[0,1]$, то

$$\xi = (b-a)\xi_1 + a \sim R[a,b].$$

Поэтому, чтобы вычислить моменты и квантили для любой равномерной случайной величины, нам достаточно сделать это для равномерной на отрезке $[0,1]$:

$$\mathbf{E}\,\xi_1 = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{D}\,\xi_1 = \int_0^1 \Big(x-\frac{1}{2}\Big)^2 dx = \frac{1}{12}, \quad c_\gamma = \gamma.$$

Соответственно, для $\xi \sim R[a,b]$ получаем

$$\mathbf{E}\,\xi = \frac{a+b}{2}, \qquad \mathbf{D}\,\xi = \frac{(b-a)^2}{12}, \qquad c_\gamma = a + \gamma(b-a).$$

Экспоненциальное распределение

Случайная величина ξ имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda > 0$ (обозначение: $\xi \sim Exp(\lambda)$), если ее плотность равна

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Ей соответствует функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$$

Графики показаны на рис. 37.

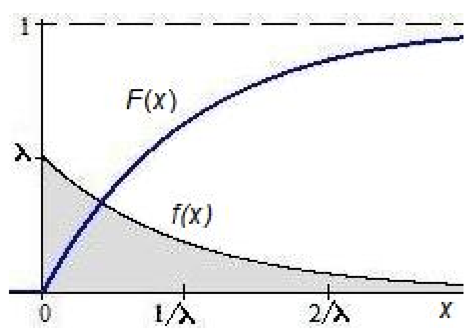

Рис. 37

Легко видеть, что если $\xi_1 \sim Exp(1)$, то $\xi = \lambda^{-1}\xi_1 \sim Exp(\lambda)$. Поэтому вычислим моменты и квантили для экспоненциальной случайной величины с параметром 1. Символом Γ обозначим гамма-функцию Эйлера

$$\Gamma(a) = \int\limits_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx.$$

Известно, что $\Gamma(n) = (n-1)!$

$$\mathbf{E}\,\xi_1 = \int\limits_0^{\infty} x\,e^{-x} dx = \Gamma(2) = 1,$$

$$\mathbf{D}\,\xi_1 = \mathbf{E}\,(\xi_1^2) - (\mathbf{E}\,\xi_1)^2 = \int\limits_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx - 1 = \Gamma(3) - 1 = 1,$$

$$c_\gamma = -\ln(1-\gamma).$$

Соответственно, для $\xi \sim Exp(\lambda)$ получаем

$$\mathbf{E}\,\xi = \lambda^{-1}, \qquad \mathbf{D}\,\xi = \lambda^{-2}, \qquad c_\gamma = -\lambda^{-1}\ln(1-\gamma).$$

В частности, медиана такой случайной величины равна $\dfrac{\ln 2}{\lambda}$, т. е. меньше математического ожидания в 1,44 раза. Еще сильнее от математического ожидания отличается мода — она равна 0.

Уникальное свойство экспоненциального распределения — „отсутствие памяти”: условное распределение случайной величины $\xi - T$ при условии $\xi \geq T$ совпадает с безусловным распределением ξ. Действительно,

$$\mathbf{P}\{\xi - T < t | \xi \geq T\} = \frac{\mathbf{P}\{T \leq \xi < T + t\}}{\mathbf{P}\{\xi \geq T\}} = \\ = \frac{e^{-\lambda T} - e^{-\lambda(T+t)}}{e^{-\lambda T}} = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Поэтому экспоненциальная случайная величина может моделировать срок службы изделия до первой поломки (если нет износа), или время до первого появления какого-либо события, не зависящего от предыдущих событий. Например, эти случайные величины описывают время жизни нестабильной элементарной частицы или атомного ядра. В последнем случае медиану случайной величины называют периодом полураспада: для каждого атома из образца изотопа вероятность распада в течение этого времени равна $1/2$, и по закону больших чисел (см. параграф 6.3) распадется примерно половина всех атомов.

Еще одно интересное свойство экспоненциального распределения: если случайные величины $\xi_i \sim Exp(\lambda_i)$, $i = 1, \dots, n$, независимы, то их минимум имеет распределение $Exp(\lambda_1 + \ldots + +\lambda_n)$. Действительно, при $x > 0$

$$F_{\min\{\xi_1,\xi_2\}}(x) = \\ = 1 - \mathbf{P}\{\min\{\xi_1, \xi_2\} \geq x\} = 1 - \mathbf{P}\{\xi_1 \geq x, \xi_2 \geq x\} = \\ = 1 - \mathbf{P}\{\xi_1 \geq x\}\mathbf{P}\{\xi_2 \geq x\} = 1 - e^{-\lambda_1 x} e^{-\lambda_2 x} = 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}.$$

Случаи $n = 3, 4, \dots$ рассматриваются аналогично.

Распределение Коши.

Случайная величина имеет распределение Коши с параметрами a и $r > 0$, если ее плотность и функция распределения равны, соответственно,

$$f(x) = \frac{r}{\pi(r^2 + (x-a)^2)}; \qquad F(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x-a}{r} + \frac{1}{2}.$$

Квантили этой случайной величины $c_p = a + r\ \operatorname{tg}(\pi p - \pi/2)$, в частности, медиана и квартили равны

$$c_{1/2} = a, \qquad c_{1/4} = a - r, \qquad c_{3/4} = a + r.$$

Таким образом, параметр a — это медиана, r — половина интерквартильного размаха. Моменты для распределения Коши не существуют, поскольку интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x) dx$$

расходится. И несмотря на то, что плотность распределения симметрична относительно точки a, нельзя утверждать, что математическое ожидание равно a — оно не существует. Поэтому закон больших чисел для распределения Коши не работает.

Пример 60. На плоскости Oxy зафиксируем точку $A(a, b)$, где $b \neq 0$. Пусть прямая проходит через A, и ее направление распределено равномерно. Тогда с вероятностью 1 прямая пересечет ось Ox, и абсцисса точки пересечения будет иметь распределение Коши с параметрами a и $r = |b|$.

Определение 15. Случайную величину ξ называют **симметричной** относительно числа c, если величины ξ и $2c-\xi$ распределены одинаково.

Это равносильно тому, что во всех точках x непрерывности функции распределения F_ξ выполнено
$$F_\xi(2c-x) = 1 - F_\xi(x),$$
т. е. график F_ξ (за исключением точек разрыва) центрально-симметричен относительно точки $(c, 1/2)$. Если же случайная величина ξ непрерывна, то симметричность относительно c равносильна также тому, что при всех x выполнено
$$f_\xi(2c-x) = f_\xi(x),$$
т. е. график плотности имеет ось симметрии $\{x = c\}$. Пример графиков F_ξ и $f_\xi(x)$ для симметричной ξ показан на рис. 38.

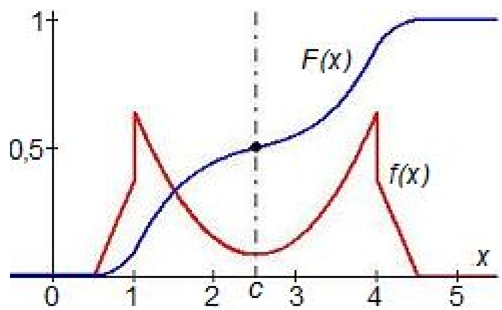

Рис. 38

Нетрудно проверить, что если ξ симметрична относительно c, то ее математическое ожидание (если оно определено) и медиана равны c, а все нечетные центральные моменты, которые существуют, равны 0. Введем безразмерную величину, характеризующую асимметрию распределения случайной величины.

Определение 16. Пусть случайная величина имеет 3-й центральный момент $\mu_3 = \mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}\,\xi)^3$. Тогда ее **коэффициентом асимметрии** называется число μ_3/σ^3, где $\sigma = \sqrt{\mathbf{D}\,\xi}$.

Нестрого говоря, коэффициент асимметрии положителен, если правый хвост распределения длиннее левого, и отрицателен в противном случае.

Пример 61. Вычислим коэффициент асимметрии экспоненциальной случайной величины $\xi \sim Exp(\lambda)$. Имеем $\mathbf{E}\,\xi = 1/\lambda$, $\sigma = 1/\lambda$. Вычислим μ_3, применив замену $y = \lambda x$.

$$\mathbf{E}\left(\xi - \frac{1}{\lambda}\right)^3 = \int\limits_0^{+\infty} \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^3 \lambda e^{-\lambda x} dx =$$

$$= \frac{1}{\lambda^4} \int\limits_0^{+\infty} (y-1)^3 \lambda e^{-y} dy = \frac{1}{\lambda^3} \int\limits_0^{+\infty} (y^3 - 3y^2 + 3y - 1)^3 e^{-y} dy =$$

$$= \frac{\Gamma(4) - 3\Gamma(3) + 3\Gamma(2) - \Gamma(1)}{\lambda^3} = \frac{6 - 3 \cdot 2 + 3 - 1}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda^3}.$$

Окончательно получаем $\mu_3/\sigma^3 = 2$.

Для симметричной случайной величины, имеющей 3-й момент (например, для равномерной, дискретной равномерной, биномиальной с $p = 1/2$, или нормальной) коэффициент асимметрии равен 0. Но обратное неверно.

Пример 62. (несимметричная случайная величина с коэффициентом асимметрии 0). Пусть ряд распределения ξ выглядит так:

-2	1	3
0,4	0,5	0,1

Для нее получаем $\mathbf{E}\,\xi = 0{,}4(-2) + 0{,}5 \cdot 1 + 0{,}1 \cdot 3 = 0$;

$$\mu_3 = \mathbf{E}\,(\xi - 0)^3 = 0{,}4(-8) + 0{,}5 \cdot 1 + 0{,}1 \cdot 27 = 0.$$

4.4 Нормальные распределения

Определение 17. Случайная величина ξ имеет **нормальное** (гауссовское) распределение с параметрами a и σ^2, $\sigma > 0$ (пишут $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$), если ее плотность распределения равна

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}.$$

Нормальное распределение называют **стандартным** при $a = 0$, $\sigma = 1$, соответственно, его плотность

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

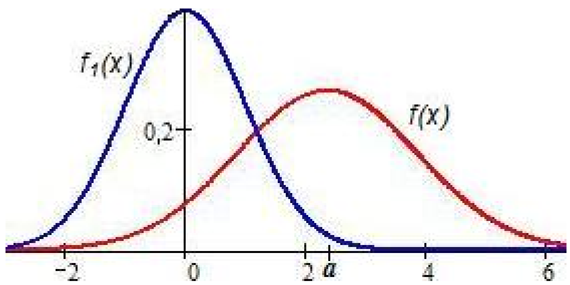

Рис. 39

Докажем, что для $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$ математическое ожидание и дисперсия

$$\mathbf{E}\,\xi = a, \qquad \mathbf{D}\,\xi = \sigma^2. \tag{18}$$

Нетрудно проверить, что если случайная величина ξ_1 имеет стандартное нормальное распределение ($\xi_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$), то величина $\xi = a + \sigma\xi_1$ будет иметь распределение $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ (рис. 39). Поэтому, в силу теорем 2 и 3, достаточно проверить (18) для случая $a = 0$, $\sigma = 1$.

$$\mathbf{E}\,\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-x^2/2} dx = 0$$

(интеграл нечетной функции);

$$\mathbf{D}\,\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, d(e^{-x^2/2}) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-x^2/2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = 0 + 1.$$

Функция распределения для $\mathcal{N}(0,1)$ (см. график на рис. 40) имеет специальное обозначение $\Phi(x)$, она выражается неберущимся интегралом

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-u^2/2} du,$$

который можно с высокой точностью вычислить через ряд

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!(2n+1)} x^{2n+1}.$$

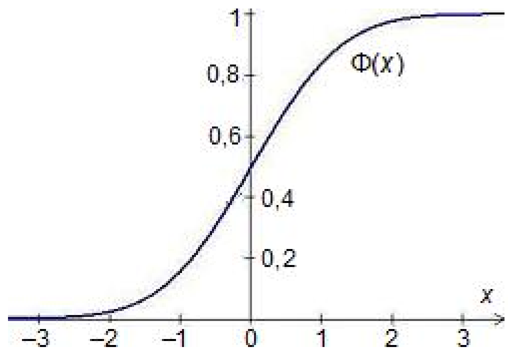

Рис. 40

Квантили стандартного нормального распределения обозначаются u_γ, т. е. $u_\gamma = \Phi^{-1}(\gamma)$. Из четности плотности распределения очевидно, что $u_{1-\gamma} = -u_\gamma$, поэтому достаточно знать значения u_γ при $\gamma > 1/2$. Выпишем некоторые из них:

$$\begin{aligned} u_{0{,}75} &= -u_{0{,}25} \approx 0{,}67 \\ u_{0{,}9} &= -u_{0{,}1} \approx 1{,}28 \\ u_{0{,}95} &= -u_{0{,}05} \approx 1{,}64 \\ u_{0{,}99} &= -u_{0{,}01} \approx 2{,}33 \\ u_{0{,}999} &= -u_{0{,}001} \approx 3{,}09 \end{aligned}$$

Если $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$, то из соотношения $\xi = a + \sigma\xi_1$ получаем

$$F_\xi(x) = \Phi\Big(\frac{x-a}{\sigma}\Big),$$

$$\mathbf{P}\{b < \xi < c\} = F_\xi(c) - F_\xi(b) = \Phi\Big(\frac{c-a}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{b-a}{\sigma}\Big).$$

Квантили произвольной нормальной случайной величины $\xi \sim \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$ находятся по формуле

$$c_\gamma = a + \sigma\, u_\gamma.$$

Пример 63. В июне в Москве среднесуточная температура имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $a = +18^o C$ и среднеквадратичным отклонением $\sigma = 3^o$.

1)С какой вероятностью среднесуточная температура 9 июня будет от $+15^o$ до $+24^o$?

2) В какой интервал среднесуточная температура попадет с вероятностью 90%?

Для $\xi \sim \mathcal{N}(18, 3^2)$ получаем

$$\mathbf{P}\{15 < \xi < 24\} = \Phi\Big(\frac{24-18}{3}\Big) - \Phi\Big(\frac{15-18}{3}\Big) = \\ = \Phi(2) - \Phi(-1) \approx 0{,}98 - 0{,}16 = 0{,}82;$$

наименее широкий интервал с 90% вероятностью попадания — интервал между 5-й и 95-й процентилями

$$c_{0,05} = 18 + 3u_{0,05} = 18 - 3 \cdot 1{,}64 \approx 13,$$
$$c_{0,95} = 18 + 3u_{0,95} = 18 + 3 \cdot 1{,}64 \approx 23,$$

так что $\mathbf{P}\{13 < \xi < 23\} \approx 0{,}9$.

Случайные величины с распределениями, близкими к нормальным, широко распространены в природе и часто появляются в задачах математической статистики. Причина в том, что при суммировании большого числа независимых случайных величин с небольшими дисперсиями получаются случайные величины, близкие к нормальным: это вытекает из центральной предельной теоремы (см. параграф 6.4).

Теорема 5. *Если случайные величины ξ и η независимы, $\xi \sim \sim \mathcal{N}(a, \sigma_1^2)$, $\eta \sim \mathcal{N}(b, \sigma_2^2)$, то $\xi + \eta \sim \mathcal{N}(a + b, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.*

Эта теорема будет доказана в параграфе 4.6.

4.5 Функции от одномерных случайных величин

Линейными преобразованиями случайных величин мы уже пользовались в параграфе 4.3. Подытожим свойства этих преобразований в следующей теореме.

Теорема 6. *Пусть ξ — случайная величина; $\eta = k\xi + b$, где $k \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$. Тогда:*

1. *в точках непрерывности $F_\eta(x) = F_\xi\Big(\dfrac{x-b}{k}\Big)$ (если $k > 0$) или $F_\eta(x) = 1 - F_\xi\Big(\dfrac{x-b}{k}\Big)$ (если $k < 0$);*
2. *если c_α — квантиль уровня α для ξ, то $kc_\alpha + b$ — квантиль уровня α (если $k > 0$) или уровня $1 - \alpha$ (если $k < 0$) для η;*
3. *если $\exists\ \mu_n = \mathbf{E}\,(\xi - \mathbf{E}\,\xi)^n$, то $\mathbf{E}\,(\eta - \mathbf{E}\,\eta)^n = k^n \mu_n$;*

4. *если ξ непрерывна, то*

$$f_\eta(x) = \frac{1}{|k|} f_\xi\Big(\frac{x-b}{k}\Big).$$

График функции распределения F_η получается из графика F_ξ растяжением по горизонтали в k раз и сдвигом вправо на b (см. рис. 41). Если $k < 0$, то график нужно еще зеркально отразить относительно прямой $y = 1/2$, с точностью до точек разрыва. График плотности преобразуется в горизонтальном направлении точно так же, при этом сжимается в $|k|$ раз по вертикали, так что площадь под ним не меняется (она всегда равна 1).

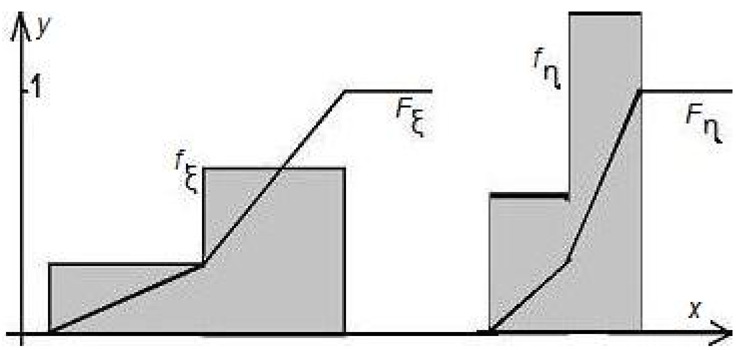

Рис. 41

Из теоремы 6 вытекает, что при линейном преобразовании случайной величины коэффициент асимметрии не меняется (при $k > 0$) или только меняет знак (при $k < 0$).

Обобщим теорему 6 для нелинейных монотонных преобразований случайных величин.

Теорема 7. *Пусть ξ — случайная величина; пусть $\eta = g(\xi)$, где g — строго монотонная функция. Тогда*:

1. *в точках непрерывности $F_\eta(x) = F_\xi\big(g^{-1}(x)\big)$ (если g возрастает) или $F_\eta(x) = 1 - F_\xi\big(g^{-1}(x)\big)$ (если g убывает)*;

2. *если c_α — квантиль уровня α для ξ, то $g(c_\alpha)$ — квантиль уровня α (если g возрастает) или уровня $1-\alpha$ (если g убывает) для η*;

3. *если ξ непрерывна и g дифференцируема, то*

$$f_\eta(x) = \frac{1}{\big|g'\big(g^{-1}(x)\big)\big|} f_\xi\big(g^{-1}(x)\big).$$

Пример 64. Ведро в форме конуса с углом полураствора 30^o установлено вершиной вниз. Объем V дождевой воды, которая наберется в него за день, имеет экспоненциальное распределение с математическим ожиданием 0,013 м^3. Найти распределение глубины воды в ведре и ее математическое ожидание.

Случайная величина h принимает положительные значения. Объем конуса высоты h с углом полураствора 30^o равен

$$V = \frac{h}{3}\,\pi\big(h\ \mathrm{tg}\ 30^o\big)^2 = \frac{\pi}{9}h^3.$$

Следовательно,

$$h = \sqrt[3]{9V/\pi} \approx \frac{1}{3}\sqrt[3]{V/0{,}013}.$$

Поскольку $V \sim Exp\Big(\dfrac{1}{0{,}013}\Big)$, нам удобнее рассмотреть величину $v = V/0{,}013 \sim Exp(1)$, тогда $h = g(v) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{v}$. При $x > 0$ получаем

$$F_h(x) = F_v(27x^3) = 1 - e^{-27x^3},$$

$$f_h(x) = \frac{1}{g'(27x^3)} f_v(27x^3) = \frac{e^{-27x^3}}{\frac{1}{9}(27x^3)^{-2/3}} = 81x^2e^{-27x^3}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{E}\,h = \int\limits_0^{+\infty} 81x^2e^{-27x^3}\,x\,dx = \int\limits_0^{+\infty} e^{-u}\,\frac{1}{3}\sqrt[3]{u}\,du = \frac{1}{3}\Gamma\Big(\frac{4}{3}\Big) \approx 0{,}30\text{ м}.$$

Если функция g не монотонна, то для вычисления функции распределения величины $\eta = g(\xi)$ нет универсальной формулы. Какие сложности возникают, увидим на следующем примере.

Пример 65. Пусть $\psi \sim R[-1;2]$. Найти распределение случайной величины $h = \psi^2$.

Величина h принимает значения из отрезка $[0;4]$. Найдем $F_h(x) = \mathbf{P}\{h < x\}$ при $0 < x < 4$.

$$\mathbf{P}\{h < x\} = \mathbf{P}\{|\psi| < \sqrt{x}\} =$$
$$= \begin{cases} \mathbf{P}\{-\sqrt{x} < \psi < \sqrt{x}\} & = 2\sqrt{x}/3 \quad \text{при } 0 < x \le 1, \\ \mathbf{P}\{-1 < \psi < \sqrt{x}\} & = (1+\sqrt{x})/3 \quad \text{при } 1 < x < 4. \end{cases}$$

Плотность распределения

$$f_h(x) = F_h'(x) = \begin{cases} 1/3\sqrt{x} & \text{при } 0 < x < 1, \\ 1/6\sqrt{x} & \text{при } 1 < x < 4, \\ 0 & \text{при } x \notin [0,4]. \end{cases}$$

Для вычисления моментов $\eta = g(\xi)$ нет таких же простых формул, как в случае линейной g. Но моменты можно вычислять и без нахождения распределения величины η — это бывает особенно удобно, когда g не монотонна. Общая формула такова:

$$\mathbf{E}\, g^n(\xi) = \sum_i g^n(x_i)\, \mathbf{P}\{\xi = x_i\} \qquad \text{для дискретной } \ \xi,$$

$$\mathbf{E}\, g^n(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} g^n(x)\, f_\xi(x) dx \qquad \text{для непрерывной } \ \xi.$$

В примере 64 можно вычислить математическое ожидание так:

$$\mathbf{E}\, h = \int\limits_0^{+\infty} f_v(x) g(x) dx = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\, \frac{1}{3}\sqrt[3]{x}\, dx = \frac{1}{3}\Gamma\Big(\frac{4}{3}\Big) \approx 0{,}30.$$

В примере же 65 такой способ вычисления математического ожидания существенно легче, чем использование плотности распределения:

$$\mathbf{E}\, h = \int\limits_{-1}^{2} \frac{1}{3} x^2 dx = \frac{1}{9} x^3 \Big|_{-1}^{2} = 1.$$

Теперь рассмотрим свойства преобразований случайных величин выпуклыми функциями.

Определение 18. Функция f, определенная на промежутке $D \subset \mathbb{R}$, называется выпуклой вниз, если для любых $x, y \in D$, $x \neq y$, выполнено

$$\forall c \in (0,1) \qquad f\big(cx + (1-c)y\big) \leq cf(x) + (1-c)f(y). \tag{19}$$

Если неравенство (19) всегда будет строгим, то f называется строго выпуклой вниз. Если знак неравенства (19) обратный, то f называется выпуклой вверх.

Если функция (строго) выпукла вниз, то через любую точку P ее графика можно провести такую прямую ℓ_P, что все остальные точки графика будут лежать (строго) выше ℓ_P. Разумеется, если функция дифференцируема в x_P, то прямая ℓ_P будет единственной — это касательная.

Для дважды дифференцируемой функции хорошо известно достаточное условие выпуклости: если на всем D выполнено $f'' \geq 0$ (или $f'' > 0$), то f выпукла вниз (соответственно, строго выпукла вниз).

Теорема 8. (*Неравенство Йенсена*). *Если случайная величина ξ принимает значения на промежутке $D \subset \mathbb{R}$, а функция f выпукла вниз на D, то*

$$\mathbf{E}\, f(\xi) \geq f(\mathbf{E}\,\xi). \tag{20}$$

Если f строго выпукла на D, то неравенство строгое.

Доказательство. Пусть $a = \mathbf{E}\,\xi$. В силу выпуклости существует такое k, что $f(x) \geq f(a) + k(x - a)$ при всех $x \in D$. Поэтому

$$\mathbf{E}\, f(\xi) \geq \mathbf{E}\left(f(a) + k(\xi - a)\right) = f(a) + k(\mathbf{E}\,\xi - a) = f(a).$$

Для строго выпуклой f имеем $f(x) > f(a) + k(x - a)$ при $x \neq a$, и неравенство (20) будет строгим, так как $\mathbf{P}\{\xi = a\} < 1$. $\square$

Выпишем несколько частных случаев неравенства Йенсена:

$\mathbf{E}\,|\xi| \geq |E\xi|$,

$\mathbf{E}\,\xi^n > (\mathbf{E}\,\xi)^n$ при четных $n \in \mathbb{N}$,

$\mathbf{E}\, e^{\xi} > e^{\mathbf{E}\,\xi}$,

кроме того, для положительной ξ выполнены неравенства

$\mathbf{E}\,\xi^p > (\mathbf{E}\,\xi)^p$ при $p < 0$ и $p > 1$,

$\mathbf{E}\,\xi^p < (\mathbf{E}\,\xi)^p$ при $0 < p < 1$ (функция x^p выпукла вверх),

$\mathbf{E}\, \ln \xi < \ln \mathbf{E}\,\xi$ (функция ln выпукла вверх).

4.6 Характеристические функции

До сих пор мы использовали два способа задания случайной величины:

1) Ряд распределения (для дискретной случайной величины) или плотность распределения (для непрерывной).

2) Функция распределения (во всех случаях).

Однако, есть и более хитрый способ задания произвольной случайной величины. Характеристические функции могут быть удобнее в тех случаях, когда, например, плотность или функция распределения имеют очень сложный вид. Также характеристические функции являются удобным инструментом для изучения слабой сходимости (см. параграф 6.2).

Определение 19. Характеристическая функция случайной величины ξ задается формулой

$$\varphi_\xi(t) = \mathbf{E}\ e^{it\xi}.$$

Если случайная величина дискретна, $\mathbf{P}\{\xi = x_k\} = p_k$ при $k = 1, 2, \ldots$, то

$$\varphi_\xi(t) = \sum_k p_k e^{itx_k}.$$

Если случайная величина непрерывна, $f(x)$ — ее плотность, то

$$\varphi_\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{itx} dx.$$

Свойства характеристических функций

1. Характеристическая функция однозначно определяет распределение случайной величины.

2. Характеристическая функция ограничена: $|\varphi_\xi(t)| \le 1$.

3. $\varphi_\xi(0) = 1$.

4. Характеристическая функция всюду непрерывна.

5. Положительная определенность: если $t_1 < \ldots < t_n$; $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, то

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} z_j \overline{z}_k \varphi_\xi(t_j - t_k) \ge 0.$$

6. Если k и b — константы, то

$$\varphi_{k\xi}(t) = \varphi_\xi(kt), \qquad \varphi_{\xi+b}(t) = e^{ibt}\varphi_\xi(t). \tag{21}$$

7. При сложении независимых случайных величин их характеристические функции перемножаются. Действительно, пусть ξ и η — независимые случайные величины. Тогда

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = \mathbf{E}\, e^{it(\xi+\eta)} = \mathbf{E}\, (e^{it\xi}\, e^{it\eta}) = \mathbf{E}\, e^{it\xi}\, \mathbf{E}\, e^{it\eta},$$

поскольку случайные величины $e^{it\xi}$ и $e^{it\eta}$ также независимы.

8. Если случайная величина имеет k-й начальный момент $m_k = \mathbf{E}\,(\xi^k)$, то характеристическая функция имеет непрерывную k-ю производную, причем

$$\frac{d^k}{dt^k}\varphi_\xi(0) = i^k m_k.$$

Выпишем характеристические функции самых известных распределений (дискретных, затем непрерывных).

распределение	p_k	$\varphi_\xi(t)$
Геометрическое	$p(1-p)^{k-1}$	$\dfrac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$
Биномиальное $Bi(n;p)$	$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	$(1-p+pe^{it})^n$
Пуассоновское $\Pi(\lambda)$	$\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$	$\exp\bigl(\lambda(e^{it}-1)\bigr)$

распределение	$f(x)$	$\varphi_\xi(t)$
Равном. $R[a,b]$	$(b-a)^{-1}\mathbf{1}_{[a,b]}$	$\dfrac{e^{ibt}-e^{iat}}{it(b-a)}$
Экспон. $Exp(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{\{x>0\}}$	$\dfrac{\lambda}{\lambda - it}$
Норм. $\mathcal{N}(a,\sigma^2)$	$\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\dfrac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}$	$\exp\left(iat - \dfrac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$
Коши	$\bigl(\pi(1+x^2)\bigr)^{-1}$	$e^{-\lvert t\rvert}$

Пример 66. Пусть $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ — независимые случайные величины, равномерно распределенные на $[0,1]$. Найти первые три начальных момента для случайной величины $Z = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4$.

Плотность распределения Z можно вычислить по формуле свертки (см. параграф 5.8), но это весьма трудоемко, и получатся 4 разных многочлена на отрезках $[0,1]$, $[1,2]$, $[2,3]$, $[3,4]$. Задачу проще решить при помощи характеристических функций.

$$f(t) = \varphi_{\xi_i}(t) = \int_0^1 1\cdot e^{itx}dx = \frac{e^{it}-1}{it} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(it)^{n-1}}{n!} = 1 + \frac{it}{2} - \frac{t^2}{6} - \frac{it^3}{24} + \ldots$$

По свойству 7 получаем $\varphi_Z(t) = f^4(t)$. Вычислим начальные моменты:

$$m_1 = \mathbf{E}\,Z = i^{-1}\frac{d}{dt}\varphi_Z(0) = (-i)\ 4f^3(0)f'(0) = (-i)\ 4(i/2) = 2,$$

$$m_2 = i^{-2}\frac{d^2}{dt^2}\varphi_Z(0) = -\big(4f^3(0)f''(0) + 12f^2(0)(f'(0))^2\big) =$$
$$= -\Big(4\cdot\frac{-1}{3} + 12\cdot\Big(\frac{i}{2}\Big)^2\Big) = -\Big(-\frac{4}{3} - 3\Big) = \frac{13}{3}$$

(попутно находим $\mathbf{D}\,Z = m_2 - m_1^2 = 1/3$),

$$m_3 = i^{-3}\frac{d^3}{dt^3}\varphi_Z(0) =$$
$$= i\big(4f^3(0)f'''(0) + 36f^2(0)f'(0)f''(0) + 24f(0)(f'(0))^3\big) =$$
$$= i\Big(4\cdot\frac{-i}{4} + 36\cdot\frac{i}{2}\cdot\frac{-1}{3} + 24\Big(\frac{i}{2}\Big)^3\Big) = i(-i - 6i - 3i) = 10.$$

При помощи характеристических функций легко доказывается теорема 5 о том, что сумма независимых нормальных случайных величин также нормальна.

Доказательство. Вычтем из случайных величин ξ и η их математические ожидания. Теперь достаточно рассмотреть случай $\xi \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$ и $\eta \sim \mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$. Характеристические функции

$$\varphi_\xi(t) = \exp\Big(-\frac{\sigma_1^2 t^2}{2}\Big), \qquad \varphi_\eta(t) = \exp\Big(-\frac{\sigma_2^2 t^2}{2}\Big).$$

Следовательно,

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_\xi(t)\varphi_\eta(t) = \exp\Big(-\frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t^2}{2}\Big).$$

В силу того, что распределение случайной величины однозначно определяется ее характеристической функцией, отсюда видно, что

$$\mathcal{L}(\xi + \eta) = \mathcal{N}(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

□

Теорема 9. (*Бохнер — Хинчин*). *Для того, чтобы функция $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ была характеристической функцией некоторой случайной величины, необходимо и достаточно, чтобы она обладала свойствами* **2, 3, 4, 5.**

Случайную величину можно восстановить по характеристической функции при помощи обратного преобразования Фурье. Пусть дана случайная величина ξ, характеристическая функция которой равна $\varphi_\xi(t)$. Тогда:

1) Если ξ дискретна и принимает целые значения, то

$$\mathbf{P}\{\xi = n\} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-itn}\varphi_\xi(t)dt.$$

2) Если ξ непрерывна, то ее плотность вычисляется так:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int\limits_{-T}^{T} e^{-itx}\varphi_\xi(t)dt.$$

Задачи по теме главы 4

4.1. Плотность распределения случайной величины ξ равна

$$f_\xi(x) = \begin{cases} a/\sqrt{1-x^2}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Чему равно a? Найти функцию распределения и дисперсию ξ.

4.2. Плотность распределения f_ξ случайной величины ξ задана графиком на рис. 42.

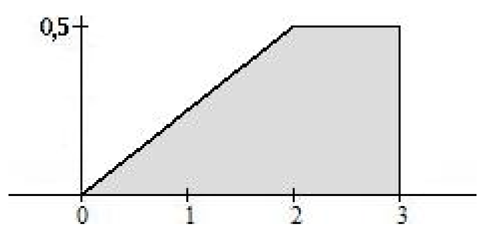

Рис. 42

Построить график функции распределения F_ξ и вычислить математическое ожидание ξ.

4.3. Функция распределения случайной величины ξ равна

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ 0{,}5x^2 & \text{при } 0 \le x \le 1, \\ x - 0{,}5 & \text{при } 1 \le x \le 1{,}5, \\ 1 & \text{при } x \ge 1{,}5. \end{cases}$$

Найти плотность распределения f_ξ, математическое ожидание и дисперсию ξ.

4.4. Функция распределения F_ξ случайной величины ξ задана графиком на рис. 43.

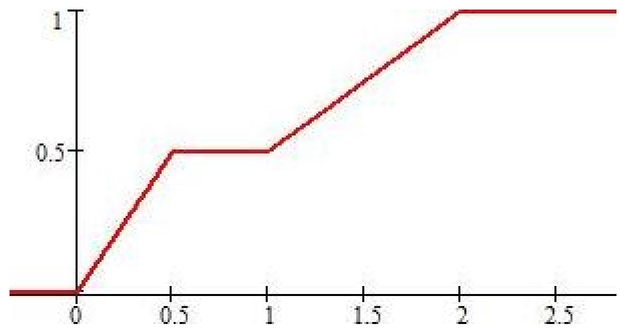

Рис. 43

Построить график плотности распределения f_ξ и вычислить для ξ математическое ожидание и дисперсию.

4.5. Дана случайная величина X, равномерно распределенная на $[0; 2]$. Пусть

$$\xi = \begin{cases} X, & \text{если выпал орел,} \\ 2X, & \text{если выпала решка,} \end{cases}$$

причем поведение монеты не зависит от X. Для случайной величины ξ построить график функции распределения, найти плотность распределения, математическое ожидание и медиану.

4.6. Пусть точка P равномерно распределена внутри правильного n-угольника. Для случайной величины ξ, равной расстоянию от P до границы n-угольника, найти коэффициент асимметрии.

4.7. Найти дисперсию случайной величины ξ с плотностью распределения $f_\xi(x) = \dfrac{1}{2}e^{-|x|}$.

4.8. Даны независимые случайные величины X, Y, Z, равномерно распределенные на $[0; 1]$. Для случайной величины

$$\xi = \min\{X, Y, Z\}$$

построить график функции распределения, найти плотность распределения, математическое ожидание, дисперсию и медиану.

4.9. Пусть ξ, η, ζ — независимые случайные величины с экспоненциальным распределением с математическое ожиданием 1. Для случайной величины $Z = \max\{\xi, \eta, \zeta\}$ построить график функции распределения, найти плотность распределения, математическое ожидание, дисперсию и моду.

4.10. Пусть ξ и η — независимые случайные величины с экспоненциальным распределением, $\mathbf{E}\,\xi = t$, $\mathbf{E}\,\eta = T > t$. Найти вероятность события $\{\xi > \eta\}$.

4.11. Для случайной величины $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ найти центральный момент μ_4.

4.12. Для случайной величины $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ доказать, что при любом $k \geq 1$

$$\mathbf{P}\{\xi > m + k\sigma\} = \mathbf{P}\{\xi < m - k\sigma\} < \frac{1}{k\sqrt{2\pi}} e^{-k^2/2}.$$

4.13. Предположим, что рост баскетболистов распределен по нормальному закону со средним 2 м и среднеквадратичным отклонением 0,1 м.

а) Какой высоты h должна быть дверь, чтобы через нее прошли, не нагибаясь, 90% баскетболистов ?

б) Найти средний рост тех 10%, которые через эту дверь не пройдут, т. е. $\mathbf{E}\,(\xi | \xi > h)$.

4.14. Пусть $\xi \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Найти математическое ожидание и медиану случайной величины $|\xi|$.

4.15. Пусть случайная величина ξ имеет распределение $Exp(1)$. При каком значении константы c величина $\eta = e^{c\xi}$ будет распределена равномерно?

4.16. Случайная величина X равномерно распределена на $[0; 1]$; пусть $\xi = \ln X$. Для случайной величины ξ построить график функции распределения, найти плотность распределения, математическое ожидание, дисперсию и медиану.

4.17. Дана случайная величина $\xi \sim R[-1, 2]$. Найти функции распределения и плотности распределения величин

$$\text{а) } \zeta = 2\xi + 3, \qquad \text{б) } \eta = 2^{\xi}, \qquad \text{в) } \theta = |\xi|.$$

4.18. Вычислить характеристические функции для случайных величин, перечисленных в таблице в параграфе 4.6.

4.19. Пусть случайные величины X, Y, Z — независимые, равномерно распределенные на $[0; 1]$. Вычислить характеристическую функцию для случайной величины $\xi = X + 2Y + 3Z$.

5 Случайные векторы

5.1 Двумерная функция распределения

На практике часто возникают ситуации, когда в эксперименте одновременно наблюдаются несколько параметров, каждый из которых является случайной величиной. В этом случае говорят о системе случайных величин, которую принято называть случайным вектором, или многомерной случайной величиной.

В этой главе для простоты обозначений мы будем говорить только о двумерных случайных векторах. **Двумерным случайным вектором** называется двумерная действительная вектор-функция $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, каждая компонента которой $\mathcal{F}$-измерима.

Определение 20. Функция распределения случайного вектора ξ равна $F_\xi(x, y) = F_{(\xi_1,\xi_2)}(x, y) = \mathbf{P}\{\xi_1 < x,\ \xi_2 < y\}$.

То есть значение функции распределения в точке (x, y) равно вероятности попадания случайной точки с координатами (ξ_1, ξ_2) в область $(-\infty, x) \times (-\infty, y)$, см. рис. 44.

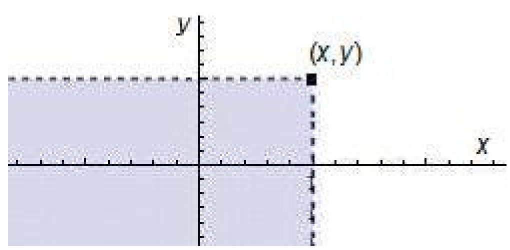

Рис. 44

Функции распределения $F_{\xi_1}(x)$ и $F_{\xi_2}(y)$ первой и второй компонент ξ_1 и ξ_2 случайного вектора ξ называются **маргинальными функциями распределения**. Заметим, что в общем случае

$$F_\xi(x, y) \neq F_{\xi_1}(x) F_{\xi_2}(y).$$

Теорема 10. *Функция распределения $F_\xi(x, y)$ случайного вектора обладает следующими свойствами:*

1. $F_\xi(-\infty, -\infty) = F_\xi(-\infty, y) = F_\xi(x, -\infty) = 0$;
2. $F_\xi(+\infty, +\infty) = 1$;
3. $F_\xi(x, +\infty) = F_{\xi_1}(x),\ F_\xi(+\infty, y) = F_{\xi_2}(y)$;
4. $F_\xi(x, y)$ *— неубывающая функция по x и по y*;
5. $F_\xi(x, y)$ *непрерывна слева по каждой из переменных x, y.*

Эта теорема доказывается аналогично теореме для одномерной функции распределения (см. параграф 3.1).

Вычислим вероятность попадания случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$ в прямоугольник $[a, b) \times [c, d)$:

$$\mathbf{P}\{\xi \in [a,b) \times [c,d)\} = \mathbf{P}\{a \le \xi_1 < b,\, c \le \xi_2 < d\} =$$
$$= \mathbf{P}\{a \le \xi_1 < b,\, \xi_2 < d\} - \mathbf{P}\{a \le \xi_1 < b,\, \xi_2 < c\} =$$
$$= \mathbf{P}\begin{Bmatrix}\xi_1 < b\\ \xi_2 < d\end{Bmatrix} - \mathbf{P}\begin{Bmatrix}\xi_1 < a\\ \xi_2 < d\end{Bmatrix} - \mathbf{P}\begin{Bmatrix}\xi_1 < b\\ \xi_2 < c\end{Bmatrix} + \mathbf{P}\begin{Bmatrix}\xi_1 < a\\ \xi_2 < c\end{Bmatrix} =$$
$$= F_\xi(b,d) - F_\xi(a,d) - F_\xi(b,c) + F_\xi(a,c).$$

Пример 67. Бросили три монеты. Пусть $\xi_1 = 1$, если на первой монете выпал герб, и $\xi_1 = 0$ в противном случае, а ξ_2 равна общему числу выпавших гербов. Нетрудно проверить, что случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$ принимает шесть значений из множества {(1,1), (1,2), (1,3), (0,0), (0,1), (0,2)} с вероятностями

$$\mathbf{P}\{\xi = (1,1)\} = \mathbf{P}\{\xi = (1,3)\} =$$
$$= \mathbf{P}\{\xi = (0,0)\} = \mathbf{P}\{\xi = (0,2)\} = 1/8,$$
$$\mathbf{P}\{\xi = (1,2)\} = \mathbf{P}\{\xi = (0,1)\} = 1/4.$$

Построим функцию распределения случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$. Для этого на координатной плоскости xOy отметим возможные значения ξ и припишем им соответствующие вероятности (см. рис. 45).

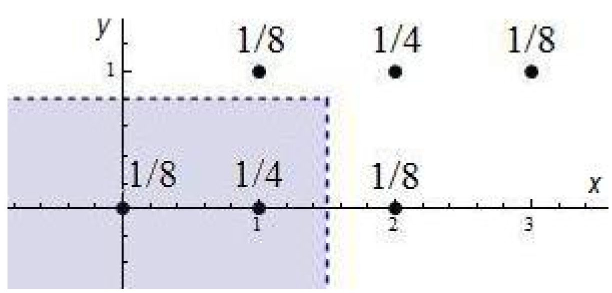

Рис. 45

Функция распределения F_ξ равна вероятности попадания в закрашенную четверть плоскости, то есть она равна сумме вероятностей попавших в нее точек. Плоскость распадется на 7 областей постоянного значения F_ξ, как показано на рис. 46 (на границе нескольких областей берется меньшее из значений).

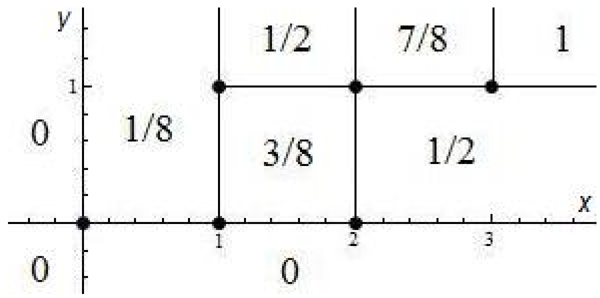

Рис. 46

При наблюдении над системой случайных величин исследователя интересует степень связи между компонентами вектора. Условие независимости случайных величин ξ_1 и ξ_2 легко сформулировать в терминах функции распределения. Следующая теорема непосредственно вытекает из определения 8.

Теорема 11. *Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы тогда и только тогда, когда при всех $(x, y) \in \mathbb{R}^2$*

$$F_\xi(x, y) = F_{\xi_1}(x) F_{\xi_2}(y). \tag{22}$$

5.2 Дискретные и непрерывные двумерные случайные векторы

Как и в одномерном случае, двумерные случайные векторы бывают дискретными и непрерывными.

Двумерный случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$ называется **дискретным**, если обе его компоненты ξ_1 и ξ_2 Џ дискретные случайные величины. Случайный вектор, рассмотренный в примере 67, является дискретным.

Закон распределения дискретного случайного вектора удобно представить следующим образом. Пусть $\{x_1, x_2, \ldots\}$ — значения первой компоненты ξ_1, а $\{y_1, y_2, \ldots\}$ — значения второй компоненты ξ_2. Пусть

$$p_{ij} = \mathbf{P}\{\xi_1 = x_i,\, \xi_2 = y_j\}, \quad i, j \geq 1.$$

Сведем эти значения в таблицу.

$\xi_1 \backslash \xi_2$	y_1	y_2	$\ldots$	y_j	$\ldots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\ldots$	p_{1j}	$\ldots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\ldots$	p_{2j}	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\ldots$	p_{ij}	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

Эта таблица называется **двумерным рядом распределения** случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$. Как и в одномерном случае, ряд распределения полностью определяет закон распределения вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$.

Теперь по таблице найдем маргинальные законы распределения компонент. Для этого воспользуемся формулой полной вероятности

$$p_{i\cdot} = \mathbf{P}\{\xi_1 = x_i\} = \sum_{j\geq 1} \mathbf{P}\{\xi_1 = x_i,\, \xi_2 = y_j\} = \sum_{j\geq 1} p_{ij},$$

$$p_{\cdot j} = \mathbf{P}\{\xi_2 = y_j\} = \sum_{i\geq 1} \mathbf{P}\{\xi_1 = x_i,\, \xi_2 = y_j\} = \sum_{i\geq 1} p_{ij}$$

(индекс $\cdot$ в двух последних формулах означает ту компоненту, по значениям которой суммируем). По найденным вероятностям можно записать одномерные ряды распределения компонент ξ_1 и ξ_2. Для наглядности можно вычислять вероятности $p_{i\cdot}$ и $p_{\cdot j}$ по таблице ряда распределения:

$\xi_1 \backslash \xi_2$	y_1	y_2	$\ldots$	y_j	$\ldots$	$\sum$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\ldots$	p_{1j}	$\ldots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\ldots$	p_{2j}	$\ldots$	$p_{2\cdot}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\ldots$	p_{ij}	$\ldots$	$p_{i\cdot}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$\sum$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\ldots$	$p_{\cdot j}$	$\ldots$	1

Для дискретных случайных величин условие независимости (22) эквивалентно тому, что при всех $i, j \geq 1$ выполнено

$$p_{ij} = p_{i\cdot} p_{\cdot j}.$$

Пример 68. Запишем двумерный ряд распределения случайного вектора из примера 67.

$\xi_1 \backslash \xi_2$	0	1	2	3	$\sum$
0	1/8	1/4	1/8	0	1/2
1	0	1/8	1/4	1/8	1/2
$\sum$	1/8	3/8	3/8	1/8	1

Теперь найдем по нему маргинальные законы распределения компонент:

ξ_1	0	1
$\mathbf{P}$	1/2	1/2

ξ_2	0	1	2	3
$\mathbf{P}$	1/8	3/8	3/8	1/8

Проверим, зависимы ли случайные величины ξ_1 и ξ_2. Так как $p_{00} = 1/8 \neq p_{0\cdot}p_{\cdot 0} = 1/16$, то компоненты зависимы.

Определение 21. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$ называется **непрерывным**, если его двумерную функцию распределения можно представить в виде

$$F_\xi(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f_\xi(u, v)dudv, \tag{23}$$

где неотрицательная функция $f_\xi(u, v)$ называется **двумерной плотностью распределения** случайного вектора ξ.

В этом случае обе его компоненты ξ_1 и ξ_2 — непрерывные случайные величины.

Теорема 12. *Плотность распределения $f_\xi(x, y)$ случайного вектора обладает следующими свойствами*:

1. $f_\xi(x, y) \geq 0$ *при всех* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;
2. $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f_\xi(x, y)dxdy = 1$ (*условие нормировки*);
3. $\dfrac{\partial^2 F_\xi(x, y)}{\partial x \partial y} = f_\xi(x, y)$ *в точках непрерывности* f_ξ;
4. $\mathbf{P}\{\xi \in A\} = \iint\limits_{A} f_\xi(x, y)dxdy$, $A \subset \mathbb{R}^2$;
5. *если* f_ξ *непрерывна в точке* (x, y), *то при* $\varepsilon, \delta \to 0$
$$\mathbf{P}\{x < \xi_1 < x + \delta,\, y < \xi_2 < y + \varepsilon\} = \varepsilon\,\delta\big(f_\xi(x, y) + o(1)\big);$$
6. $\mathbf{P}\{(\xi_1, \xi_2) = (x, y)\} = 0$;
7. $f_{\xi_1}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x, y)dy, \quad f_{\xi_2}(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x, y)dx.$

Доказательство аналогично доказательству теоремы о свойствах одномерной плотности распределения.

Условие независимости (22) для непрерывных случайных величин ξ_1 и ξ_2 эквивалентно тому, что для всех $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ выполнено

$$f_\xi(x, y) = f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y).$$

Пример 69. Координаты точки $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$ равномерно распределены в квадрате

$$D = \{(x, y) : -1 < x < 3;\ 2 < y < 6\}.$$

Найдем плотность и функцию распределения случайного вектора ξ.

Так как распределение равномерно, то вероятность попадания в окрестность фиксированного размера любой точки должна быть постоянна. Значит, $f_\xi(x, y) = c$ при $(x, y) \in D$ и нулю при $(x, y) \notin D$. Из условия нормировки получим

$$1 = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} f_\xi\, dxdy = \iint\limits_{D} f_\xi\, dxdy = c \iint\limits_{D} dxdy = c\, S(D) = 16c,$$

значит, $c = 1/16$. Теперь найдем функцию распределения. Для этого заметим, что в силу определения $F_\xi(x, y)$ равна отношению площади той части квадрата D, которая попала в заштрихованную область с вершиной (x, y) (см. рис. 47), к площади всего D.

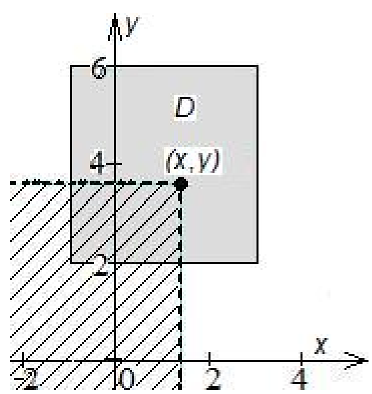

Рис. 47

Длины сторон полученного прямоугольника равны $x + 1$ и $y - 2$ при $(x, y) \in D$. Если $x > 3$ и $2 < y < 6$, то длины сторон равны 4 и $y - 2$, если же $-1 < x < 3$ и $y > 6$, то эти длины равны $x + 1$ и 4. Поэтому

$$F_\xi(x, y) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \text{ или } y \le 2, \\ (x+1)(y-2)/16, & (x, y) \in D, \\ (x+1)/4, & -1 < x < 3,\ y \ge 6, \\ (y-2)/4, & x \ge 3,\ 2 < y < 6, \\ 1, & x \ge 3,\ y \ge 6. \end{cases}$$

График функции распределения приведен на рис. 48.

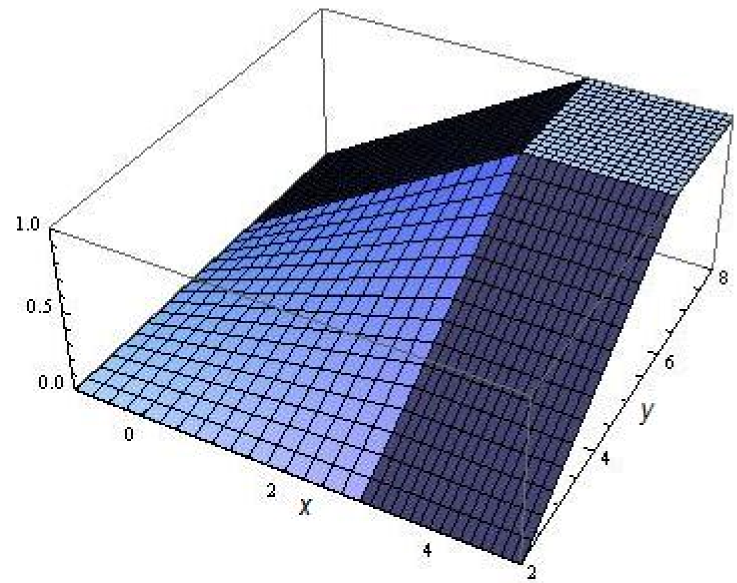

Рис. 48

Из свойства 3 двумерной функции распределения следует

$$F_{\xi_1}(x) = F_\xi(x, +\infty) = \begin{cases} 0, & x \le -1, \\ (x+1)/4, & -1 < x < 3, \\ 1, & x \ge 3, \end{cases} \tag{24}$$

$$F_{\xi_2}(y) = F_\xi(+\infty, y) = \begin{cases} 0, & y \le 2, \\ (y-2)/4, & 2 < y < 6, \\ 1, & y \ge 6. \end{cases} \tag{25}$$

Как видно из двух последних формул и условия (22), компоненты случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ независимы.

Пример 70. Пусть $\xi_1, \xi_2 \sim R[0,1]$ независимы. Рассмотрим новые случайные величины $X = \min\{\xi_1, \xi_2\}$, $Y = \max\{\xi_1, \xi_2\}$. Найти плотность распределения случайного вектора $(X, Y)^T$.

Поскольку ξ_1 и ξ_2 не принимают значения, меньшие 0 или бóльшие 1, случайные величины X и Y также не принимают таких значений. Кроме того, всегда $X \le Y$. Следовательно, распределение случайного вектора $(X, Y)^T$ сосредоточено в треугольнике $T = \{0 \le x \le y \le 1\}$ (рис. 49, слева). Вычислим функцию распределения при $(x, y) \in T$.

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x, y) = \mathbf{P}\{X < x, Y < y\} = \\ = \mathbf{P}\big\{\min\{\xi_1, \xi_2\} < x,\ \max\{\xi_1, \xi_2\} < y\big\} = \\ = \mathbf{P}\big((\{\xi_1 < x\} \vee \{\xi_2 < x\})\{\xi_1 < y\}\{\xi_2 < y\}\big) = \\ = \mathbf{P}\big(\{\xi_1 < y\}\{\xi_2 < y\}\big) - \mathbf{P}\big(\{x \le \xi_1 < y\}\{x \le \xi_2 < y\}\big) = \\ = y^2 - (y - x)^2 = 2xy - x^2. \end{aligned}$$

Это площадь окрашенной области на рис. 49 справа.

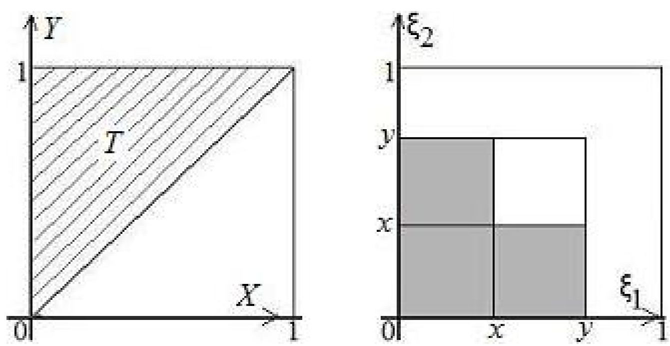

Рис. 49

Во внутренних точках области T функция распределения дважды дифференцируема, и плотность вычисляется так:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{(X,Y)}}{\partial x \partial y} = 2.$$

В граничных точках области T плотность вычислять не нужно, так как граница имеет нулевую площадь. Во всех остальных точках $f_{(X,Y)}(x, y) = 0$. Получается, что $(X, Y)^T$ распределен равномерно на T.

Замечание 5.1. Существуют случайные векторы, не являющиеся ни дискретными, ни непрерывными, ни их смесью. Например, если $\psi \sim R[0, 2\pi]$, то вектор $\xi = (\cos\psi, \sin\psi)^T$ равномерно распределен на окружности — множестве мощности континуум, но нулевой площади!

5.3 Числовые характеристики двумерного случайного вектора

Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$ — двумерный случайный вектор, и пусть

$$\mathbf{E}\,\xi = \begin{pmatrix} \mathbf{E}\,\xi_1 \\ \mathbf{E}\,\xi_2 \end{pmatrix}.$$

Вектор $\mathbf{E}\,\xi$ называется **вектором средних** (или математических ожиданий) случайного вектора ξ. Вектор средних определяется только одномерными законами распределения компонент случайного вектора.

Пример 71. Найдем вектор средних для случайного вектора из примера 67. Из найденных ранее маргинальных законов распределения получим

$$\mathbf{E}\,\xi_1 = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2},$$

$$\mathbf{E}\,\xi_2 = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Значит, $\mathbf{E}\,\xi = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

Нетрудно проверить, что если случайный вектор $\eta = A\xi + \mathbf{b}$ получен в результате линейного преобразования вектора ξ, то

$$\mathbf{E}\,\eta = A\mathbf{E}\,\xi + \mathbf{b}. \qquad (26)$$

В качестве числовой характеристики двумерного закона распределения случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$ рассмотрим математические ожидания случайных величин $g(\xi_1, \xi_2)$, где g — скалярные функции двух переменных. Если ξ — дискретный случайный вектор, то

$$\mathbf{E}\,g(\xi_1, \xi_2) = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j) p_{ij}, \qquad (27)$$

где $p_{ij} = \mathbf{P}\{\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j\}$, $i, j \geq 1$. Если же ξ — непрерывный случайный вектор, то

$$\mathbf{E}\,g(\xi_1, \xi_2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f_\xi(x, y)\,dx dy, \qquad (28)$$

где $f_\xi(x, y)$ — плотность распределения случайного вектора ξ.

Для системы из двух случайных величин важной характеристикой является их **ковариация** (второй смешанный центральный момент).

Определение 22. Ковариацией случайных величин ξ_1 и ξ_2 называется

$$\mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{E}\,(\xi_1 - \mathbf{E}\,\xi_1)(\xi_2 - \mathbf{E}\,\xi_2).$$

Если ξ — дискретный случайный вектор, то согласно (27)

$$\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = \sum_i \sum_j (x_i - \mathbf{E}\,\xi_1)(y_j - \mathbf{E}\,\xi_2) p_{ij}. \tag{29}$$

Для непрерывного случайного вектора из (28) получаем

$$\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbf{E}\,\xi_1)(y - \mathbf{E}\,\xi_2) f_\xi(x, y) dx dy. \tag{30}$$

Теорема 13. *Ковариация случайных величин ξ_1 и ξ_2 обладает следующими свойствами*:

1. $\operatorname{cov}(a\xi_1 + b, c\xi_2 + d) = ac \operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2), \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$;
2. $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{E}\,(\xi_1 \xi_2) - \mathbf{E}\,\xi_1 \mathbf{E}\,\xi_2$;
3. $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = \operatorname{cov}(\xi_2, \xi_1)$;
4. $\mathbf{D}\,(\xi_1 + \xi_2) = \mathbf{D}\,\xi_1 + \mathbf{D}\,\xi_2 + 2 \operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2)$;
5. $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_1) = \mathbf{D}\,\xi_1$;
6. $|\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2)| \leq \sqrt{\mathbf{D}\,\xi_1\, \mathbf{D}\,\xi_2}$, *причем равенство бывает тогда и только тогда, когда случайные величины связаны линейно*;
7. *если ξ_1 и ξ_2 независимы, то* $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0$.

Доказательство. Свойства 1 и 2 проверяются непосредственно по определению, а именно

$$\begin{aligned}
&\operatorname{cov}(a\xi_1 + b, c\xi_2 + d) = \\
&\qquad = \mathbf{E}\left(a\xi_1 + b - \mathbf{E}\,(a\xi_1 + b)\right)\left(c\xi_2 + d - \mathbf{E}\,(c\xi_2 + d)\right) = \\
&\qquad = \mathbf{E}\,\left(a\xi_1 - a\mathbf{E}\,\xi_1\right)\left(c\xi_2 - c\mathbf{E}\,\xi_2\right) = ac\mathbf{E}\,\left(\xi_1 - \mathbf{E}\,\xi_1\right)\left(\xi_2 - \mathbf{E}\,\xi_2\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\,(\xi_1 - \mathbf{E}\,\xi_1)(\xi_2 - \mathbf{E}\,\xi_2) = \mathbf{E}\,\left(\xi_1\xi_2 - \xi_1\mathbf{E}\,\xi_2 - \xi_2\mathbf{E}\,\xi_1 + \mathbf{E}\,\xi_1\mathbf{E}\,\xi_2\right) = \\
&\qquad = \mathbf{E}\,\xi_1\xi_2 - \mathbf{E}\,\xi_1\mathbf{E}\,\xi_2 - \mathbf{E}\,\xi_2\mathbf{E}\,\xi_1 + \mathbf{E}\,\xi_1\mathbf{E}\,\xi_2 = \mathbf{E}\,\xi_1\xi_2 - \mathbf{E}\,\xi_1\mathbf{E}\,\xi_2.
\end{aligned}$$

Свойство 3 следует из коммутативности умножения действительных чисел. Для доказательства свойства 4 заметим, что

$$\begin{aligned}
&\mathbf{D}\,(\xi_1 + \xi_2) = \mathbf{E}\left(\xi_1 + \xi_2 - \mathbf{E}\,(\xi_1 + \xi_2)\right)^2 = \\
&\qquad = \mathbf{E}\left((\xi_1 - \mathbf{E}\,\xi_1) + (\xi_2 - \mathbf{E}\,\xi_2)\right)^2 = \\
&\qquad = \mathbf{E}\,(\xi_1 - \mathbf{E}\,\xi_1)^2 + \mathbf{E}\,(\xi_2 - \mathbf{E}\,\xi_2)^2 + 2\mathbf{E}\,(\xi_1 - \mathbf{E}\,\xi_1)(\xi_2 - \mathbf{E}\,\xi_2) = \\
&\qquad = \mathbf{D}\,\xi_1 + \mathbf{D}\,\xi_2 + 2\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2).
\end{aligned}$$

Свойство 5 следует непосредственно из определения. Докажем свойство 6. При любом $t \in \mathbb{R}$ имеем $\mathbf{D}\,(t\xi_1+\xi_2) \geq 0$. Преобразуем это неравенство, пользуясь свойствами 1 и 4:

$$t^2\mathbf{D}\,\xi_1 + 2t\,\mathrm{cov}(\xi_1,\xi_2) + \mathbf{D}\,\xi_2 \geq 0.$$

Последнее неравенство выполняется при всех t, если дискриминант уравнения неположителен, то есть

$$\mathrm{cov}^2(\xi_1,\xi_2) - \mathbf{D}\,\xi_1\mathbf{D}\,\xi_2 \leq 0.$$

Отсюда следует требуемое неравенство.

Если дискриминант равен 0, то существует единственное решение t^* уравнения $t^2\mathbf{D}\,\xi_1+2t\,\mathrm{cov}(\xi_1,\xi_2)+\mathbf{D}\,\xi_2 = 0$, при котором $\mathbf{D}\,(t^*\xi_1+\xi_2) = 0$. Значит, $t^*\xi_1+\xi_2 = Const$, то есть случайные величины связаны линейно. Пусть теперь $\xi_1 = a\xi_2 + b$. Тогда согласно свойству 1

$$|\,\mathrm{cov}(\xi_1,\xi_2)| = |\,\mathrm{cov}(a\xi_2+b,\xi_2)| = \\ = |a|\,\mathrm{cov}(\xi_2,\xi_2) = |a|\mathbf{D}\,\xi_2 = \sqrt{\mathbf{D}\,\xi_1\mathbf{D}\,\xi_2}.$$

Для доказательства свойства 7 воспользуемся тем, что для независимых случайных величин выполнено $\mathbf{E}\,(\xi_1\xi_2) = \mathbf{E}\,\xi_1\mathbf{E}\,\xi_2$, значит, в силу свойства 2, $\mathrm{cov}(\xi_1,\xi_2) = 0$. □

Определение 23. Если $\mathrm{cov}(\xi_1,\xi_2) = 0$, то случайные величины ξ_1 и ξ_2 называются **некоррелированными**.

Пример 72. (Некоррелированность не влечет независимость).

а) Пусть случайная величина ξ_1 принимает значения 0, 1 и -1 с равными вероятностями ($\mathbf{E}\,\xi_1 = 0$), а $\xi_2 = \xi_1^2$. Вычислим ковариацию ξ_1 и ξ_2:

$$\mathrm{cov}(\xi_1,\xi_2) = \mathrm{cov}(\xi_1,\xi_1^2) = \mathbf{E}\,\xi_1^3 - \mathbf{E}\,\xi_1\mathbf{E}\,\xi_1^2 = \mathbf{E}\,\xi_1^3 = \mathbf{E}\,\xi_1 = 0.$$

В то же время случайные величины ξ_1 и ξ_2 зависимы:

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = 0\} = 1/3 \neq \mathbf{P}\{\xi_1 = 0\}\,\mathbf{P}\{\xi_2 = 0\} = 1/9.$$

б) Рассмотрим случайный вектор ξ из замечания 5.1. Пусть $\psi \sim R[0,2\pi]$. Тогда

$$\mathbf{E}\,\xi_1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos\psi\,d\psi = 0, \qquad \mathbf{E}\,\xi_2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sin\psi\,d\psi = 0,$$

$$\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2)=\mathbf{E}\,(\xi_1\xi_2)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos\psi\sin\psi\,d\psi=0.$$

Убедимся в том, что ξ_1 и ξ_2 зависимы:

$$\mathbf{P}\{\xi_1>3/4,\,\xi_2>3/4\}=0<\mathbf{P}\{\xi_1>3/4\}\,\mathbf{P}\{\xi_2>3/4\}.$$

Определение 24. Ковариационной матрицейслучайного вектора $\xi=(\xi_1,\xi_2)^T$ назовем матрицу Σ_ξ, составленную из попарных ковариаций компонент случайного вектора

$$\Sigma_\xi=\{\operatorname{cov}(\xi_i,\xi_j)\}_{i,j=1,2}=\begin{pmatrix}\mathbf{D}\,\xi_1 & \operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2)\\ \operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2) & \mathbf{D}\,\xi_2\end{pmatrix}$$

В матричном виде можно записать так:

$$\Sigma_\xi=\mathbf{E}\,(\xi_o\cdot\xi_o^T),\quad \text{где}\quad \xi_o=\xi-\mathbf{E}\,\xi.$$

Теорема 14. (*свойства ковариационной матрицы*).

1. *матрица ковариаций* Σ_ξ *симметрична*;

2. *матрица ковариаций неотрицательно определена, причем* $\det(\Sigma_\xi)=0$ *тогда и только тогда, когда случайные величины* ξ_1*и* ξ_2 *связаны линейно*;

3. *пусть случайный вектор* $\eta=A\xi+\mathbf{b}$ *получен в результате линейного преобразования вектора* ξ , *тогда*

$$\Sigma_\eta=A\Sigma_\xi A^T. \tag{31}$$

Пример 73. Найдем ковариационную матрицу случайного вектора $\xi=(\xi_1,\xi_2)$ из примера 67.

$$\mathbf{D}\,\xi_1=\Big(-\frac{1}{2}\Big)^2\frac{1}{2}+\Big(\frac{1}{2}\Big)^2\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

$$\mathbf{D}\,\xi_2=\Big(-\frac{3}{2}\Big)^2\frac{1}{8}+\Big(-\frac{1}{2}\Big)^2\frac{3}{8}+\Big(\frac{1}{2}\Big)^2\frac{3}{8}+\Big(\frac{3}{2}\Big)^2\frac{1}{8}=\frac{24}{32}=\frac{3}{4},$$

$$\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2)=\mathbf{E}\,(\xi_1\xi_2)-\mathbf{E}\,\xi_1\mathbf{E}\,\xi_2=1\cdot1\cdot\frac{1}{8}+1\cdot2\cdot\frac{1}{4}+1\cdot3\cdot\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{4}.$$

Значит,

$$\Sigma_\xi=\begin{pmatrix}1/4 & 1/4\\ 1/4 & 3/4\end{pmatrix}.$$

Пример 74. Найдем ковариационную матрицу случайного вектора

$$\eta = (\eta_1, \eta_2)^T, \quad \eta_1 = \xi_1 + 2\xi_2, \quad \eta_2 = \xi_1 - \xi_2,$$

где случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$ равномерно распределен в квадрате

$$D = \{(x, y) : -1 < x < 3,\ 2 < y < 6\}$$

(см. пример 69). Из формул (24) и (25) следует, что случайная величина ξ_1 распределена равномерно на $[-1, 3]$, а ξ_2 — на $[2, 6]$. Значит, $\mathbf{D}\,\xi_1 = \mathbf{D}\,\xi_2 = 4/3$. Они независимы, следовательно, некоррелированы. Так что ковариационная матрица вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ имеет вид

$$\Sigma_\xi = \begin{pmatrix} 4/3 & 0 \\ 0 & 4/3 \end{pmatrix}.$$

Так как $\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\xi$, то из (31) получим

$$\Sigma_\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4/3 & 0 \\ 0 & 4/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Как видно из последней формулы, компоненты случайного вектора $\eta = (\eta_1, \eta_2)^T$ зависимы.

Физическая размерность ковариации совпадает с произведением размерностей компонент случайного вектора. Шкалы, на которых они измеряются, влияют на величину ковариации. Поэтому вводят безразмерный коэффициент, характеризующий меру линейной связи между случайными величинами.

Определение 25. Коэффициентом корреляции случайных величин ξ_1 и ξ_2 называется число

$$\rho = \rho_{\xi_1, \xi_2} = \frac{\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2)}{\sqrt{\mathbf{D}\,\xi_1 \mathbf{D}\,\xi_2}}.$$

Из свойств ковариации вытекает следующее утверждение.

Теорема 15. *Коэффициент корреляции ρ случайных величин ξ_1 и ξ_2 обладает следующими свойствами*:

1. $|\rho| \le 1$, *причем знак равенства достигается тогда и только тогда, когда случайные величины связаны линейно*;

2. *если ξ_1 и ξ_2 независимы, то $\rho = 0$.*

Смысл знака коэффициента корреляции, упрощенно говоря, таков: если $\rho > 0$, то случайные величины ξ_1 и ξ_2 возрастают или убывают одновременно; если $\rho < 0$, то с ростом одной из случайных величин другая убывает.

Ковариационную матрицу случайного вектора $\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$ теперь можно записать в виде

$$\Sigma_\xi = \begin{pmatrix} \mathbf{D}\,\xi_1 & \rho\sqrt{\mathbf{D}\,\xi_1 \mathbf{D}\,\xi_2} \\ \rho\sqrt{\mathbf{D}\,\xi_1 \mathbf{D}\,\xi_2} & \mathbf{D}\,\xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

Пример 75. Вычислим коэффициент корреляции X и Y из примера 70 (очевидно, он получится положительным).

$$\mathbf{E}\,X = \int_0^1 dy \int_0^y 2x\,dx = \int_0^1 y^2 dy = \frac{1}{3},$$

$$\mathbf{E}\,Y = \int_0^1 dy \int_0^y 2y\,dx = \int_0^1 2y^2 dy = \frac{2}{3},$$

$$\mathbf{E}\,(X^2) = \int_0^1 dy \int_0^y 2x^2 dx = \int_0^1 \frac{2}{3} y^3 dy = \frac{1}{6},$$

$$\mathbf{E}\,(Y^2) = \int_0^1 dy \int_0^y 2y^2 dx = \int_0^1 2y^3 dy = \frac{1}{2},$$

$$\mathbf{E}\,(XY) = \int_0^1 dy \int_0^y 2xy\,dx = \int_0^1 y^3 dy = \frac{1}{4}.$$

Отсюда получаем

$$\rho = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbf{D}\,X\,\mathbf{D}\,Y}} = \frac{\mathbf{E}\,(XY) - \mathbf{E}\,X\,\mathbf{E}\,Y}{\sqrt{(\mathbf{E}\,(X^2) - (\mathbf{E}\,X)^2)(\mathbf{E}\,(Y^2) - (\mathbf{E}\,Y)^2)}} =$$

$$= \frac{1/4 - 2/9}{\sqrt{(1/18)(1/18)}} = \frac{1}{2}.$$

5.4 Нормальный закон распределения на плоскости

Определение 26. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$ имеет **невырожденный нормальный закон распределения** $\mathcal{N}(\mathbf{m}, \Sigma_\xi)$ с вектором средних $\mathbf{m}$ и ковариационной матрицей Σ_ξ,

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}, \qquad \Sigma_\xi = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix},$$

если его плотность равна

$$f_\xi(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{-\left(\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}-\frac{2\rho(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right)}{2(1-\rho^2)}\right\} \quad (32)$$

Используя матричные обозначения, запишем (32) в виде

$$f_\xi(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\Sigma_\xi)}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T\Sigma_\xi^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})\right\}.$$

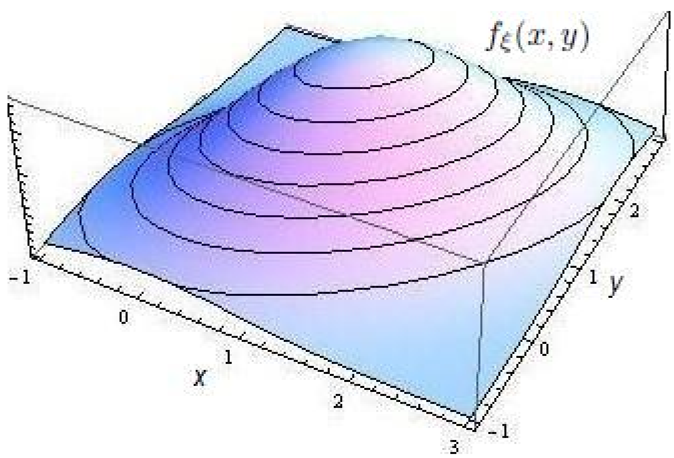

Рис. 50

Исследуем линии уровня плотности нормального распределения (на рис. 50 видно, что они образуют замкнутые кривые). Из (32) следует, что уравнение линии, вдоль которой плотность постоянна, имеет вид

$$(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T\Sigma_\xi^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m}) = C. \quad (33)$$

Матрицу Σ_ξ^{-1} можно привести к диагональному виду преобразованием поворота, причем угол поворота φ задается соотношением

$$tg2\varphi = \frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2-\sigma_2^2}.$$

Оба собственных числа матрицы Σ_ξ^{-1} положительны, поэтому уравнение (33) задает эллипс, оси симметрии которого образуют углы φ с осями Ox и Oy. Оси симметрии эллипсов (33) называют **осями рассеивания**, а сами эллипсы, задаваемые уравнением (33), **эллипсами рассеивания** (см. рис. 51).

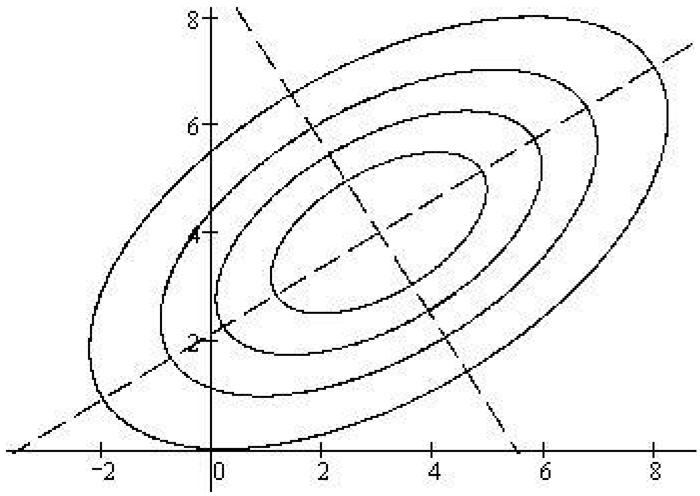

Рис. 51

Если перейти в каноническую систему координат эллипса рассеивания $\xi' = (\xi_1', \xi_2')$, то новые координаты будут иметь нормальное распределение с нулевыми средними и диагональной ковариационной матрицей. Следовательно, компоненты вектора $\xi' = (\xi_1', \xi_2')$ независимы между собой.

Теорема 16. *Если $\xi \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}, \Sigma_\xi)$, то $\xi_i \sim \mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2$.*

Доказательство. Вычислим плотности распределений ξ_1 и ξ_2 по теореме 12, пункт 7. $\square$

Обратное утверждение неверно: существует случайный вектор с непрерывным распределением, у которого обе компоненты нормальны, но сам вектор не является нормальным.

Пример 76. Пусть $\xi_1, \xi_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ независимы. Рассмотрим $\eta = (\eta_1, \eta_2) = (\xi_1, |\xi_2| \operatorname{sign} \xi_1)$. Тогда η_1, $\eta_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$, но распределение η не является нормальным, так как плотность равна 0 на II и IV четвертях плоскости.

Однако, справедлива следующая теорема (ее доказательство будет приведено в конце этого параграфа):

Теорема 17. *Если вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$ имеет непрерывное распределение, и при любых $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \neq 0$, случайная величина $a\xi_1 + b\xi_2$ распределена нормально, то случайный вектор ξ имеет двумерный нормальный закон распределения.*

Из формулы (32) видно, что если компоненты ξ_1 и ξ_2 нормального случайного вектора некоррелированы ($\rho = 0$), то они независимы:

$$f_\xi(x, y) = f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y).$$

Пример 77. Пусть координаты точки $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, брошенной на плоскость, независимы, имеют нулевые средние и одинаковые дисперсии. Считая, что вектор ξ распределен по нормальному закону, найти закон распределения длины радиус-вектора точки $\xi = (\xi_1, \xi_2)$.

Согласно условию

$$f_\xi(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\Big(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\Big), \quad (x, y) \in \mathbb{R}.$$

Найдем функцию распределения длины $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$. По определению при $z > 0$

$$F_{|\xi|}(z) = \mathbf{P}\{|\xi| < z\} = \mathbf{P}\Big\{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} < z\Big\} =$$
$$= \iint\limits_{x^2+y^2<z^2} f_\xi(x, y) dx dy = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \iint\limits_{x^2+y^2<z^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} dx dy = \ldots$$

перейдем к полярным координатам (r, φ)

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^z e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} r\, dr = \frac{1}{\sigma^2} \int\limits_0^z e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} d\Big(\frac{r^2}{2}\Big) = 1 - e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}.$$

При $z \leq 0$, очевидно, $F_{|\xi|}(z) = 0$. Дифференцируя полученную функцию распределения, получим плотность распределения $|\xi|$

$$f_{|\xi|}(z) = \frac{d}{dz} F_{|\xi|}(z) = \frac{z}{\sigma^2} \exp\Big(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\Big), \quad z > 0.$$

Полученный закон распределения называется **распределением Рэлея**. Заметим, что величина $|\xi|^2$ распределена экспоненциально с математическим ожиданием $2\sigma^2$, т. е. $|\xi|^2 \sim Exp(1/2\sigma^2)$.

Определение 27. Характеристической функцией случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$ называется функция

$$\varphi_\xi(t_1, t_2) = \mathbf{E}\, e^{it_1\xi_1 + it_2\xi_2} = \mathbf{E}\, e^{i\mathbf{t}\xi}, \quad \mathbf{t} = (t_1, t_2).$$

Двумерная характеристическая функция обладает свойствами, аналогичными одномерным характеристическим функциям, например, она полностью определяет закон распределения двумерного случайного вектора.

Найдем характеристическую функцию двумерного нормального закона с распределения с плотностью (32):

$$\varphi_\xi(\mathbf{t}) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{it_1x+it_2y} f_\xi(x,y)dxdy.$$

Сначала рассмотрим случай нулевых средних. при помощи замены $u = \dfrac{x}{\sigma_1}$, $v = \dfrac{y}{\sigma_2}$ интеграл преобразуем к виду

$$\varphi_\xi(\mathbf{t}) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{it_1\sigma_1u+it_2\sigma_2v} \tilde{f}_\xi(u,v)dudv,$$

где

$$\tilde{f}_\xi(u,v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(u^2+v^2-2\rho uv\right)\right\}.$$

Значит,

$$\varphi_\xi(\mathbf{t}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \exp\Big\{it_1\sigma_1u + it_2\sigma_2v -$$

$$-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2+v^2-2\rho uv)\Big\}dudv =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} du\Bigg(\exp\Big\{it_1\sigma_1u - \frac{u^2}{2(1-\rho^2)}\Big\}\times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\Big\{it_2\sigma_2v - \frac{1}{2(1-\rho^2)}(v^2-2\rho uv)\Big\}dv\Bigg).$$

Вычислим внутренний интеграл отдельно.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\Big\{it_2\sigma_2 v - \frac{1}{2(1-\rho^2)}(v^2 - 2\rho uv)\Big\} dv =$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{2(1-\rho^2)}\big(\rho u + i(1-\rho^2)t_2\sigma_2\big)^2\right\} \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\Big(v - \big(\rho u + i(1-\rho^2)t_2\sigma_2\big)\Big)^2\right\} dv =$$

$$= \exp\left\{\frac{\rho^2 u^2}{2(1-\rho^2)} + i\rho u t_2\sigma_2 - \frac{1}{2}(1-\rho^2)t_2^2\sigma_2^2\right\} \sqrt{2\pi(1-\rho^2)}.$$

Подставляя полученное значение во внешний интеграл, получим

$$\varphi_\xi(\mathbf{t}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{it_1\sigma_1 u - \frac{u^2}{2(1-\rho^2)} + \frac{\rho^2 u^2}{2(1-\rho^2)} + \right.$$

$$\left. + i\rho u t_2\sigma_2 - \frac{1}{2}(1-\rho^2)t_2^2\sigma_2^2\right\} du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{(1-\rho^2)t_2^2\sigma_2^2}{2} + it_1\sigma_1 u - \frac{u^2}{2} + i\rho u t_2\sigma_2\right\} du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(1-\rho^2)t_2^2\sigma_2^2/2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{it_1\sigma_1 u - \frac{u^2}{2} + i\rho u t_2\sigma_2\right\} du.$$

Так как

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{it_1\sigma_1 u - \frac{u^2}{2} + i\rho u t_2\sigma_2\right\} du =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\frac{-\big(u - i\left(\rho t_2\sigma_2 + t_1\sigma_1\right)\big)^2 - \left(\rho t_2\sigma_2 + t_1\sigma_1\right)^2}{2} du =$$

$$= e^{-(\rho t_2\sigma_2 + t_1\sigma_1)^2/2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}(u - i\left(\rho t_2\sigma_2 + t_1\sigma_1\right))^2\right\} du =$$

$$= \sqrt{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\rho t_2\sigma_2 + t_1\sigma_1)^2\right\},$$

то

$$\varphi_\xi(\mathbf{t}) = \exp\left\{-\frac{1}{2}(1-\rho^2)t_2^2\sigma_2^2 - \frac{1}{2}(\rho t_2\sigma_2 + t_1\sigma_1)^2\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}t_2^2\sigma_2^2 - \frac{1}{2}t_1^2\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{t}\Sigma_\xi\mathbf{t}^T\right\}.$$

Применив свойство характеристических функций (21), получаем в общем случае

$$\varphi_\xi(\mathbf{t}) = \exp\left\{i\mathbf{m}\mathbf{t}^T - \frac{1}{2}\mathbf{t}\Sigma_\xi\mathbf{t}^T\right\}. \tag{34}$$

Теорема 18. *Пусть* ξ *— случайный вктор с распределением* $\mathcal{N}(\mathbf{m}, \Sigma_\xi)$, $\det(\Sigma_\xi) > 0$, *и пусть* $\eta = C\xi$, *где* C *— невырожденная матрица. Тогда*

$$\eta \sim \mathcal{N}\left(C\mathbf{m}, C\Sigma_\xi C^T\right).$$

Доказательство. Выразим характеристическую функцию для $\eta = C\xi$:

$$\varphi_\eta(\mathbf{t}) = \mathbf{E}\, e^{i\mathbf{t}\eta} = \mathbf{E}\, e^{i\mathbf{t}C\xi} = \varphi_\xi(\mathbf{t}C) =$$

$$= \exp\left\{i\mathbf{t}C\mathbf{m} - \frac{1}{2}(\mathbf{t}C)\Sigma_\xi(\mathbf{t}C)^T\right\} =$$

$$= \exp\left\{i\mathbf{t}C\mathbf{m} - \frac{1}{2}\mathbf{t}(C\Sigma_\xi C^T)\mathbf{t}^T\right\}.$$

Значит, из (34) следует, что $\eta \sim \mathcal{N}\left(C\mathbf{m}, C\Sigma_\xi C^T\right)$. □

Теорема 18 позволяет линейными преобразованиями переводить произвольные двумерные нормальные случайные векторы в стандартные нормальные (т. е. с нулевым средним и единичной матрицей ковариации $\Sigma = \mathrm{I}$) и обратно:

Следствие 5.1. 1) Если $\xi \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}, \Sigma)$, то

$$\xi_1 = \Sigma^{-1/2}(\xi - \mathbf{m}) \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{I}).$$

2) Если $\xi_1 \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{I})$, то $\xi = \Sigma^{1/2}\xi_1 + \mathbf{m} \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}, \Sigma)$.

Здесь символом Σ^α обозначена такая симметричная матрица, что если Σ имеет собственные значения $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, то Σ^α имеет собственные значения λ_1^α и λ_2^α при тех же собственных векторах.

С помощью характеристических функций докажем теорему 17. Обозначим через $\mathbf{m}$ и Σ_ξ вектор средних и ковариационную матрицу случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2)$. Пусть $\eta = a\xi_1 + b\xi_2 = \mathbf{A}\xi$, где $\mathbf{A} = (a, b)$. Согласно условиям теоремы, случайная величина η имеет нормальный закон распределения; по теоремам 2 и 3 находим ее среднее и дисперсию:

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\,\eta = am_1 + bm_2 = \mathbf{A}\mathbf{m};\\ &\mathbf{D}\,\eta = a^2\sigma_1^2 + 2ab\rho\sigma_1\sigma_2 + b^2\sigma_2^2 = \mathbf{A}\Sigma_\xi\mathbf{A}^T.\end{aligned}$$

Значит, ее характеристическая функция

$$\varphi_\eta(t) = e^{it\mathbf{E}\,\eta - \frac{1}{2}t^2\mathbf{D}\,\eta} = \exp\left\{it\mathbf{A}\mathbf{m} - \frac{1}{2}t^2\mathbf{A}\Sigma_\xi\mathbf{A}^T\right\}.$$

Так как $\varphi_\eta(1) = \exp\left\{i\mathbf{A}\mathbf{m} - \dfrac{1}{2}\mathbf{A}\Sigma_\xi\mathbf{A}^T\right\}$ и $\mathbf{A}$ — любой двумерный вектор, то по определению

$$\varphi_\eta(1) = \mathbf{E}\,e^{i\eta} = \mathbf{E}\,e^{i\mathbf{A}\xi} = \varphi_\xi(\mathbf{A}) = \exp\left\{i\mathbf{A}\mathbf{m} - \frac{1}{2}\mathbf{A}\Sigma_\xi\mathbf{A}^T\right\}.$$

Отсюда следует, что ξ имеет двумерный нормальный закон распределения.

5.5 Условные законы распределения компонент случайного вектора

Ранее было введено определение условной вероятности и условного математического ожидания случайной величины относительно события C. Далее мы обобщим это понятие.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — произвольное вероятностное пространство. Напомним, что при фиксированном $C \in \mathcal{F}$ числовая функция

$$\mathbf{P}_C(A) = \mathbf{P}(A|C) = \frac{\mathbf{P}(AC)}{\mathbf{P}(C)}$$

является вероятностной мерой на $(C, \mathcal{F})$. Пусть $\xi = \xi(\omega)$ — случайная величина, заданная на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Она, очевидно, является и случайной величиной на $(C, \mathcal{F}, \mathbf{P}_C)$.

Пусть случайная величина ξ имеет конечное математическое ожидание. Условное математическое ожидание ξ относительно условия C (см. определение 12) можно представить в виде

$$\mathbf{E}\,(\xi|C) = \int \xi(\omega) d\mathbf{P}_C.$$

Пусть теперь на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ задан случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$, и существует конечное $\mathbf{E}\,\xi_1$. Тогда условное математическое ожидание

$$\mathbf{E}\,(\xi_1|\xi_2 = y) = m_{\xi_1}(y)$$

определяется формулой

$$\mathbf{E}\,(\xi_1|\xi_2 = y) = \begin{cases} \mathbf{E}\,\big(\xi_1|\xi_2 = y\big), & \text{если } \xi_2 \text{ дискретна}, \\ \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \mathbf{E}\,\big(\xi_1\big|\,|\xi_2 - y| < \varepsilon\big), & \text{если } \xi_2 \text{ непрерывна}. \end{cases}$$

Условным математическим ожиданием первой компоненты ξ_1 относительно второй ξ_2 назовем случайную величину

$$\mathbf{E}\,(\xi_1|\xi_2) = m_{\xi_1}(\xi_2).$$

Далее в виду случайного характера условных математических ожиданий, мы будем говорить об их свойствах с вероятностью единица (будем писать п.н. — „почти наверное”).

Теорема 19. *Условное математическое ожидание обладает следующими свойствами*:

1. *если случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы, то*

$$\mathbf{E}\,(\xi_1|\xi_2) = \mathbf{E}\,\xi_1 \ \text{ п.н.};$$

2. *для любых случайных величин ξ_1, ξ_2, ξ_3 и чисел a, b*

$$\mathbf{E}\,(a\xi_1 + b\xi_2|\xi_3) = a\mathbf{E}\,(\xi_1|\xi_3) + b\mathbf{E}\,(\xi_2|\xi_3) \ \text{ п.н.};$$

3. *если* $\mathbf{P}\{\xi_1 \le \xi_2\} = 1$, *то* $\mathbf{E}\,(\xi_1|\xi_3) \le \mathbf{E}\,(\xi_2|\xi_3)$ *п.н.;*
4. $\mathbf{E}\,(\mathbf{E}\,(\xi_1|\xi_2)) = \mathbf{E}\,\xi_1$;
5. $\mathbf{E}\,\big(f(\xi_1)g(\xi_2)\big|\xi_2\big) = g(\xi_2)\mathbf{E}\,\big(f(\xi_1)\big|\xi_2\big)$ *п.н.*

Доказательство. Если случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы, то распределение ξ_1 при условии $\xi_2 = y$ совпадает с безусловным распределением ξ_1. Значит,

$$\mathbf{E}\,(\xi_1|\xi_2 = y) = \int \xi_1(\omega)d\mathbf{P}_{\{\xi_2=y\}} = \int \xi_1(\omega)d\mathbf{P} = \mathbf{E}\,(\xi_1).$$

Свойство 2 следует из линейности интеграла Лебега, свойство 3 — из его монотонности.

Свойство 4 в случае дискретной ξ_2 доказывается так:

$$\mathbf{E}\,(\mathbf{E}\,(\xi_1|\xi_2)) = \sum_j \mathbf{P}(\xi_2 = y_j)\mathbf{E}\,(\xi_1|\xi_2 = y_j) = \\ = \sum_j \int\limits_{\{\xi_2=y_j\}} \xi_1 d\mathbf{P} = \int \xi_1 d\mathbf{P},$$

в случае непрерывной ξ_2 — аналогично через интеграл.

Докажем свойство 5. Заметим, что если $\xi_2 = y$, то функция $g_2(\xi_2) = g_2(y)$. Значит, по определению

$$\mathbf{E}\,\big(g_1(\xi_1)g_2(\xi_2)\big|\xi_2 = y\big) = \int g_1(\xi_1)g_2(y)d\mathbf{P}_{\{\xi_2=y\}} = \\ = g_2(y)\int g_1(\xi_1)d\mathbf{P}_{\{\xi_2=y\}} = g_2(y)\mathbf{E}\,\big(g_1(\xi_1)\big|\xi_2 = y\big).$$

Подставляя в последнюю формулу ξ_2 вместо y, получаем

$$\mathbf{E}\,\big(g_1(\xi_1)g_2(\xi_2)\big|\xi_2\big) = g_2(\xi_2)\mathbf{E}\,\big(g_1(\xi_1)\big|\xi_2\big).$$

□

Пусть дан двумерный случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$, и наблюдению доступна только одна компонента, например, ξ_2. Чтобы по наблюдениям над ξ_2 спрогнозировать значение первой компоненты ξ_1, нужно предложить функцию $\varphi(\xi_2)$, значение которой будет прогнозируемым значением ξ_1. Функцию φ называют **предиктором**. В качестве критерия выбора этой функции можно взять условие минимума среднего квадрата отклонения прогноза от истинного значения

$$\min_{\varphi} \mathbf{E}\left(\varphi(\xi_2)-\xi_1\right)^2.$$

Предиктор φ^*, для которого этот минимум достигается, называется **оптимальным в среднем квадратичном**.

Теорема 20. *Оптимальный в среднем квадратичном предиктор равен*

$$\varphi^*(\xi_2)=\mathbf{E}\,(\xi_1|\xi_2).$$

Доказательство. Пусть $\varphi(\xi_2)$ — произвольный предиктор. Покажем, что

$$\mathbf{E}\left(\varphi(\xi_2)-\xi_1\right)^2 \geq \mathbf{E}\left(\varphi^*(\xi_2)-\xi_1\right)^2.$$

Имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\varphi(\xi_2)-\xi_1\right)^2 &= \mathbf{E}\Big(\big(\varphi(\xi_2)-\mathbf{E}\,(\xi_1|\xi_2)\big)+\big(\mathbf{E}\,(\xi_1|\xi_2)-\xi_1\big)\Big)^2 = \\ &= \mathbf{E}\left(\varphi(\xi_2)-\mathbf{E}\,(\xi_1|\xi_2)\right)^2+\mathbf{E}\left(\mathbf{E}\,(\xi_1|\xi_2)-\xi_1\right)^2+ \\ &\qquad + 2\mathbf{E}\left(\varphi(\xi_2)-\mathbf{E}\,(\xi_1|\xi_2)\right)\left(\mathbf{E}\,(\xi_1|\xi_2)-\xi_1\right).\end{aligned}$$

Последнее слагаемое равно нулю, так как из формулы полного математического ожидания имеем

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\left(\varphi(\xi_2)-\mathbf{E}\,(\xi_1|\xi_2)\right)\left(\mathbf{E}\,(\xi_1|\xi_2)-\xi_1\right) = \\ &\qquad = \mathbf{E}\Big(\big(\varphi(\xi_2)-\mathbf{E}\,(\xi_1|\xi_2)\big)\mathbf{E}\left(\mathbf{E}\,(\xi_1|\xi_2)-\xi_1|\xi_2\right)\Big),\end{aligned}$$

где $\mathbf{E}\left(\mathbf{E}\,(\xi_1|\xi_2)-\xi_1|\xi_2\right)=\mathbf{E}\,(\xi_1|\xi_2)-\mathbf{E}\,(\xi_1|\xi_2)=0$. Значит,

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\left(\varphi(\xi_2)-\xi_1\right)^2 = \\ &\qquad = \mathbf{E}\left(\varphi(\xi_2)-\varphi^*(\xi_2)\right)^2+\mathbf{E}\left(\varphi^*(\xi_2)-\xi_1\right)^2 \geq \mathbf{E}\left(\varphi^*(\xi_2)-\xi_1\right)^2.\end{aligned}$$

□

5.6 Условные распределения в дискретных моделях

Рассмотрим дискретный случайный вектор $\xi=(\xi_1,\xi_2)^T$. Пусть $\{x_i\}$ — значения первой компоненты ξ_1, $\{y_j\}$ — значения второй компоненты ξ_2,

$$p_{ij}=\mathbf{P}\{\xi_1=x_i,\xi_2=y_j\},\quad i,j\geq 1.$$

Условная вероятность равна

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = x_i | \xi_2 = y_j\} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} \tag{35}$$

(см. параграф 2.3). Набор вероятностей (35), $i \geq 1$, определяет условный закон распределения случайной величины ξ_1 при условии $\xi_2 = y_j$, который обозначим $\mathcal{L}(\xi_1|\xi_2 = y_j)$, а набор (35), где $i, j \geq 1$, задает условный закон распределения случайной величины ξ_1 относительно случайной величины ξ_2.

Условным математическим ожиданием случайной величины ξ_1 при условии $\xi_2 = y_j$ будет число

$$\mathbf{E}\,(\xi_1|\xi_2 = y_j) = \sum_i x_i \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}};$$

условным математическим ожиданием ξ_1 относительно ξ_2 будет случайная величина $\mathbf{E}\,(\xi_1|\xi_2)$, принимающая значение $\mathbf{E}\,(\xi_1|\xi_2 = y_j)$ с вероятностью $p_{\cdot j}$, то есть

$$\mathbf{E}\,(\xi_1|\xi_2)(\omega) = \sum_j \mathbf{E}\,(\xi_1|\xi_2 = y_j)\mathbf{1}_{\{\xi_2 = y_j\}}(\omega).$$

С примерами условных математических ожиданий мы уже сталкивались в параграфе 3.3.

Пример 78. Пусть N различимых частиц размещаются по M ячейкам, причем каждая частица попадает в ячейку с номером j независимо от остальных с вероятностью p_j $\left(\sum\limits_{j=1}^{M} p_j = 1\right)$. Пусть h_j — случайная величина, равная числу частиц в j-й ячейке. Найдем условное математическое ожидание $\mathbf{E}\,(h_1|h_2)$.

Сначала найдем вероятность $\mathbf{P}\{h_1 = n, h_2 = m\}$. Любая частица попадает в первую ячейку независимо от остальных с вероятностью p_1, во вторую — с вероятностью p_2, и в любую из оставшихся $M-2$ ячеек — с вероятностью $1-p_1-p_2$. Так как частицы различимы, то в первую ячейку частицы могут попасть C_N^n способами, а во вторую C_{N-n}^m способами. Таким образом,

$$\mathbf{P}\{h_1 = n, h_2 = m\} = C_N^n C_{N-n}^m p_1^n p_2^m (1 - p_1 - p_2)^{N-n-m}$$

при $n, m \geq 0$, $n + m \leq N$. Аналогично,

$$\mathbf{P}\{h_2 = m\} = C_N^m p_2^m (1 - p_2)^{N-m}, \quad 0 \leq m \leq N.$$

Тогда

$$\mathbf{E}\,(h_1|h_2 = m) = \frac{1}{\mathbf{P}\{h_2 = m\}} \sum_{n=0}^{N-m} n\mathbf{P}\{h_1 = n, h_2 = m\} =$$

$$= \frac{1}{\mathbf{P}\{h_2 = m\}} \sum_{n=0}^{N-m} nC_N^n C_{N-n}^m p_1^n p_2^m (1 - p_1 - p_2)^{N-n-m} =$$

$$= \frac{m!(N-m)!}{N! p_2^m (1 - p_2)^{N-m}} \sum_{n=0}^{N-m} \frac{nN! p_1^n p_2^m (1 - p_1 - p_2)^{N-n-m}}{n! m! (N - n - m)!} =$$

$$= \frac{1}{(1 - p_2)^{N-m}} \sum_{n=0}^{N-m} n \frac{(N-m)!}{n!(N-n-m)!} p_1^n (1 - p_1 - p_2)^{N-m-n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-m} nC_{N-m}^n \Big(\frac{p_1}{1 - p_2}\Big)^n \Big(\frac{1 - p_2 - p_1}{1 - p_2}\Big)^{N-m-n}.$$

Точно такой же суммой выражается математическое ожидание случайной величины с распределением $Bi\Big(N-m, \dfrac{p_1}{1-p_2}\Big)$, оно равно $\dfrac{p_1}{1-p_2}(N-m)$. Значит,

$$\mathbf{E}\,(h_1|h_2) = \frac{p_1}{1 - p_2}(N - h_2).$$

Пример 79. Пусть случайные величины ξ_1, ξ_2 независимы, $\mathcal{L}(\xi_k) = \Pi(\lambda_k)$; пусть $\eta = \xi_1 + \xi_2$. Найти $\mathbf{E}\,(\xi_1|\eta)$.

Закон распределения $\mathcal{L}(\xi_1|\eta)$ задается набором вероятностей

$$\mathbf{P}(\xi_1 = m|\eta = n) = \frac{\mathbf{P}(\xi_1 = m, \eta = n)}{\mathbf{P}(\eta = n)} =$$

$$= \frac{\mathbf{P}(\xi_1 = m, \xi_2 = n - m)}{\mathbf{P}(\eta = n)} = \frac{\dfrac{\lambda_1^m}{m!} e^{-\lambda_1} \dfrac{\lambda_2^{n-m}}{(n-m)!} e^{-\lambda_2}}{\dfrac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}} =$$

$$= \frac{n!}{m!(n-m)!} \frac{\lambda_1^m \lambda_2^{n-m}}{(\lambda_1 + \lambda_2)^n} = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m},$$

где $p = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$. Последнее равенство означает, что

$$\mathcal{L}\left(\xi_1 | \eta = n\right) = Bi(n, p).$$

Значит, $\mathbf{E}\ (\xi_1|\eta = n) = np = n\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$. Отсюда

$$\mathbf{E}\ (\xi_1|\eta) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\,\eta.$$

Теорема 21. (*тождество Вальда*). *Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с конечным $\mathbf{E}\, X_1$. Пусть ξ — положительная целочисленная случайная величина с конечным $\mathbf{E}\,\xi$. Тогда*

$$\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{\xi} X_i\right) = \mathbf{E}\, X_1 \mathbf{E}\,\xi. \tag{36}$$

Доказательство. Воспользуемся формулой полного математического ожидания

$$\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{\xi} X_i\right) = \mathbf{E}\ \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{\xi} X_i \middle| \xi\right).$$

Вычислим сначала

$$\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{\xi} X_i \middle| \xi = n\right) = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = n\mathbf{E}\, X_1.$$

Значит,

$$\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{\xi} X_i \middle| \xi\right) = \xi\mathbf{E}\, X_1.$$

Взяв математическое ожидание от обеих частей последнего равенства, получим (36). □

5.7 Условные распределения в непрерывных моделях

Рассмотрим непрерывный случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$ с плотностью распределения $f_\xi(x, y)$.

Условной плотностью распределения случайной величины ξ_1 при условии $\xi_2 = y$ называется

$$f_{\xi_1|\xi_2}(x,y) = \begin{cases} f_\xi(x,y)/f_{\xi_2}(y), & f_{\xi_2}(y) > 0, \\ 0, & f_{\xi_2}(y) = 0. \end{cases} \tag{37}$$

Условное математическое ожидание случайной величины ξ_1 при условии $\xi_2 = y$ принято называть **функцией регрессии** ξ_1 по ξ_2. Оно вычисляется как

$$\mathbf{E}\,(\xi_1|\xi_2 = y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{\xi_1|\xi_2}(x,y)\, dx = \frac{1}{f_{\xi_2}(y)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, f_\xi(x,y)\, dx.$$

Условное математическое ожидание $\mathbf{E}\,(\xi_1|\xi_2)$ называется **регрессией** ξ_1 по ξ_2. Кривая с уравнением $x = \mathbf{E}\,(\xi_1|\xi_2 = y)$ называется **линией регрессии** ξ_1 по ξ_2.

Пример 80. Найдем регрессию ξ_1 по ξ_2, если $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$ имеет невырожденный нормальный закон распределения с вектором средних и ковариационной матрицей

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}, \qquad \Sigma_\xi = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

Плотность вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$ имеет вид (32). Известно (см. параграф 5.4), что случайная величина $\xi_2 \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$. Поэтому условная плотность

$$f_{\xi_1|\xi_2}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \exp\Big\{-\frac{1}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)} G(x,y)\Big\},$$

где через $G(x,y)$ обозначено выражение

$$\sigma_1^2\bigg(\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2} - \frac{2\rho(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2}\bigg) - \\ - \sigma_1^2(1-\rho^2)\frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2} = \\ = (x-m_1)^2 - \frac{2\rho\sigma_1(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_2} + \sigma_1^2\rho^2\frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2} = \\ = \Big((x-m_1) - \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-m_2)\Big)^2.$$

Таким образом,

$$f_{\xi_1|\xi_2}(x,y) = \frac{\exp\Big\{\frac{-1}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\Big(x - m_1 - \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-m_2)\Big)^2\Big\}}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}.$$

Это плотность нормального закона распределения, а именно

$$\mathcal{L}(\xi_1|\xi_2 = y) = \mathcal{N}\Big(m_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - m_2), \sigma_1^2(1-\rho^2)\Big).$$

Значит, функция регрессии

$$\mathbf{E}\,(\xi_1|\xi_2 = y) = m_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - m_2).$$

Тогда

$$\mathbf{E}\,(\xi_1|\xi_2) = m_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\xi_2 - m_2).$$

Линия регрессии $x = m_1 + \rho\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - m_2)$ — прямая, проходящая через точку (m_1, m_2), причем она имеет положительный наклон при $\rho > 0$ и отрицательный при $\rho < 0$ (см. рис. 52). Чем $|\rho|$ ближе к 1, тем ближе к этой прямой сосредоточено распределение ξ. Однако, при $0 < |\rho| < 1$ линия регрессии не совпадает с осью рассеивания.

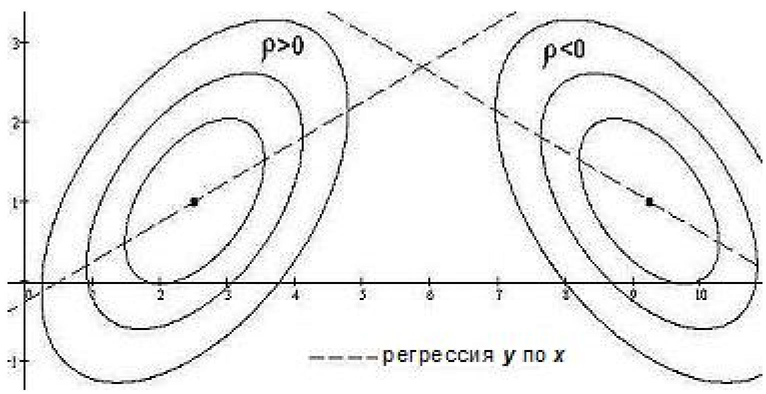

Рис. 52

Пример 81. Пусть ξ_1, ξ_2 — независимые одинаково распределенные случайные величины с плотностью распределения $f(x)$ и конечным математическим ожиданием. Пусть

$$\eta_1 = \min\{\xi_1, \xi_2\},\ \eta_2 = \max\{\xi_1, \xi_2\}.$$

Пусть наблюдению доступна только случайная величина η_2. Построим оптимальный в среднем квадратичном прогноз для случайной величины η_1.

Сначала найдем двумерную плотность случайного вектора $f_\eta(x,y)$. Согласно теореме о свойствах двумерной плотности, при $x < y$, при $\varepsilon, \delta \to 0$

$$\mathbf{P}\{x < \eta_1 < x+\delta, y < \eta_2 < y+\varepsilon\} = \delta\,\varepsilon\big(f_\eta(x,y) + o(1)\big).$$

С другой стороны, при $0 < \delta$, $\varepsilon < y - x$ имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{x < \eta_1 < x+\delta,\, y < \eta_2 < y+\varepsilon\} &= \\
&= \mathbf{P}\{x < \xi_1 < x+\delta,\, y < \xi_2 < y+\varepsilon\} + \\
&+ \mathbf{P}\{x < \xi_2 < x+\delta,\, y < \xi_1 < y+\varepsilon\} = \\
&= f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y) \delta\varepsilon \left(1 + o(1)\right) + f_{\xi_2}(x) f_{\xi_1}(y) \delta\varepsilon \left(1 + o(1)\right) = \\
&= 2f(x)f(y)\delta\varepsilon\left(1+o(1)\right), \quad \varepsilon, \delta \to 0.
\end{aligned}$$

Приравнивая два выражения для вероятности и переходя к пределу при $\varepsilon, \delta \to 0$, получим

$$f_\eta(x,y) = 2f(x)f(y), \quad x < y.$$

Теперь вычислим плотность распределения η_2:

$$f_{\eta_2}(y) = \int\limits_{-\infty}^{y} f_\eta(x,y)dx = 2\int\limits_{-\infty}^{y} f(x)f(y)dx = $$

$$= 2f(y)\int\limits_{-\infty}^{y} f(x)dx = 2f(y)F(y).$$

Тогда, согласно формуле (37), имеем при $x < y$

$$f_{\eta_1|\eta_2}(x,y) = \frac{f_\eta(x,y)}{f_{\eta_2}(y)} = \frac{2f(x)f(y)}{2f(y)F(y)} = \frac{f(x)}{F(y)}.$$

Значит,

$$\mathbf{E}\left(\eta_1|\eta_2 = y\right) = \int x f_{\eta_1|\eta_2}(x,y)dx = \frac{1}{F(y)}\int\limits_{-\infty}^{y} x f(x)dx.$$

Подставляя в последнюю формулу η_2 вместо y, получаем

$$\mathbf{E}\,(\eta_1|\eta_2) = \frac{1}{F(\eta_2)} \int\limits_{-\infty}^{\eta_2} x f(x) dx.$$

Например, если случайные величины ξ_1 и ξ_2 распределены равномерно на $[0, 1]$ (пример 70), то $f(x) = 1$, $F(x) = x$, $x \in [0, 1]$,

$$\mathbf{E}\,(\eta_1|\eta_2) = \frac{1}{\eta_2} \int\limits_{0}^{\eta_2} x dx = \frac{\eta_2}{2}.$$

5.8 Формула свертки

Пусть случайные величины ξ и η независимы и имеют функции распределения $F_\xi(x)$ и $F_\eta(x)$ соответственно. Нас будет интересовать распределение случайной величины $\xi + \eta$.

Сначала рассмотрим независимые дискретные ξ и η. Обозначим через $x_1, x_2, \ldots$ и $y_1, y_2, \ldots$ возможные значения случайных величин ξ и η. В дискретном случае удобнее говорить об отдельных вероятностях $\mathbf{P}\{\xi + \eta = z_n\}$. Согласно формуле полной вероятности имеем

$$\mathbf{P}\{\xi + \eta = z_k\} = \sum_{\substack{n,m \geq 1: \\ x_n + y_m = z_k}} \mathbf{P}\{\xi = x_n\} \mathbf{P}\{\eta = y_m\}.$$

Это дискретная формула свертки. Ранее мы уже применяли эту формулу, см. теорему 4.

Пример 82. В параграфе 3.4 было введено геометрическое распределение как распределение числа испытаний Бернулли до первого успеха включительно. Найдем свертку m таких распределений.

Пусть случайные величины $\tau_1, \tau_2, \ldots$ независимы и имеют геометрическое распределение, задаваемое формулой (14). Тогда при $n \geq 2$

$$\mathbf{P}\{\tau_1 + \tau_2 = n\} = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}\{\tau_1 = k\} \mathbf{P}\{\tau_2 = n - k\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} p(1-p)^{k-1} p(1-p)^{n-k-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} p^2(1-p)^{n-2} = (n-1)p^2(1-p)^{n-2} = C_{n-1}^1 p^2(1-p)^{n-2}.$$

Далее, при $n \geq 3$

$$\mathbf{P}\{\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = n\} = \sum_{k=1}^{n-2} \mathbf{P}\{\tau_1 + \tau_2 = n-k\}\mathbf{P}\{\tau_3 = k\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-2} (n-k-1)p^2(1-p)^{n-k-2}p(1-p)^{k-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-2} (n-1-k)p^3(1-p)^{n-3} = \frac{(n-2)(n-1)}{2}p^3(1-p)^{n-3} =$$

$$= C_{n-1}^2 p^3(1-p)^{n-3}.$$

По индукции можно показать, что

$$\mathbf{P}\{\tau_1 + \ldots + \tau_m = n\} = C_{n-1}^{m-1} p^m (1-p)^{n-m}, \quad n \geq m.$$

Случайная величина $\tau_1 + \ldots + \tau_m$ равна числу испытаний до m-го успеха в испытаниях Бернулли. Ее закон распределения называют **отрицательным биномиальным**.

Пусть ξ и η — независимые непрерывные случайные величины с плотностями $f_\xi(x)$ и $f_\eta(x)$. Очевидно, что случайная величина $\xi + \eta$ также будет непрерывной. Найдем ее функцию распределения. Так как случайные величины ξ и η независимы, то их совместная плотность распределения

$$f_{(\xi,\eta)}(x,y) = f_\xi(x) f_\eta(y).$$

Значит,

$$F_{\xi+\eta}(z) = \mathbf{P}\{\xi + \eta < z\} = \iint\limits_{x+y<z} f_{(\xi,\eta)}(x,y)\,dxdy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_\eta(y)dy \int_{-\infty}^{z-y} f_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\eta(y) F_\xi(z-y)dy;$$

$$f_{\xi+\eta}(z) = F'_{\xi+\eta}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\eta(y) F'_\xi(z-y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\eta(y) f_\xi(z-y)dy.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 22. *Если ξ и η — независимые непрерывные случайные величины, $f_\xi(x)$ и $f_\eta(x)$ — их плотности, то случайная величина $\xi+\eta$ — непрерывная с плотностью*

$$f_{\xi+\eta}(x) = f_\xi * f_\eta(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(y) f_\eta(x-y)dy. \tag{38}$$

Формула (38) называется формулой свертки для непрерывных распределений.

Пример 83. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, $\xi \sim R[0,1]$, $\eta \sim R[0,2]$. Найти плотность распределения случайной величины $\xi+\eta$.

Имеем

$$f_\xi(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x), \qquad f_\eta(x) = \frac{1}{2}\cdot \mathbf{1}_{[0,2]}(x).$$

Поскольку $0 \le \xi \le 1$, $0 \le \eta \le 2$, случайная величина $\xi+\eta$ не принимает значений вне отрезка $[0,3]$. Вычислим ее плотность $f(x) = f_{\xi+\eta}(x)$ при $x \in [0,3]$ по формуле (38).

$$f(x) = \int\limits_0^1 f_\eta(x-y)dy = \int\limits_{[0,1]\cap[x-2,x]} \frac{dy}{2} = \begin{cases} x/2 & \text{на } [0,1], \\ 1/2 & \text{на } (1,2), \\ (3-x)/2 & \text{на } [2,3]. \end{cases}$$

График плотности показан на рис. 53.

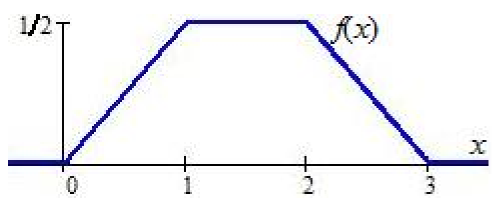

Рис. 53

Пример 84. Устройство состоит из одного работающего элемента (основного) и одного резервного, причем в любой момент времени работает только один элемент. Если основной элемент выходит из строя, он сразу заменяется резервным. При поломке резервного элемента устройство выходит из строя. Найти вероятность того, что устройство проработает не менее 150 часов, если среднее время работы основного элемента составляет 100 часов, резервного 120 часов, и время работы обоих элементов считается распределенным по экспоненциальному закону.

Пусть ξ — время работы основного элемента, η — резервного элемента. Очевидно, ξ и η независимы. Согласно условию

$$\xi \sim Exp(\lambda), \quad \eta \sim Exp(\mu),$$

и так как $E\xi = \lambda^{-1} = 100$, $\mathbf{E}\,\eta = \mu^{-1} = 120$, имеем $\lambda = 0{,}01$, $\mu = 0{,}0083$. Время работы устройства равно $\xi + \eta$, поэтому согласно формуле (38) при $y > 0$

$$f_{\xi+\eta}(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x) f_\eta(y-x)dx =$$

$$= \int\limits_0^y \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu(y-x)} dx = \lambda\mu e^{-\mu y} \int\limits_0^y e^{-\lambda x + \mu x} dx =$$

$$= \lambda\mu e^{-\mu y} \left. \frac{e^{x(\mu-\lambda)}}{\mu - \lambda} \right|_0^y = \frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda}\left(e^{-\lambda y} - e^{-\mu y}\right).$$

На рис. 54 показаны плотности распределения двух слагаемых и их суммы.

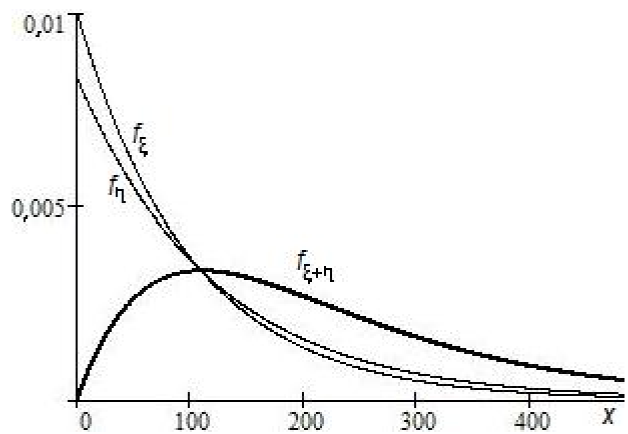

Рис. 54

Тогда

$$\mathbf{P}\{\xi + \eta > T\} = \int\limits_T^{+\infty} f_{\xi+\eta}(y)dy = \frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda} \int\limits_T^{+\infty} \left(e^{-\lambda y} - e^{-\mu y}\right) dy =$$

$$= \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu}\right)^{-1} \left.\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda y} + \frac{1}{\mu}e^{-\mu y}\right)\right|_T^{+\infty} =$$

$$= \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu}\right)^{-1} \left(\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda T} - \frac{1}{\mu}e^{-\mu T}\right).$$

Подставляя в последнюю формулу найденные выше значения параметров λ и μ и $T = 150$, получим

$$\mathbf{P}\{\xi + \eta > 150\} = \\ = (100 - 120)^{-1} \left(100e^{-150/100} - 120e^{-150/120}\right) = \\ = -\frac{1}{20}\left(100e^{-1{,}5} - 120e^{-1{,}25}\right) = 0{,}603.$$

Теперь рассмотрим свертку случайных величин разных типов. Пусть случайная величина ξ дискретна и принимает значения $x_1, x_2, \ldots$, а η не зависит от нее и непрерывна, $f_\eta(x)$ — ее плотность распределения. Тогда

$$F_{\xi+\eta}(z) = \mathbf{P}\{\xi + \eta < z\} = \sum_k \mathbf{P}\{\xi = x_k\}\mathbf{P}\{\eta < z - x_k\} = \\ = \sum_k \mathbf{P}\{\xi = x_k\} F_\eta(z - x_k).$$

Дифференцируя последнее равенство по z, получим

$$f_{\xi+\eta}(z) = \sum_k \mathbf{P}\{\xi = x_k\} f_\eta(z - x_k). \qquad (39)$$

Пример 85. По каналу связи передаются двоичные знаки, причем соотношение передаваемых нулей и единиц составляет 1 к 2. Далее к знаку независимо прибавляется случайная помеха, распределенная равномерно на отрезке $[0, 1]$. Найти функцию распределения результирующего сигнала.

Пусть ξ — переданный знак. Ряд распределения случайной величины ξ имеет вид

$$\begin{array}{ccc} \xi & 0 & 1 \\ \mathbf{P} & 1/3 & 2/3. \end{array}$$

Пусть η — случайная помеха, $f_\eta(x) = 1, x \in [0, 1]$. Согласно формуле (39) имеем

$$f_{\xi+\eta}(z) = \mathbf{P}\{\xi = 0\} f_\eta(z) + \mathbf{P}\{\xi = 1\} f_\eta(z - 1) = \\ = \frac{1}{3} f_\eta(z) + \frac{2}{3} f_\eta(z - 1) = \begin{cases} 1/3, & z \in (0, 1), \\ 2/3, & z \in (1, 2), \\ 0, & z \notin [0, 2]. \end{cases}$$

Функция распределения $\xi+\eta$ имеет вид

$$F_{\xi+\eta}(z)=\begin{cases} 0, & z\le 0,\\ z/3, & 0<z\le 1,\\ (2z-1)/3, & 1<z\le 2,\\ 1, & z>2. \end{cases}$$

Графики плотности и функции распределения приведены на рис. 55.

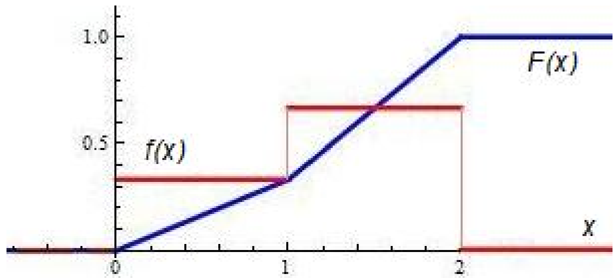

Рис. 55

5.9 Функции двумерных случайных векторов

Пусть $\xi=(\xi_1,\xi_2)$ — дискретный двумерный случайный вектор с двумерным рядом распределения

$\xi_1\backslash\xi_2$	y_1	y_2	$\ldots$	y_j	$\ldots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\ldots$	p_{1j}	$\ldots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\ldots$	p_{2j}	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\ldots$	p_{ij}	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

Пусть $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ — числовая функция. Определим случайную величину $\eta=g(\xi)=g(\xi_1,\xi_2)$, которая будет функцией от двумерного случайного вектора $\xi=(\xi_1,\xi_2)$. Ясно, что η будет дискретной случайной величиной.

Найдем ее ряд распределения. Обозначим через $z_1,z_2,\ldots$ все различные значения, являющиеся образами точек множества $\{(x_i,y_j)\}_{i,j\ge 1}$ при отображении g, то есть для каждого $k=1,2,\ldots$ найдутся такие индексы $i,j\ge 1$, для которых $z_k=g(x_i,y_j)$. Пользуясь формулой полной вероятности, можно записать, что

$$\mathbf{P}\{\eta=z_k\}=\sum_{i,j:\,g(x_i,y_j)=z_k} p_{ij},\quad k=1,2,\ldots$$

Поясним на примере, как строится ряд распределения η.

Пример 86. Ряд распределения двумерного дискретного случайного вектора имеет вид

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-1	0	1
-1	0,05	0,2	0,1
0	0,2	0,15	0,05
1	0,1	0,05	0,1

Найти закон распределения случайной величины $\eta = \xi_1 \xi_2$.

Заметим, что множество возможных значений случайной величины $\eta = \xi_1 \xi_2$ — множество $\{-1, 0, 1\}$. Для каждого элемента из этого множества вычислим его вероятность

$$\mathbf{P}\{\eta = -1\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = -1, \xi_2 = 1\} + \mathbf{P}\{\xi_1 = 1, \xi_2 = -1\} = 0{,}2,$$
$$\mathbf{P}\{\eta = 1\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = 1, \xi_2 = 1\} + \mathbf{P}\{\xi_1 = -1, \xi_2 = -1\} = 0{,}15,$$
$$\mathbf{P}\{\eta = 0\} = 1 - \mathbf{P}\{\eta = -1\} - \mathbf{P}\{\eta = 1\} = 0{,}65.$$

Таким образом, ряд распределения для η имеет вид

-1	0	1
0,2	0,65	0,15

Описанный выше способ естественным образом можно обобщить на случай $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Для вычисления двумерного ряда распределения случайного вектора $\eta = g(\xi_1, \xi_2)$ точно так же будем пользоваться формулой полной вероятности, с той разницей, что элементы множества $\{z_1, z_2, \ldots\}$ — двумерные точки.

Пример 87. Для случайного вектора ξ из предыдущего примера найдем закон распределения вектора

$$\eta = (\xi_1^2 - \xi_2^2, |\xi_1 \xi_2|).$$

Множество возможных значений случайного вектора η есть

$$\{(-1, 0), (0, 0), (1, 0), (0, 1)\}.$$

Вычислим вероятности для каждой точки из этого множества

$$\mathbf{P}\{\eta = (-1, 0)\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = 0, \xi_2 = \pm 1\} = 0{,}2 + 0{,}05 = 0{,}25,$$
$$\mathbf{P}\{\eta = (0, 0)\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = 0, \xi_2 = 0\} = 0{,}15,$$
$$\mathbf{P}\{\eta = (1, 0)\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = \pm 1, \xi_2 = 0\} = 0{,}2 + 0{,}05 = 0{,}25,$$
$$\mathbf{P}\{\eta = (0, 1)\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = \pm 1, \xi_2 = \pm 1\} = 0{,}35.$$

Теперь можем записать двумерный ряд распределения для η:

$\eta_1 \backslash \eta_2$	0	1
-1	0,25	0
0	0,15	0,35
1	0,25	0

Теперь перейдем к функциям от непрерывных двумерных векторов. Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ — непрерывный двумерный случайный вектор с плотностью $f_\xi(x, y)$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Напомним, что для любого $A \subseteq \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}\{\xi \in A\} = \iint\limits_{(x,y)\in A} f_\xi(x, y)dxdy.$$

Воспользуемся этим свойством для вычисления функции распределения случайной величины $\eta = g(\xi)$:

$$F_\eta(z) = \mathbf{P}\{\eta < z\} = \mathbf{P}\{g(\xi_1, \xi_2) < z\} = \iint\limits_{g(x,y)<z} f_\xi(x, y)dxdy.$$

Далее, плотность распределения (если η — непрерывная случайная величина) можно найти, дифференцируя последнее равенство по z.

Пример 88. Пусть случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ равномерно распределен в прямоугольнике

$$D = \{(x, y) : \quad 0 < x < 4, \ -1 < y < 4\}.$$

Найдем плотность распределения случайной величины $\eta = \xi_1\xi_2$. Заметим, что η непрерывна и может принимать значения из $(-4, 16)$. Значит, $F_\eta(z) = 0$ при $z \leq -4$ и $F_\eta(z) = 1$ при $z \geq 16$. Тогда при $-4 < z < 16$

$$F_\eta(z) = \mathbf{P}\{\xi_1\xi_2 < z\} = \mathbf{P}\{\xi_2 < z/\xi_1\} = \iint\limits_{\substack{0<x<4\\-1<y<z/x}} f_\xi(x, y)dxdy.$$

Пусть сначала $-4 < z < 0$. Область, по которой интегрируем, ограничена кривыми $y = -1, x = 4, y = z/x$ (см. рис. 56). Значит,

$$F_\eta(z) = \int\limits_{-z}^{4}\int\limits_{-1}^{z/x} \frac{1}{20}dydx = \frac{1}{20}\int\limits_{-z}^{4} \left(\frac{z}{x} + 1\right) dx =$$

$$= \frac{1}{20}(z \ln|x| + x)\Big|_{x=-z}^{4} = \frac{1}{20}\left(z \ln 4 - z \ln|z| + 4 + z\right).$$

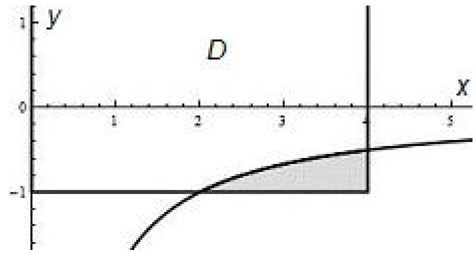

Рис. 56

Пусть теперь $0 < z < 16$. Тогда интегрируем по заштрихованной области (рис. 57). В этом случае проще вычислить интеграл по незаштрихованной части D, а потом вычесть полученное значение из единицы. Имеем

$$F_\eta(z) = 1 - \int\limits_{z/4}^{4}\int\limits_{z/x}^{4} \frac{1}{20} dy dx = 1 - \frac{1}{20}\int\limits_{z/4}^{4}\left(4 - \frac{z}{x}\right) dx =$$

$$= 1 - \frac{4x - z\ln|x|}{20}\Big|_{x=z/4}^{4} = 1 - \frac{1}{20}\left(16 - z - z\ln 4 + z\ln\frac{z}{4}\right).$$

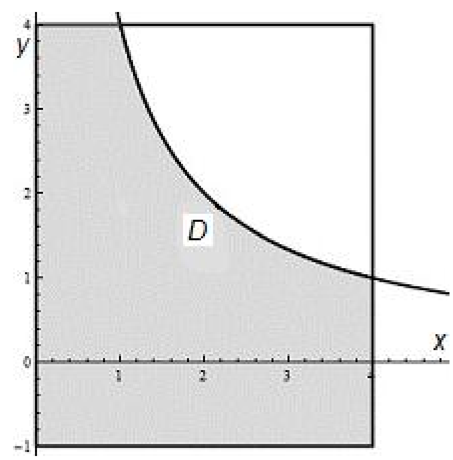

Рис. 57

Найдем плотность распределения

$$f_\eta(z) = \frac{d}{dz}F_\eta(z) = \begin{cases} 0, & z \notin (0,16), \\ 0{,}05\ln|4/z|, & -4 < z < 0, \\ 0{,}05\ln(16/z), & 0 < z < 16. \end{cases}$$

График функции распределения приведен на рис. 58.

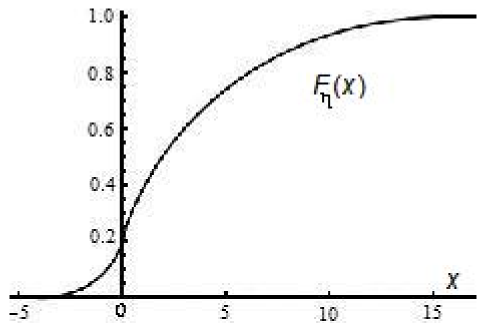

Рис. 58

График плотности распределения приведен на рис. 59.

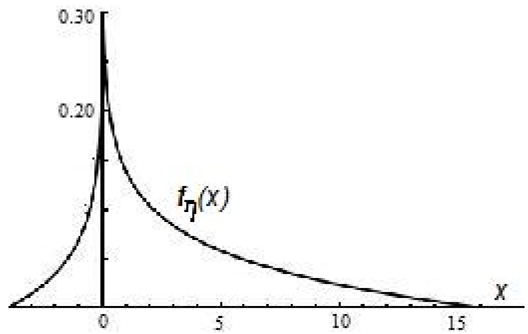

Рис. 59

Тот же прием можно использовать для функций $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. А именно, пусть $\eta = g(\xi) = \big(g_1(\xi_1, \xi_2), g_2(\xi_1, \xi_2)\big)$. Тогда

$$F_\eta(u, v) = \mathbf{P}\{\eta_1 < u, \eta_2 < v\} =$$
$$= \mathbf{P}\{g_1(\xi_1, \xi_2) < u,\ g_2(\xi_1, \xi_2) < v\} = \iint\limits_{\substack{g_1(x,y)<u,\\ g_2(x,y)<v}} f_\xi(x, y)dxdy.$$

Пример 89. Координата точки $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, брошенной на плоскость, имеет двумерный нормальный закон распределения с нулевым средним и ковариационной матрицей

$$\Sigma_\xi = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma^2 \\ \rho\sigma^2 & \sigma^2 \end{pmatrix}, \qquad |\rho| < 1.$$

Найти закон распределения полярных координат (R, φ) этой точки.

Так как $\xi_1 = R\cos\varphi$, $\xi_2 = R\sin\varphi$, при $v > 0$, $0 \leqslant u < 2\pi$ имеем

$$F_{(R,\varphi)}(u, v) = \mathbf{P}\{R < u, \varphi < v\} = \iint\limits_D f_\xi(x, y)dxdy,$$

область D заштрихована на рис. 60.

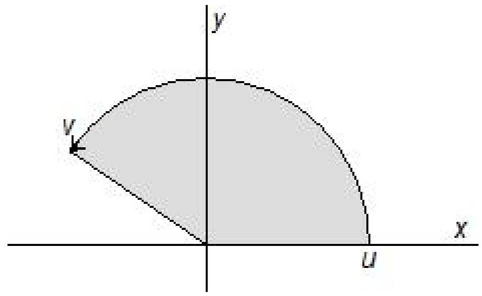

Рис. 60

Так как

$$f_\xi(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{x^2+y^2-2\rho xy}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right\}=$$
$$=\frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{r^2(1-\rho\sin 2\alpha)}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right\}.$$

Тогда интеграл преобразуется к виду

$$F_{(R,\varphi)}(u,v)=\int\limits_0^v\int\limits_0^u rf_\xi\,drd\alpha=$$
$$=\int\limits_0^v\int\limits_0^u\frac{r}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{r^2\,(1-\rho\sin 2\alpha)}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right\}drd\alpha=$$
$$=\frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}}\int\limits_0^v\int\limits_0^u r\exp\left\{-\frac{r^2\,(1-\rho\sin 2\alpha)}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right\}drd\alpha.$$

Значит,

$$f_{(R,\varphi)}(u,v)=\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}F_{(R,\varphi)}(u,v)=$$
$$\frac{r}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{r^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\,(1-\rho\sin 2\alpha)\right\}.$$

Задачи по теме главы 5

5.1. В ящике было 6 белых и 4 синих шара. Двое одновременно взяли по три шара. Пусть X — число синих шаров у первого, Y у второго. Найти:

а) двумерный ряд распределения (X, Y),
б) маргинальные распределния X и Y,
в) вектор средних и матрицу ковариации,
г) условный закон распределения $\mathbf{P}(Y = \cdot|X)$,
д) условное математическое ожидание $\mathbf{E}\,(Y|X)$,
е) закон распределения величины $Z = XY$.

5.2. Подбросили 4 монеты: 1, 2, 5 и 10 рублей. Найти коэффициент корреляции между числом монет, выпавших решками, и суммой номиналов этих решек.

5.3. Пусть случайная точка (X, Y) равномерно распределена в круге $\{X^2 + Y^2 < 1\}$. Найти:
а) двумерную плотность распределения (X, Y) и маргинальные плотности распределния X и Y,
б) матрицу ковариации и коэффициент корреляции X и Y;
в) условный закон распределения $\mathbf{P}(Y = \cdot|X)$;
г) доказать, что X и Y зависимы.

5.4. Пусть X, Y — независимые случайные величины, причем $\mathbf{D}\,X = 1$, $\mathbf{D}\,Y = 3$. Найти коэффициент корреляции $X + Y$ и $2X + 3Y$.

5.5. Пусть ξ — случайная величина, равномерно распределенная на $[0; 1]$. Найти коэффициент корреляции ξ и ξ^2.

5.6. Пусть распределение случайной величины ξ симметрично относительно нуля. Доказать, что случайные величины ξ и ξ^2 зависимы, но не коррелированы.

5.7. Пусть $\xi \sim Exp(\lambda)$, и пусть $\eta = [\xi]$ — ее целая часть. Найти условное математическое ожидание $\mathbf{E}\,(\xi|\eta)$.

5.8. Закон распределения случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ задан таблицей

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-1	0	2
-2	0,2	0,15	0,1
1	0,1	0,05	0,2
2	0,05	0	0,15

Найти
а) двумерную функцию распределения вектора ξ;
б) законы распределения компонент ξ_1 и ξ_2,
в) вектор средних и ковариационную матрицу для ξ,
г) закон распределения случайного вектора $\varsigma = \begin{bmatrix} \xi_1\xi_2 \\ |\xi_1 - \xi_2| \end{bmatrix}$.

5.9. Пусть случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ равномерно распределен в треугольнике $\{|x| < y < 1\}$. Найти
а) двумерную функцию распределения,
б) одномерные плотности распределения ξ_1 и ξ_2,
в) вектор средних и ковариационную матрицу для ξ,
г) регрессию ξ_2 по ξ_1.

5.10. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ имеет плотность распределения $f_\xi(x, y) = A\sin(x+y)$, $0 \le x \le \pi/2$, $0 \le y \le \pi/2$. Чему равна константа A? Найти

а) вектор средних и ковариационную матрицу для ξ,

б) законы распределения компонент ξ_1 и ξ_2,

в) плотность распределения величины $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

5.11. Пусть $(X, Y) \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{I})$. Найти вероятность попадания точки (X, Y) внутрь трапеции с вершинами $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 0)$. *Указание*: воспользоваться симметрией относительно прямой $\{x = y\}$.

5.12. Пусть (X, Y) — двумерное гауссовское распределение, причем $\mathbf{E}\, X = \mathbf{E}\, Y = 1$, $\mathbf{D}\, X = 2$, $\mathbf{D}\, Y = 5$, $\operatorname{cov}(X, Y) = 3$. Найти плотность двумерного распределения.

5.13. Плотность двумерного гауссовского распределения

$$f(x, y) = C\exp(-2x^2 - y^2 + xy - 3x + y).$$

Найти константу C, вектор средних и матрицу ковариации.

5.14. Для случайного вектора

$$\xi = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right)$$

найти регрессию Y по X и регрессию X по Y.

5.15. Найти эллипс рассеивания, внутрь которого случайная точка с распределением из задачи 5.12 попадает с вероятностью 90%. *Указание*: линейным преобразованием (см. следствие 5.1) перейти к стандартному двумерному нормальному распределению и применить распределение Рэлея, см. пример 77.

5.16. В коробке лежат шары с номерами от 1 до 9. Берем обеими руками по шару. Пусть X — номер шара, взятого правой рукой, Y — левой. Найти условное математическое ожидание $\mathbf{E}\,(Y|X)$.

5.17. Подбросили 6 медных и 3 серебряные монеты. На них выпадет X орлов, в том числе Y орлов на серебряных. Найти условные распределния $\mathbf{P}\{Y = \cdot|X = x\}$, $x = 0, \ldots, 9$.

5.18. В квадрат со стороной 1 наудачу бросается точка, (X, Y) — ее координаты. Для положительного числа z найти вероятность того, что $XY < z$.

5.19. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, равномерно распределенные на $[0, a]$. Пусть $X = \xi + \eta$, $Y = |\xi - \eta|$. Найти плотность распределения случайного вектора (X, Y).

5.20. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые случайные величины с распределением $Exp(1)$. Доказать, что величина $\xi_1 + \ldots + \xi_n$ имеет плотность распределения

$$f_n(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-x}$$

(гамма-распределение). *Указание*: применить индукцию по n.

6 Закон больших чисел и центральная

предельная теорема

6.1 Неравенства Маркова и Чебышёва

Теорема 23. (*Неравенство Маркова*). *Пусть ξ — неотрицательная случайная величина, имеющая конечное математическое ожидание. Тогда при любом $C > 0$ выполнено неравенство*

$$\mathbf{P}\{\xi \geq C\} \leq \frac{\mathbf{E}\,\xi}{C}. \tag{40}$$

Доказательство. Рассмотрим случайную величину

$$\eta = C \cdot \mathbf{1}_{\{\xi \geq C\}}.$$

Всегда $\eta \leq \xi$, и по свойству монотонности получается $\mathbf{E}\,\eta \leq \mathbf{E}\,\xi$. Поскольку $\mathbf{E}\,\eta = C\,\mathbf{P}\{\xi \geq C\}$, получим неравенство (40). □

Пример 90. Студент Иванов в среднем опаздывает на лекцию на пять минут. Используя неравенство Маркова, оценить вероятность того, что Иванов опоздает не менее, чем на 15 мин. Вычислить эту вероятность точно, считая, что время опоздания распределено экспоненциально, и сравнить результаты.

Пусть случайная величина τ — время опоздания Иванова на лекцию в минутах. Известно, что $\mathbf{P}\{\tau \geq 0\} = 1$ и $\mathbf{E}\,\tau = 5$. Согласно неравенству Маркова

$$\mathbf{P}\{\tau \geq 15\} \leq \frac{\mathbf{E}\,\tau}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

Вычислим эту же вероятность, считая что $\tau \sim Exp(\lambda)$. В этом случае $\mathbf{E}\,\tau = \lambda^{-1} = 5$, то есть $\lambda = 0{,}2$. Тогда

$$\mathbf{P}\{\tau \geq 15\} = 1 - F_\tau(15) = e^{-15\lambda} = e^{-3} \approx 0{,}05.$$

Из полученных численных значений видно, что неравенство Маркова дает довольно грубую оценку.

Теорема 24. (*Неравенство Чебышёва*). *Пусть ξ — случайная величина, имеющая конечную дисперсию. Тогда при всяком положительном C выполнено неравенство*

$$\mathbf{P}\{|\xi - \mathbf{E}\,\xi| \geq C\} \leq \frac{\mathbf{D}\,\xi}{C^2}. \tag{41}$$

Доказательство. Применим теорему 23 к неотрицательной случайной величине $\eta = (\xi - \mathbf{E}\,\xi)^2$. $\square$

Пример 91. Подбросили 120 игральных костей. Оценить вероятность того, что выпадут от 15 до 25 шестерок.

Число ν выпавших шестерок имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 120$, $p = 1/6$, откуда

$$\mathbf{E}\,\nu = np = 20, \quad \mathbf{D}\,\nu = np(1-p) = \frac{50}{3}.$$

По неравенству Чебышёва

$$\mathbf{P}\{15 \le \nu \le 25\} =$$
$$= 1 - \mathbf{P}\{|\nu - 20| \ge 6\} \ge 1 - \frac{50/3}{6^2} \approx 0{,}54.$$

Здесь тоже получилась грубая оценка: точное значение около 0,82.

Зато неравенства Маркова и Чебышёва применимы для всех случайных величин без каких-либо дополнительных условий.

6.2 Сходимость последовательности случайных величин

Дадим определения трех основных типов сходимости случайных величин.

Определение 28. Последовательность случайных величин ξ_n **сходится почти наверное** к случайной величине ξ, если

$$\mathbf{P}\{|\xi_n - \xi| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\} = 1.$$

Определение 29. Последовательность случайных величин ξ_n **сходится по вероятности** к случайной величине ξ, если

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \mathbf{P}\{|\xi_n - \xi| \ge \varepsilon\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Обозначение: $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi$.

Определение 30. Последовательность случайных величин ξ_n **сходится слабо** (сходится по распределению) к случайной величине ξ, если во всех точках непрерывности F_ξ выполнено

$$F_{\xi_n}(x) \to F_\xi(x) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Обозначение: $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{d}} \xi$.

Выясним взаимосвязь этих трех типов сходимости.

Теорема 25. *Если последовательность случайных величин ξ_n сходится почти наверное к случайной величине ξ, то сходится к ней и по вероятности.*

Доказательство. Множество

$$A_N^\varepsilon = \{\omega :\ \forall\, n > N\ |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon\} = \\ = \bigwedge_{n=N+1}^{\infty} \{\omega :\ |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon\}$$

входит в σ-алгебру событий. Очевидно, $A_N^\varepsilon \Rightarrow A_{N+1}^\varepsilon$. В силу сходимости почти наверное, мы имеем

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \ \mathbf{P}\Big(\bigvee_{N=1}^{\infty} A_N^\varepsilon\Big) = 1.$$

По непрерывности вероятности отсюда следует

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \mathbf{P}(A_N^\varepsilon) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Из этого вытекает, что $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \mathbf{P}\{|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$ □

Обратная импликация неверна.

Пример 92. (Сходимость по вероятности не влечет сходимость почти наверное). Пусть случайные величины ξ_n независимы,

$$\mathbf{P}\{\xi_n = n\} = \frac{1}{n}, \quad \mathbf{P}\{\xi_n = 0\} = 1 - \frac{1}{n}. \tag{42}$$

Тогда $\xi_n \to 0$ по вероятности, так как $\mathbf{P}\{|\xi_n - 0| \geq \varepsilon\} = 1/n \to 0$. Но сходимости почти наверное к 0 не будет: какое бы большое N мы ни взяли, получится

$$\mathbf{P}\Big\{|\xi_n - 0| < \frac{1}{2} \quad \forall\, n > N\Big\} = \\ = \prod_{n=N+1}^{\infty} \Big(1 - \frac{1}{n}\Big) \leqslant \prod_{n=N+1}^{\infty} e^{-1/n} = \exp \sum_{n=N+1}^{\infty} \Big(-\frac{1}{n}\Big) = 0.$$

Теперь подробно рассмотрим слабую сходимость.

Пример 93. 1) Если ξ_n принимает значения $x_{n1}, \ldots, x_{nm}$ с вероятностями $p_{n1}, \ldots, p_{nm}$, то сходимость $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{d}} \xi_0$ равносильна тому, что $x_{nj} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_{0j}$, $p_{nj} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} p_{0j}$.

2) Пусть $\mathbf{P}\{\xi_n = k/n\} = 1/n$, $k = 1, \ldots, n$. Тогда $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{d}} \xi$, где $\xi \sim R[0,1]$, т. е. дискретные случайные величины могут слабо сходиться к непрерывной.

3) Пусть ξ_n — непрерывная случайная величина с плотностью распределения

$$f_n(x) = \frac{2n+1}{2} x^{2n}, \quad |x| < 1.$$

Тогда $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{d}} \xi$, где $\mathbf{P}\{\xi = -1\} = \mathbf{P}\{\xi = 1\} = 1/2$, т. е. непрерывные случайные величины могут слабо сходиться к дискретной.

Теорема 26. *Следующие утверждения равносильны*:

(1) ξ_n *слабо сходятся к* ξ;

(2) $\mathbf{E}\, f(\xi_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{E}\, f(\xi)$ *для всякой ограниченной непрерывной* $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$;

(3) $\varphi_{\xi_n}(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi_\xi(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$.

Ограниченность функции f в пункте (2) — важное условие. Например, поскольку степенные функции неограничены, из слабой сходимости не следует сходимость моментов.

Пример 94. Случайные величины (42) слабо сходятся к 0, так как $F_{\xi_n}(x) = 0$ при $x < 0$ и $F_{\xi_n}(x) \to 1$ при $x > 0$. Но в то же время $\mathbf{E}\, \xi_n = 1 \nrightarrow 0$.

Теорема 27. *Из сходимости по вероятности следует слабая сходимость.*

Доказательство. Пусть $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi$. Возьмем произвольную ограниченную непрерывную функцию f. Пусть $|f| \le M$. Найдем такое $R > 0$, что $\mathbf{P}\{|\xi| > R\} < \varepsilon/6M$. Поскольку f равномерно непрерывна на $[-R-1, R+1]$, найдется такое δ, $0 < \delta < 1$, что $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/3$ при $x, y \in [-R-1, R+1]$, $|x - y| \le \delta$. Получаем

$$|\mathbf{E}\, f(\xi_n) - \mathbf{E}\, f(\xi)| \le \mathbf{E}\, |f(\xi_n) - f(\xi)| \le \\ \le \mathbf{E}\left(|f(\xi_n) - f(\xi)| \cdot \mathbf{1}_{\{|\xi| \le R\}}\right) + 2M\mathbf{P}\{|\xi| > R\} \le \\ \le \frac{\varepsilon}{3} + 2M\mathbf{P}\{|\xi_n - \xi| > \delta\} + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Второе слагаемое станет меньше $\varepsilon/3$ при всех n, начиная с некоторого N_ε. Таким образом,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon : \quad \forall\, n \geq N_\varepsilon \quad |\mathbf{E}\, f(\xi_n) - \mathbf{E}\, f(\xi)| < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать. $\square$

Обратное утверждение неверно, так как слабая сходимость принципиально отличается от первых двух типов сходимости: в ней не важна взаимосвязь случайных величин (они могут быть даже независимыми), а важны лишь их распределения.

Пример 95. Пусть $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F}$ — борелевская σ-алгебра, $\mathbf{P}$ — мера Лебега. Рассмотрим такую последовательность случайных величин ξ_n: пусть $\xi_{2k}(\omega) = \omega$, $\xi_{2k-1}(\omega) = 1 - \omega$, $k = 1, 2, \ldots$ Тогда при $0 < x < 1$

$$F_{\xi_n}(x) = \mathbf{P}\{\xi_n < x\} = x,$$

то есть $F_{\xi_n}(x)$ — функция распределения $R[0,1]$. Значит, ξ_n слабо сходится к случайной величине $\xi(\omega) = \omega$. В то же время

$$\mathbf{P}\{|\xi_{2k-1} - \xi| > 1/2\} = \mathbf{P}\{|2\omega - 1| > 1/2\} = 1/2 \not\to 0.$$

Однако, есть один важный частный случай, когда сходимость по вероятности и сходимость по распределению эквивалентны.

Теорема 28. *Если последовательность случайных величин ξ_n слабо сходится к константе a, то сходится и по вероятности.*

Доказательство. Сходимость $F_{\xi_n}(x) \to F_a(x)$ при всех $x \neq a$ означает, что для любого $\varepsilon > 0$ при $n \to \infty$

$$F_{\xi_n}(a + \varepsilon) \to 1, \qquad F_{\xi_n}(a - \varepsilon) \to 0.$$

Тогда

$$\mathbf{P}\{|\xi_n - a| > \varepsilon\} = \mathbf{P}\{\xi_n > a + \varepsilon\} + \mathbf{P}\{\xi_n < a - \varepsilon\} \leq \\ \leq 1 - F_{\xi_n}(a + \varepsilon) + F_{\xi_n}(a - \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

что и требовалось доказать. $\square$

6.3 Закон больших чисел

Закон больших чисел известен давно. Смысл его в том, что если проводится много независимых испытаний, реализующих одинаковое распределение, то усредненное значение наблюдаемой величины мало отличается от математического ожидания. Например, если ведутся измерения со случайными погрешностями, но без систематической ошибки, то, усреднив результаты, можно повысить точность, как заметил еще Г. Галилей.

Данную схему можно обобщить. Пусть проводится большое число испытаний, причем в i-м опыте наблюдается случайная величина ξ_i, $i = 1, 2, \ldots$

Определение 31. Говорят, что для последовательности случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ с конечными математическими ожиданиями $\mathbf{E}\,\xi_1, \mathbf{E}\,\xi_2, \ldots$ выполняется **закон больших чисел**, если для любого $\varepsilon > 0$ выполнено

$$\mathbf{P}\left\{\left|\overline{\xi}_n - \mathbf{E}\,\overline{\xi}_n\right| > \varepsilon\right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \text{где} \quad \overline{\xi}_n = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}. \tag{43}$$

Для одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ с $\mathbf{E}\,\xi_1 = a$ утверждание закона больших чисел (43) принимает вид

$$\mathbf{P}\left\{\left|\overline{\xi}_n - a\right| > \varepsilon\right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Первое строгое доказательство закона больших чисел для частного случая (испытаний с одинаковой вероятностью успеха) дал Я. Бернулли в начале XVIII в. Общее утверждение доказал П.Л. Чебышёв при помощи неравенства (41).

Теорема 29. (*Закон больших чисел*). *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые случайные величины с $\mathbf{E}\,\xi_i = a_i$ и равномерно ограниченными дисперсиями $\mathbf{D}\,\xi_i = \sigma_i^2 \le C$. Тогда для последовательности выполнен закон больших чисел* (43).

Доказательство. Применим свойства математических ожиданий и дисперсий (теоремы 2 и 3).

$$\mathbf{E}\,\overline{\xi}_n = \overline{a}_n = \frac{\mathbf{E}\,\xi_1 + \ldots + \mathbf{E}\,\xi_n}{n} = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n},$$

$$\mathbf{D}\,\overline{\xi}_n = \frac{\mathbf{D}\,\xi_1 + \ldots + \mathbf{D}\,\xi_n}{n^2} \le \frac{nC}{n^2} = \frac{C}{n}.$$

По неравенству Чебышёва получаем

$$\mathbf{P}\{|\overline{\xi}_n - \overline{a}_n| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\overline{\xi}_n}{\varepsilon^2} \leq \frac{C}{n\varepsilon^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

что и требовалось доказать. □

Пример 96. Предположим, что число зерен в колосе имеет среднеквадратичное отклонение 10. В скольких колосьях надо сосчитать зерна, чтобы с вероятностью 90% получить среднее число зерен с погрешностью менее 2?

Имеем $\mathbf{D}\,\xi_i = 100$. Чтобы получить $\mathbf{P}\{|\overline{\xi}_n - a| \geq 2\} \leq 0{,}1$ по неравенству Чебышёва, нужно, чтобы $\mathbf{D}\,\overline{\xi}_n = 0{,}1 \cdot 2^2$. Поскольку $\mathbf{D}\,\overline{\xi}_n = 100/n$, получаем $n = 100/0{,}4 = 250$.

В случае одинаково распределенных случайных величин закон больших чисел выполняется даже без требования существования дисперсии:

Теорема 30. (*Хинчин*). *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с конечным математическим ожиданием a. Тогда*

$$\mathbf{P}\left\{\left|\overline{\xi}_n - a\right| > \varepsilon\right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Доказательство. Пусть $\varphi_{\xi_1}(t) = \mathbf{E}\,e^{it\xi_1}$. Так как у случайной величины ξ_1 существует конечное математическое ожидание a, то $\varphi_{\xi_1}(t) = 1 + iat + o(t)$ при $t \to 0$. Тогда

$$\varphi_{\overline{\xi}_n}(t) = \left(\varphi_{\xi_1}(t/n)\right)^n = \left(1 + ia\frac{t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\varphi_{\overline{\xi}_n}(t) \to e^{ita}.$$

Значит, закон распределения $\overline{\xi}_n$ сходится к закону распределения константы, равной a (см. теорему 26). Согласно теореме 28, $\overline{\xi}_n$ сходится по вероятности к a. □

Теорема 31. (*Усиленный закон больших чисел*). *В условиях теоремы* 30

$$\mathbf{P}\left\{\overline{\xi}_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a\right\} = 1.$$

6.4 Центральная предельная теорема Ляпунова

Рассмотренный в предыдущем параграфе закон больших чисел говорит о близости среднего арифметического случайных величин к среднему арифметическому их математических ожиданий, если последнее конечно. Однако часто бывает необходимо оценить степень этой близости или вероятность попадания в некоторое заданное множество, и оценить более точно, чем по неравенству Чебышёва. В данном параграфе рассмотрим вопрос: когда закон распределения суммы случайных величин может быть аппроксимирован нормальным законом? Мы ограничимся только случаем независимых случайных величин.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — случайные величины, заданные на одном и том же вероятностном пространстве; введем обозначение

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i.$$

Определение 32. Говорят, что для последовательности случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ выполнена **центральная предельная теорема**, если закон распределения случайной величины

$$S_n^* = \frac{S_n - \mathbf{E}\, S_n}{\sqrt{\mathbf{D}\, S_n}}$$

сходится при $n \to \infty$ к стандартному нормальному закону, т.е. для любого $x \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}\left\{\frac{S_n - \mathbf{E}\, S_n}{\sqrt{\mathbf{D}\, S_n}} < x\right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(x).$$

Исторически первой была доказана центральная предельная теорема для числа успехов в схеме испытаний Бернулли А. Муавром для $p = 1/2$ и затем П.С. Лапласом для произвольного p. Их доказательство использовало формулу Стирлинга.

Теорема 32. (*Муавр — Лаплас*). *Пусть μ_n — число успехов в n испытаниях Бернулли с постоянной вероятностью успеха $p \in (0,1)$. Тогда для любых $a, b \in \mathbb{R}$*

$$\mathbf{P}\left\{a < \frac{\mu_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < b\right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(b) - \Phi(a) \tag{44}$$

равномерно по a и b.

Эта теорема является частным случаем более общего утверждения.

Теорема 33. (*Леви*). *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — *независимые одинаково распределенные случайные величины с* $\mathbf{E}\,\xi_i = a$, $\mathbf{D}\,\xi_i = \sigma^2$. *Тогда для любого* $x \in \mathbb{R}$ *равномерно по* x

$$\mathbf{P}\Big\{\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\Big\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(x). \tag{45}$$

Доказательство. Применим метод характеристических функций. Пусть

$$S_n^* = \frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - a). \tag{46}$$

Обозначим через $\varphi(t) = \mathbf{E}\,e^{it(\xi_1 - a)}$ характеристическую функцию одного слагаемого, стоящего в правой части (46); так как все слагаемые одинаково распределены, то достаточно записать характеристическую функцию для первого из них. При $t \to 0$ имеем

$$\varphi(t) = 1 + it\mathbf{E}\,(\xi_1 - a) - \frac{t^2}{2}\mathbf{E}\,(\xi_1 - a)^2 + o(t^2) = 1 - \frac{t^2\sigma^2}{2} + o(t^2).$$

Из свойств 6 и 7 характеристических функций (см. параграф 4.6) следует, что

$$\varphi_{S_n^*}(t) = \Big(\varphi\Big(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\Big)\Big)^n = \Big(1 - \frac{t^2}{2n} + o\Big(\frac{t^2}{n}\Big)\Big)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-t^2/2}.$$

Так как $e^{-t^2/2}$ — это характеристическая функция $\mathcal{N}(0,1)$, то по теореме 26 закон распределения S_n^* сходится к $\mathcal{N}(0,1)$. □

Точность приближенного равенства (45) можно оценить через третий абсолютный центральный момент $\mu = \mathbf{E}\,|\xi_i - a|^3$. А именно:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\Big|\mathbf{P}\Big\{\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\Big\} - \Phi(x)\Big| < \frac{0{,}77\,\mu}{\sigma^3\sqrt{n}}. \tag{47}$$

Дробь в правой части (47) (дробь Колмогорова) убывает лишь пропорционально $n^{-1/2}$. Отсюда видно, что не сто́ит безоглядно полагаться на центральную предельную теорему.

Пример 97. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_{16}$ независимы, $\mathbf{P}\{\xi_i = 0\} = \mathbf{P}\{\xi_i = 1\} = 1/2$. Имеем $a = 1/2$, $\sigma = 1/2$, $\mu = 1/8$. Рассмотрим $S_{16} = \xi_1 + \ldots + \xi_{16}$; центрируем и нормируем:

$$S_n^* = \frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{S_{16} - 8}{2}.$$

По формуле (47) получаем оценку

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathbf{P}\{S_n^* < x\} - \Phi(x)\right| < \frac{0{,}77/8}{\sqrt{16}/8} \approx 0{,}19.$$

Реальное значение этого супремума 0,1 (см. графики на рис. 61).

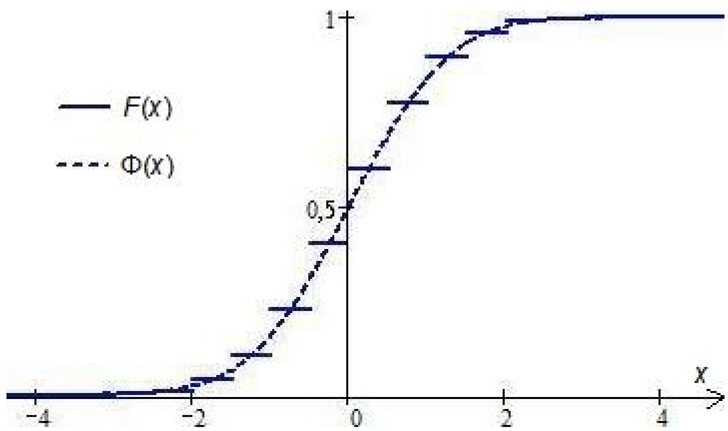

Рис. 61

Однако, если распределение ξ_i непрерывно, оценка (47) оказывается излишне грубой.

Пример 98. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_8 \sim R[0,1]$ независимы. Для этих величин $a = 1/2$, $\sigma = 1/\sqrt{12}$;

$$\mu = \int\limits_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right|^3 dx = 2\int\limits_0^{1/2} y^3 dy = \frac{1}{32}.$$

Пусть $S_8 = \xi_1 + \ldots + \xi_8$; центрируем и нормируем:

$$S_n^* = \frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{S_8 - 4}{\sqrt{2/3}}.$$

По формуле (47) получаем оценку

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathbf{P}\{S_n^* < x\} - \Phi(x)\right| < \frac{0{,}77/32}{\sqrt{8}/12\sqrt{12}} \approx 0{,}35.$$

Найдем плотность f_8 распределения S_8, применив формулу свертки к плотности равномерного распределения $f_1 = \mathbf{1}_{[0,1]}$ три раза: $f_2 = f_1 * f_1$, $f_4 = f_2 * f_2$, $f_8 = f_4 * f_4$. Графики этих плотностей покажем на рис. 62.

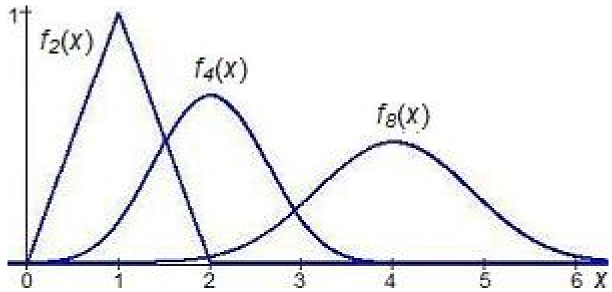

Рис. 62

Далее находим функцию распределения

$$F(x) = F_{S_n^*}(x) = F_{S_8}\bigl(x\sqrt{2/3}+4\bigr) = \int\limits_0^{x\sqrt{2/3}+4} f_8(u)\,du,$$

тогда получим $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|F_Z(x) - \Phi(x)| \approx 0{,}0035$. Графики $F(x)$ и $\Phi(x)$ не будем рисовать, так как они слишком близки.

Для независимых неодинаково распределенных случайных величин имеет место следующая теорема.

Теорема 34. (*Ляпунов*). *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые случайные величины. Пусть абсолютные центральные моменты $\mu_i = \mathbf{E}\,|\xi_i - \mathbf{E}\,\xi_i|^3$ конечны при всех i; обозначим*

$$a_i = \mathbf{E}\,\xi_i, \quad \sigma_i^2 = \mathbf{D}\,\xi_i, \quad B_n^2 = \mathbf{D}\,S_n = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2, \quad R_n^3 = \sum_{i=1}^n \mu_i.$$

Тогда, если выполнено условие Ляпунова

$$\frac{R_n}{B_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{48}$$

то для последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ выполнена центральная предельная теорема.

Условие Ляпунова (48) означает следующее. Введем случайные события

$$U_k = \{|\xi_k - a_k| \geq \varepsilon B_n\}.$$

Тогда по неравенству Маркова

$$\mathbf{P}\{U_k\} = \mathbf{P}\{|\xi_k - a_k|^3 \geq (\varepsilon B_n)^3\} \leq \frac{\mathbf{E}\,|\xi_k - a_k|^3}{(\varepsilon B_n)^3}.$$

Значит,

$$\mathbf{P}\left\{\max_{1\le k\le n}\frac{|\xi_k-a_k|}{B_n}\ge\varepsilon\right\}=\mathbf{P}\left\{\bigvee_{k=1}^{n}U_k\right\}\le\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}\{U_k\}\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathbf{E}\,|\xi_k-a_k|^3}{(\varepsilon B_n)^3}=\frac{1}{\varepsilon^3}\left(\frac{R_n}{B_n}\right)^3\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Последнее условие означает, что в нормированной сумме

$$S_n^*=\frac{S_n-\mathbf{E}\,S_n}{B_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\xi_k-a_k}{B_n}$$

все слагаемые „равномерно малы": вероятность того, что хотя бы одно из них превзойдет заданный ε, стремится к нулю с ростом числа слагаемых n.

Пример 99. Пусть $\xi_1,\xi_2,\ldots$ — последовательность независимых случайных величин, $\xi_k\sim R[-k,k]$. Применима ли к ним центральная предельная теорема?

Проверим выполнение условий теоремы Ляпунова. Для равномерного распределения

$$\mathbf{E}\,\xi_k=0,\qquad \sigma_k^2=D\xi_k=\frac{(2k)^2}{12}=\frac{k^2}{3},$$

$$\mu_k=\mathbf{E}\,|\xi_k|^3=\int\limits_{-k}^{k}\frac{|x|^3}{2k}dx=2\int\limits_{0}^{k}\frac{x^3}{2k}dx=\frac{k^3}{4}.$$

Тогда при $n\to\infty$

$$B_n^2=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{18}n(n+1)(2n+1)\sim\frac{n^3}{9},$$

$$R_n^3=\sum_{k=1}^{n}\mu_k=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{1}{16}n^2(n+1)^2\sim\frac{n^4}{16}.$$

Значит,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R_n}{B_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{4/3}/2\sqrt[3]{2}}{n^{3/2}/3}=0.$$

Условия теоремы Ляпунова выполнены. Следовательно, даже для такой последовательности выполнена центральная предельная теорема.

6.5 Вычисление вероятностей по центральной предельной теореме

Сначала рассмотрим схему Бернулли и разберем по одному примеру на три типа задач:

1) оценка вероятности отклонения,
2) нахождение доверительного интервала,
3) определение нужного объема выборки.

Пример 100. В сети 3600 ламп. Вероятность для каждой лампы быть включенной равна 0,9 независимо от остальных ламп. Найти вероятность того, что число включенных ламп отличается от своего среднего не более, чем на $m = 30$ штук.

Число включенных ламп ξ представляет случайную величину, равную числу успехов в $n = 3600$ испытаниях Бернулли с вероятностью успеха $p = 0{,}9$ и неудачи $q = 0{,}1$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{|\xi - \mathbf{E}\,\xi| \le m\} = \mathbf{P}\{|\xi - np| \le m\} = \\
&\qquad = \mathbf{P}\left\{\frac{|\xi - np|}{\sqrt{npq}} \le \frac{m}{\sqrt{npq}}\right\} \approx \Phi\Big(\frac{m}{\sqrt{npq}}\Big) - \Phi\Big(\frac{-m}{\sqrt{npq}}\Big) = \\
&\qquad = 2\Phi\Big(\frac{m}{\sqrt{npq}}\Big) - 1 = 2\Phi\Big(\frac{30}{\sqrt{3600 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}}\Big) - 1 = \\
&\qquad\qquad = 2\Phi(1{,}67) - 1 = 2 \cdot 0{,}9525 - 1 = 0{,}905.
\end{aligned}$$

Пример 101. Торговая фирма имеет 1000 изделий, прибыль от продажи каждого 50 рублей. Гарантийный ремонт одного изделия обходится фирме в 200 рублей. Найти интервал, в котором с вероятностью 95% будет заключен доход фирмы, если в среднем гарантийный ремонт требуется в каждом 20-м случае.

Пусть ξ — число проданных изделий, которым потребуется гарантийный ремонт. Случайная величина ξ имеет биномиальный закон распределения с параметрами $n = 1000$ и $p = 0{,}05$. Нужно найти такие целые числа a и b, что

$$\mathbf{P}\{a \le \xi \le b\} \approx 0{,}95.$$

Можно применить теорема Муавра-Лапласа, и мы получим

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{a \le \xi \le b\} = \\
&\qquad = \mathbf{P}\left\{\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{\xi-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right\} \approx \\
&\qquad\qquad \approx \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).
\end{aligned}$$

Отрезок $[a, b]$ будет кратчайшим, если

$$\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{np-a}{\sqrt{np(1-p)}} = r.$$

Тогда

$$\mathbf{P}\{a \le \xi \le b\} \approx \Phi(r) - \Phi(-r) = 2\Phi(r) - 1 = 0{,}95.$$

По таблицам нормального распределения находим, что r немного меньше 2, то есть можно взять

$$\begin{aligned}
b = np + 2\sqrt{np(1-p)} = 50 + 13{,}78 = 63{,}78,\\
a = np - 2\sqrt{np(1-p)} = 50 - 13{,}78 = 36{,}22.
\end{aligned}$$

Случайная величина ξ принимает только целые значения, так что $\mathbf{P}\{36{,}22 \le \xi \le 63{,}78\} = \mathbf{P}\{37 \le \xi \le 63\}$. Доход фирмы, который равен $1000 \cdot 50 - 200\,\xi$, будет заключен в интервале $[37400, 42600]$ с вероятностью около 95%.

Пример 102. На конвейере в среднем 85% изделий получаются первого сорта. Сколько изделий необходимо взять, чтобы с вероятностью 0,997 отклонение частоты появления изделия первого сорта от своей вероятности не превосходило $\varepsilon = 0{,}01$?

Будем считать, что брак в каждом изделии появляется независимо от остальных. Тогда данная схема соответствует схеме испытаний Бернулли, число которых n неизвестно, вероятность успеха $p = 0{,}85$, вероятность неудачи $q = 0{,}15$.

Обозначим через ξ случайную величину, равную числу изделий первого сорта среди n отобранных. Частота появления изделия первого сорта равна ξ/n. Поэтому, согласно условию, требуется выбрать n так, чтобы

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{\xi}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \ge 0{,}997.$$

Преобразуем вероятность, стоящую в правой части последнего неравенства:

$$\mathbf{P}\Big\{\Big|\frac{\xi}{n}-p\Big|<\varepsilon\Big\}=\mathbf{P}\big\{-n\varepsilon<\xi-np<n\varepsilon\big\}=$$
$$=\mathbf{P}\Big\{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}<\frac{\xi-np}{\sqrt{npq}}<\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\Big\}.$$

Тогда согласно теореме Муавра — Лапласа

$$\mathbf{P}\Big\{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}<\frac{\xi-np}{\sqrt{npq}}<\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\Big\}\approx$$
$$\approx\Phi\Big(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\Big)-\Phi\Big(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\Big)=2\Phi\Big(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\Big)-1.$$

Нам нужно, чтобы эта вероятность была не меньше 0,997. Значит,

$$\Phi\Big(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\Big)\geq 0{,}9985,\quad \text{отсюда}\ \ \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\geq 3,\quad \text{т. е.}\ \ n\geq 11475.$$

Таким образом, надо взять 11,5 тысяч деталей.

Теперь рассмотрим примеры с усреднением случайных величин, принимающих более двух значений.

Пример 103. На пост губернатора претендуют два кандидата. Пусть 45% избирателей намерены проголосовать за Белова, 40% за Краснова, 15% против всех. Перед выборами опросили 1600 чел. Найти вероятность того, что среди опрошенных будет больше сторонников Краснова, чем Белова.

Интересующее нас событие (ошибочный итог опроса) означает, что $S_n<0$, где $S_n=\xi_1+\ldots+\xi_n$, и случайные величины ξ_i устроены так:

$$\xi_i=\begin{cases}\ \ 1, & \text{если } i\text{-й опрошенный за Белова},\\ -1, & \text{если } i\text{-й за Краснова},\\ \ \ 0, & \text{если } i\text{-й против всех}.\end{cases}$$

Имеем $a=\mathbf{E}\,\xi_i=0{,}05$, $\mathbf{E}\,\xi_i^2=0{,}85$, $\sigma^2=\mathbf{D}\,\xi_i=0{,}8475$. Будем считать ξ_i независимыми. Тогда

$$\mathbf{E}\,S_n=na=80,\quad \mathbf{D}\,S_n=n\sigma^2=1356.$$

Вычислим по центральной предельной теореме:

$$\mathbf{P}\{S_n < 0\} = \mathbf{P}\Big\{\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} < -\frac{a\sqrt{n}}{\sigma}\Big\} =$$
$$= \mathbf{P}\Big\{\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} < -2{,}17\Big\} \approx \Phi(-2{,}17) = 0{,}015.$$

Вероятность ошибочного результата 1,5%.

Пример 104. Пусть h — рост случайно выбранного мужчины. Будем считать известным, что $\sigma = \sqrt{\mathbf{D}\,h} \le 10$ см. Скольким надо измерить рост, чтобы с вероятностью 98% найти средний рост $a = \mathbf{E}\,h$ с погрешностью менее 1 см?

Пусть $h_1, \dots, h_n$ независимы, $\overline{h}$ — их среднее. Имеем $\mathbf{E}\,\overline{h} = a$, $\mathbf{D}\,\overline{h} = \sigma^2/n$. При больших n можно считать, что распределение $\overline{h}$ нормальное, т. е.

$$\overline{h} \sim \mathcal{N}\Big(a, \frac{\sigma^2}{n}\Big), \quad \text{следовательно,} \quad \frac{(\overline{h} - a)\sqrt{n}}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Получаем

$$\mathbf{P}\{|\overline{h} - a| < 1\} = \mathbf{P}\Big\{\Big|\frac{(\overline{h} - a)\sqrt{n}}{\sigma}\Big| < \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\Big\} \approx$$
$$\approx \Phi\Big(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(-\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\Big) = 2\Phi\Big(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\Big) - 1 \ge 2\Phi\Big(\frac{\sqrt{n}}{10}\Big) - 1 = 0{,}98$$

при $\dfrac{\sqrt{n}}{10} = u_{0{,}99} \approx 2{,}33$. Получаем, что нужно измерить

$$n = (10 \cdot 2{,}33)^2 = 543 \text{ чел.}$$

Задачи по теме главы 6

6.1. Подбросили 12 игральных костей. Оценить снизу по неравенству Чебышёва вероятность того, что сумма выпавших цифр попадет в отрезок $[30, 54]$.

6.2. Пусть $\xi \sim \Pi(2)$. Вероятность события $\mathbf{P}\{\xi \ge 5\}$ оценить сверху по неравенству Маркова, затем вычислить точно.

6.3. В пруду 100 карасей, и каждый из них, независимо от других, попадет в сеть с вероятностью 4%. Нас интересует событие U — улов не менее 10 карасей.

а) Оценить вероятность U по неравенству Маркова.

б) Приближенно вычислить вероятность U, используя распределение Пуассона.

в) Вычислить вероятность U по формуле Бернулли.

6.4. Пусть случайная величина ξ_n имеет геометрическое распределение с параметром $p = \lambda/n$, где $n > \lambda > 0$. Доказать, что случайные величины ξ_n/n слабо сходятся при $n \to \infty$ к распределению $Exp(\lambda)$.

6.5. Пусть ξ_k — независимые случайные величины,

$$\mathbf{P}\{\xi_k = 0\} = \mathbf{P}\{\xi_k = 1\} = 1/2.$$

К какому распределению слабо сходятся величины

$$\zeta_n = 2^{-1}\xi_1 + 2^{-2}\xi_2 + \ldots + 2^{-n}\xi_n \quad ?$$

6.6. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{400}$ — независимые случайные величины с экспоненциальным распределением, $\mathbf{E}\,\xi_i = 0{,}1$. Пусть S — их сумма. Оценить $\mathbf{P}\{|S - 40| \geq 4\}$ по неравенству Чебышёва, затем приближенно вычислить по центральной предельной теореме.

6.7. Шахматист Крабов, играя белыми против Кальмарова, выигрывает и проигрывает с вероятностью по 10%. Если же белыми играет Кальмаров, то выигрывает с вероятностью 15%, а с вероятностью 5% выигрывает Крабов. Оценить вероятность победы Кальмарова в турнире из 100 партий.

6.8. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_{900}$ — независимые случайные величины с равномерным распределением на $[0;1]$. Пусть X — их сумма. Оценить $\mathbf{P}\{420 < X < 480\}$ по неравенству Чебышёва, затем приближенно вычислить по центральной предельной теореме.

6.9. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{25}$ — независимые случайные величины с экспоненциальным распределением, $\mathbf{E}\,\xi_i = 1$. Пусть S — их сумма. Вероятность события $A = \{15 < S < 35\}$

а) оценить снизу по неравенству Чебышёва,

б) вычислить по центральной предельной теореме,

в) вычислить точно, зная, что S имеет гамма-распределение (см. задачу 5.20).

6.10. Известно, что в продукции завода доля первосортных деталей составляет 80%. Сколько деталей нужно взять, чтобы с вероятностью 0,95 число первосортных деталей среди отобранных было не менее 2000?

6.11. Каждую минуту на телефонную станцию поступает в среднем 3 вызова. Считая, что число вызовов распределено по закону Пуассона, найти приближенно границы, в которых число вызовов за сутки будет заключено с вероятностью 0,9.

6.12. Известно, что из всех новорожденных 51,5% — мальчики. Найти вероятность того, что среди 900 детей, родившихся в этот день, большинство окажутся девочками.

6.13. При телефонном опросе $N = 1000$ человек $M = 800$ из них отказались отвечать. В каком интервале с вероятностью не менее 95% лежит доля p нелюбителей телефонных опросов? *Указание*: хотя p заранее неизвестна, при оценке дисперсии можно брать приближенное значение $\hat{p} = M/N$.

6.14. Лотерейный билет стоит 2 рубля и с вероятностью 1% дает выигрыш 100 рублей. Какова вероятность того, что человек, купивший 500 лотерейных билетов, останется с выигрышем?

6.15. При опросе $N = 1600$ человек $M = 400$ из них ответили, что считают „13" несчастливым числом. Какова вероятность того, что истинное значение доли тридекафобов отличается от вычисленного при опросе менее, чем на 2% ?

6.16. Каждый опыт может дать один из двух результатов „А" и „Б". Сколько опытов надо провести, чтобы с 99% уверенностью найти вероятность p результата „А" с погрешностью менее 1%? *Указание*: поскольку p заранее неизвестна, при оценке дисперсии будем пользоваться неравенством $p(1-p) \leq 1/4$.

6.17. Интервалы времени между последовательными сигналами, поступающими на пульт, имеют экспоненциальное распределение с математическим ожиданием 10 секунд и независимы. В каком интервале с вероятностью 90% будет лежать время T поступления 100-го сигнала?

6.18. При каких значениях $\alpha > 1/2$ к последовательности независимых случайных величин с плотностью распределения $f(x) = C(\alpha)/(1+x^2)^\alpha$ применимы

а) закон больших чисел,

б) центральная предельная теорема?

6.19. В урне 10 шаров, из них 4 красных. Повторяем большое число раз такой эксперимент: одновременно берем левой рукой 2 шара (среди них оказывается ξ_k красных), а правой 3 шара (среди них η_k красных). Доказать, что случайные векторы

$$Z_n = \Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - 0{,}8), \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(\eta_k - 1{,}2)\Big)$$

слабо сходятся к нормальному распределению с нулевым средним. Найти его матрицу ковариации. *Указание*: воспользоваться теоремой 17.

Список используемых обозначений

$\overline{A}$ — отрицание события („не A”)
AB, $A \wedge B$ — конъюнкция событий („A и B”)
$A \vee B$ — дизъюнкция событий („A или B”)
$B \Rightarrow A$ — событие B подчинено событию A („если B, то A”)
$Bi(m, p)$ — биномиальное распределение с параметрами m, p
$C[a, b]$ — пространство непрерывных функций на $[a, b]$
c_γ — квантиль уровня γ
$\mathrm{cov}(\xi, \eta)$ — ковариация случайных величин ξ и η
$\mathbf{D}\,\xi$ — дисперсия случайной величины ξ
$\xrightarrow{\mathbf{d}}$ — сходимость по распределению (слабая сходимость)
$\mathbf{E}\,\xi$ — математическое ожидание случайной величины ξ
$\mathbf{E}\,(\xi|C)$ — условное математическое ожидание случайной величины ξ при условии C
$\mathbf{E}\,(\xi|\eta)$ — условное математическое ожидание случайной величины ξ относительно η
$Exp(\lambda)$ — экспоненциальное распределение с параметром λ
$\eta(x)$ — функция Хевисайда
F_ξ — функция распределения случайной величины ξ
f_ξ — плотность распределения случайной величины ξ
$f_{\xi_1|\xi_2}(x, y)$ — условная плотность распределения ξ_1 при $\xi_2 = y$
$\mathcal{F}$ — σ-алгебра событий
$f * g$ — свертка функций
$\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера
I — единичная матрица
$\mathbf{1}_A$ — индикатор множества A
$\mathcal{L}(\xi)$ — закон распределения случайной еличины ξ

m_k — k-й начальный момент
μ_k — k-й центральный момент
$\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ — нормальное распределение с параметрами a, σ^2
$\mathcal{N}(\mathbf{m}, \Sigma)$ — двумерное нормальное распределение с параметрами $\mathbf{m}$, Σ
Ω — пространство элементарных событий
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство
$\mathbf{P}$ — вероятность
p_i — вероятность i-го значения дискретной случайной величины
p_{ij} — вероятность значения (x_i, y_j) случайного вектора
$\xrightarrow{\mathbf{P}}$ — сходимость по вероятности
$\mathbf{P}(A|C)$ — условная вероятность A при условии C
$\mathbf{P}(\cdot|\eta)$ — условная вероятность относительно η
п.н. — почти наверное (с вероятностью 1)
$\Pi(\lambda)$ — распределение Пуассона с параметром λ
$\Phi(x)$ — функция стандартого нормального распределения
$\varphi_\xi(t)$ — характеристическая функция случайной величины
$\varphi_\xi(s, t)$ — характеристическая функция случайного вектора
$R[a, b]$ — равномерное распределение на отрезке $[a, b]$
$\rho_{1,2}$ — коэффициент корреляции ξ_1 и ξ_2
S_n — сумма n случайных величин
S_n^* — центрированная нормированная сумма случайных величин
σ — среднеквадратичное отклонение
Σ_ξ — матрица ковариации случайного вектора ξ
A^T — транспонированная матрица A
u_γ — квантиль уровня γ распределения $\mathcal{N}(0, 1)$
$\overline{\xi}_n$ — среднее n случайных величин