ВВЕДЕНИЕ

В методических указаниях рассмотрены следующие темы:
мощность множеств,
метрические пространства и принцип сжимающих отображений,
компактность подмножества метрического пространства,
гильбертовы пространства и ортогональное проецирование векторов,
линейные ограниченные функционалы и операторы и их нормы,
нахождение обратного оператора,
спектр линейного оператора (классификация точек спектра, собственные векторы для собственных значений).

Каждой теме посвящена отдельная глава, начинающаяся с краткой теоретической части; затем разобраны разнообразные примеры с подробным описанием методов решения.

Данное методическое пособие будет полезно для студентов 2 курса и выше, изучающих функциональный анализ в техническом университете и ориентированных не на чисто теоретическую, а более на прикладную математику. Хотя в функциональном анализе задачи в основном нестандартные, рассмотренные нами приёмы решения применимы для достаточно широкого круга задач.

1 Бесконечные множества.

1.1 Сравнение мощностей

Пусть A и B — непустые множества.

Определение 1.1. Отображение $\varphi : A \longrightarrow B$ называется *биективным*, если для любых $a_1, a_2 \in A$ из $a_1 \neq a_2$ следует, что $\varphi(a_1) \neq \varphi(a_2)$ *(инъективность)*, а также для всякого $b \in B$ существует $a \in A$, такое, что $b = \varphi(a)$ *(сюръективность)*.

Определение 1.2. Говорят, что множества A и B *эквивалентны*, или что они имеют одинаковую *мощность*, и пишут $A \sim B$, если существует биективное отображение A на B.

Нетрудно видеть, что конечные множества эквивалентны тогда и только тогда, когда они содержат одинаковое количество элементов. Таким образом, понятие одинаковой мощности есть обобщение понятия одинаковой численности конечных множеств на бесконечные множества.

Предложение 1.1. *Пусть A, B и C — непустые множества. Тогда:*

$A \sim A$ *(рефлексивность),*
$A \sim B \Longrightarrow B \sim A$ *(симметричность),*
$A \sim B \wedge B \sim C \Longrightarrow A \sim C$ *(транзитивность).*

Класс эквивалентных множеству A множеств будем обозначать через $\overline{\overline{A}} = \alpha$ и называть *мощностью* множества A.

Определение 1.3. Пусть $\overline{\overline{A}} = \alpha$ и $\overline{\overline{B}} = \beta$. Если $A \not\sim B$ и $A \sim B_1 \subset B$, то говорят, что множество B имеет *бо́льшую*, а множество A — *меньшую* мощность и пишут $\alpha < \beta$, $\beta > \alpha$.

Теорема 1.1. *Пусть $A \supset A_1 \supset A_2$. Если $A_2 \sim A$, то $A_1 \sim A$.*

Следствие 1.1 (теорема Кантора–Бернштейна). *Пусть A и B — множества. Если каждое из них эквивалентно некоторому подмножеству другого, то $A \sim B$.*

Следствие 1.2. *Если α и β — мощности и $\alpha \leq \beta$, $\alpha \geq \beta$, то $\alpha = \beta$.*

Следствие 1.3. *Если α, β, γ — мощности и $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$, то $\alpha < \gamma$.*

1.2 Счётные множества

Определение 1.4. Говорят, что множество A *счётно* (имеет *мощность* a), если $A \sim \mathbb{N}$.

Определение 1.5. Множество называется *не более чем счётным*, если оно конечно или счётно.

Предложение 1.2. *Всякое бесконечное подмножество счётного множества счётно.*

Теорема 1.2. *Объединение не более чем счётного множества не более чем счётных множеств не более чем счётно.*

Теорема 1.3. *Пусть M и A — соответственно бесконечное и не более чем счётное множества. Тогда $M \cup A \sim M$ и $M \setminus A \sim M$.*

Теорема 1.4. *Пусть $A_1, \dots, A_n$ — счётные множества. Тогда декартово произведение $A_1 \times \dots \times A_n$ счётно.*

Доказательство. Проведём для произведения двух множеств. Пусть $A = \{a_1, \dots, a_n, \dots\}$ и $B = \{b_1, \dots, b_n, \dots\}$ — счётные множества. Докажем, что декартово произведение $A \times B$ также является счётным. Имеем

$$\begin{array}{ccccccc}
B \diagdown A & a_1 & & a_2 & & a_3 & \dots \\
b_1 & (a_1, b_1) & & (a_2, b_1) & & (a_3, b_1) & \dots \\
 & \downarrow & \nearrow & & \nearrow & & \\
b_2 & (a_1, b_2) & & (a_2, b_2) & & (a_3, b_2) & \dots \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & \\
b_3 & (a_1, b_3) & & (a_2, b_3) & & (a_3, b_3) & \dots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Таким образом, пары (a_i, b_j) можно расположить в последовательность по возрастанию величины $i + j$, а при одинаковых значениях этой суммы по возрастанию индекса i.

Далее доказательство проводится с помощью метода математической индукции. □

1.3 Мощность континуума

Теорема 1.5. *Отрезок* $[0, 1]$ *несчётен.*

Доказательство. Предположим противное, то есть что все точки отрезка $[0, 1]$ можно расположить в виде последовательности

$$x_1, x_2, x_3, \ldots .$$

Разделим отрезок $[0, 1] = I_0$ на три равные части точками $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$. Ясно, что точка x_1 не может принадлежать всем трем отрезкам

$$\left[0, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \left[\frac{2}{3}, 1\right],$$

и хотя бы один из них не содержит ее. Обозначим его через I_1 (в том случае, когда точка x_1 не принадлежит двум отрезкам одновременно, через I_1 мы обозначим тот из них, который лежит левее другого).

Теперь разделим на три равные части отрезок I_1 и обозначим через I_2 тот из новых отрезков, который не содержит точку x_2 (а если таких отрезков два, то один из них). Затем продолжаем процесс с отрезком I_2 и точкой x_3 и т. д.

В результате мы получим бесконечную последовательность вложенных отрезков

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots,$$

которые обладают тем свойством, что $x_n \notin I_n$. По принципу Коши–Кантора о вложенных отрезках существует точка

$$\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \subset [0, 1].$$

Понятно также, что при всех натуральных n будет $\xi \neq x_n$. Полученное противоречие и доказывает теорему. $\square$

Определение 1.6. Говорят, что множество A имеет *мощность континуума (мощность c)*, если $A \sim [0, 1]$.

Предложение 1.3. *Всякий отрезок $[a, b]$, всякий интервал (a, b) и всякий полуинтервал $(a, b]$ или $[a, b)$ имеет мощность c. Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ имеет мощность c.*

Теорема 1.6. *Объединение не более чем счётного множества множеств мощности c имеет мощность c.*

Доказательство. Рассмотрим, например, случай счётного объединения множеств мощности c. Пусть

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

где A_n — множества мощности c.

Возьмём последовательность $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, $c_n = 1 - \frac{1}{n}$. Пусть $\varphi_n : A_n \longrightarrow [c_n, c_{n+1})$ — биекция, и $m : A \longrightarrow \mathbb{N}$ — отображение такое, что $m(a) = \min\{n : a \in A_n\}$. Определим отображение $\varphi : A \longrightarrow [0, 1)$ следующим образом:

$$\varphi(a) = \varphi_{m(a)}(a).$$

Отображение φ является *инъективным.* Следовательно,

$$A \sim N \subset [0, 1).$$

Таким образом, $\overline{\overline{A}} \leq c$. С другой стороны, неравенство $\overline{\overline{A}} \geq c$ очевидно.

Случай конечного объединения множеств мощности c рассматривается аналогично. $\square$

Для произвольных непустых множеств A и B обозначим через B^A множество функций $\varphi : A \longrightarrow B$.

Теорема 1.7. *Множество* $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$*, то есть множество функций, определённых на* $\mathbb{N}$ *и принимающих значения* 0 *или* 1*, имеет мощность* c*.*

Доказательство. Множество $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ эквивалентно множеству всех последовательностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in \{0,1\}$. Пусть S — множество последовательностей из $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, стабилизирующихся на 1. Всякой последовательности $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ из множества S поставим в соответствие число с двоичным разложением $0,\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\ldots$; это будет 1 или $\frac{m}{2^n}$ $(m = 1, 3, \ldots, 2^n - 1)$. Будучи подмножеством множества рациональных чисел, множество полученных чисел является счётным. Построенное соответствие инъективно и, следовательно, S есть множество счётное.

С другой стороны, указанное соответствие является биекцией между множеством $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus S$ и полуинтервалом $[0,1)$. Отсюда, применяя теорему 1.3, мы получим утверждение доказываемой теоремы. □

Теорема 1.8. *Множество* $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$*, то есть множество функций, определённых на* $\mathbb{N}$ *и принимающих значения в* $\mathbb{N}$*, имеет мощность* c*.*

Доказательство. Поскольку $\{1,2\}^{\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, мы имеем по теореме 1.7 неравенство $\overline{\overline{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}} \geq c$. С другой стороны, соответствие $\varphi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \longrightarrow [0,1)$, определяемое по правилу

$$\varphi\left(\{k_1, k_2, k_3, \ldots\}\right) = 0,\underbrace{11\ldots1}_{k_1}0\underbrace{11\ldots1}_{k_2}011\ldots,$$

является *инъекцией.* Таким образом, $\overline{\overline{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}} \leq c$. Теорема доказана. □

Теорема 1.9. *Пусть* $A_1, \ldots, A_n$ *— множества мощности* c*. Тогда декартово произведение* $A_1 \times \cdots \times A_n$ *имеет мощность* c*.*

Доказательство. Проведём для произведения двух множеств. Пусть A и B — множества мощности c. Докажем, что декартово произведение $A \times B$ также имеет мощность c. Поскольку $A \sim [0,1)$ и $B \sim [0,1)$, то достаточно доказать, что множество $Q = [0,1) \times [0,1)$ имеет мощность c.

Пусть $(x, y) \in Q$. Представим действительные числа x и y в виде двоичной дроби, не содержащей 1 в периоде:

$$x = 0, x_1 x_2 x_3 \ldots,$$
$$y = 0, y_1 y_2 y_3 \ldots.$$

Поставим в соответствие паре (x, y) число с двоичным разложением

$$0, x_1 y_1 x_2 y_2 \ldots x_n y_n \cdots \in [0,1).$$

Понятно, что построенное соответствие *инъективно*. Таким образом,

$$Q \sim N \subset [0,1)$$

и, следовательно, $\overline{\overline{Q}} \leq c$. С другой стороны,

$$[0,1) \sim [0,1) \times \{0\} \subset Q$$

и, следовательно, $\overline{\overline{Q}} \geq c$.

Далее доказательство проводится с помощью метода математической индукции. □

Теорема 1.10. *Объединение множества мощности c множеств мощности c имеет мощность c.*

Теорема 1.11. *Пусть $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ — счётная последовательность множеств мощности c. Тогда декартово произведение $A_1 \times \cdots \times A_n \times \ldots$ имеет мощность c.*

1.4 Примеры

Пример 1.1. Докажем, что множество A всех *конечных* подмножеств множества $\mathbb{N}$ счётно.

Решение. Имеем

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

где A_n — множество всех непустых подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. A_n — конечное множество, его мощность равна

$$C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = (1+1)^n - 1 = 2^n - 1.$$

Счётное объединение конечных множеств является счётным (теорема 1.2) и, следовательно, $\overline{\overline{A}} = a$.

Пример 1.2. Докажем эквивалентность квадрата K с внутренней областью и открытого шара B.

Решение. Неравенства $\overline{\overline{K}} \geq c$ и $\overline{\overline{B}} \geq c$ очевидны, так как и квадрат K, и шар B содержат в себе некоторые отрезки действительной прямой.

С другой стороны, квадрат K является подмножеством плоскости $\mathbb{R}^2$, а шар B является подмножеством пространства $\mathbb{R}^3$. По теореме 1.9 и плоскость, и пространство имеют мощность c. Отсюда следуют обратные неравенства $\overline{\overline{K}} \leq c$ и $\overline{\overline{B}} \leq c$.

Таким образом, $\overline{\overline{K}} = c$ и $\overline{\overline{B}} = c$. Следовательно, $K \sim B$.

Пример 1.3. Докажем, что множество L_N всех прямых в пространстве $\mathbb{R}^N$ имеет мощность c.

Решение. Хорошо известно, что *прямой* в $\mathbb{R}^N$, проходящей через точку $a \in \mathbb{R}^N$ и параллельной ненулевому вектору $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^N$, называется множество вида

$$\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_k = a_k + b_k t,\ k = 1, 2, \ldots, N,\ t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Таким образом, мы рассматриваем множество L_N, элементами которого являются прямые в $\mathbb{R}^N$.

Пусть $l \in L_N$, $P(l) \in l$ — ортогональная проекция начала координат на прямую l и $\overrightarrow{e}(l)$ — единичный вектор, параллельный прямой l, у которого первая ненулевая компонента положительна. Поставим в соответствие прямой l пару $\left(P(l), \overrightarrow{e}(l)\right) \in \mathbb{R}^N \times S^{N-1}$, где

$$S^{N-1} = \left\{\overrightarrow{e} \in \mathbb{R}^N : e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_N^2 = 1\right\}.$$

Очевидно, что построенное соответствие *инъективно*. Таким образом, $\overline{\overline{L_N}} \leq c$, поскольку множества $\mathbb{R}^N$ и S^{N-1} имеют мощность c.

Множество всех прямых, лежащих в некоторой плоскости и параллельных данной прямой, имеет мощность c. Следовательно, $\overline{\overline{L_N}} \geq c$.

Пример 1.4. Докажем, что множество $\mathfrak{T}$ всех *открытых* подмножеств множества $\mathbb{R}^N$ имеет мощность c.

Решение. Обозначим через $\mathfrak{B}$ множество открытых шаров из $\mathbb{R}^N$, у которых все координаты центра и радиус рациональны. Множество $\mathfrak{B}$ счётно и, следовательно, $\mathfrak{B} = \{B_1, B_2, B_3, \dots\}$. Рассмотрим множество $G \in \mathfrak{T}$. Поставим в соответствие множеству G последовательность $\{\varepsilon_m(G)\}_{m=1}^{\infty}$, где

$$\varepsilon_m(G) = \begin{cases} 1, & \text{если } B_m \subset G, \\ 0, & \text{если } B_m \not\subset G. \end{cases}$$

Отметим, что последовательность $\{\varepsilon_m(G)\}_{m=1}^{\infty}$ можно считать элементом множества $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Для произвольной точки $x \in G$ существует открытый шар $U_x \in \mathfrak{B}$, такой, что $x \in U_x \subset G$ (множество $\mathbb{Q}^N$ всюду плотно в $\mathbb{R}^N$ для любого $N \in \mathbb{N}$). Таким образом,

$$G = \bigcup_{x \in G} U_x = \bigcup_{B_m : B_m \subset G} B_m.$$

Это означает, что построенное отображение множества $\mathfrak{T}$ во множество $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ есть *инъекция.* В силу теоремы 1.7 множество $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ имеет мощность c. Таким образом, $\overline{\overline{\mathfrak{T}}} \leq c$. Поскольку $\overline{\overline{\mathfrak{T}}} \geq c$, множество $\mathfrak{T}$ также имеет мощность c.

2 Принцип сжимающих отображений

Пусть X – метрическое пространство с метрикой ρ. Отображение g: $X \mapsto X$ называют сжимающим, если существует число $\alpha \in (0;1)$, такое, что для любых x, $y \in X$ верно неравенство

$$\rho(g(x), g(y)) \leq \alpha \rho(x, y).$$

Теорема 2.1. *Всякое сжимающее отображение g полного метрического пространства (X, ρ) в себя имеет, притом только одну, неподвижную* *точку, т. е. существует единственная точка* $x_o \in X$, *такая, что* $g(x_o) = x_o$.

Напомним определения некоторых метрических пространств.
1. Пространство $C[a;b]$ непрерывных на отрезке $[a;b]$ действительных функций $f(t)$ с метрикой ρ, заданной для любых непрерывных функций f и g следующим образом:

$$\rho(f,g) = \max_{t\in[a;b]} |f(t) - g(t)|.$$

2. Метрическое пространство $\mathbf{m}$ ограниченных числовых последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ с метрикой ρ, заданной для любых ограниченных последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$\rho(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|.$$

3. Метрическое пространство ℓ_p числовых последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ для $p \geq 1$, с метрикой ρ, заданной для любых таких последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Все перечисленные метрические пространства $C[a;b]$, $\mathbf{m}$, ℓ_p $(p \geq 1)$ являются полными.

Пример 2.1. Докажем существование и единственность решения $x = \{x_n\} \in \mathbf{m}$ уравнения

$$x_n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\ln(\operatorname{arcctg} x_m + 1)}{m^5 + \sqrt[4]{n} + 10} = 1, \qquad n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Решение. Рассмотрим отображение g, ставящее в соответствие любому элементу $x = \{x_n\} \in \mathbf{m}$ числовую последовательность $y = \{y_n\}$ по следующему правилу:

$$y = g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad y_n = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\ln(\operatorname{arcctg} x_m + 1)}{m^5 + \sqrt[4]{n} + 10}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда уравнение (1) эквивалентно уравнению $x = g(x)$, для которого решения ищутся в метрическом пространстве $\mathbf{m}$. Для доказательства существования и единственности такого решения достаточно показать, что отображение $g\colon \mathbf{m} \mapsto \mathbf{m}$ является сжимающим.

Прежде всего покажем, что отображение g переводит $\mathbf{m}$ в $\mathbf{m}$, т. е. для любого $x \in \mathbf{m}$ его образ $g(x) = y \in \mathbf{m}$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем оценки:

$$|y_n| = \left| 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\ln(\operatorname{arcctg} x_m + 1)}{m^5 + \sqrt[4]{n} + 10} \right| \leq 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\ln(\operatorname{arcctg} x_m + 1)|}{m^5 + \sqrt[4]{n} + 10} <$$

$$< 1 + \ln(\pi + 1) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^5} = K < \infty.$$

Здесь использовались следующие неравенства, справедливые для любых $m,n \in \mathbb{N}$:

$$0 < \operatorname{arcctg} x_m < \pi \Longrightarrow 0 < \ln(\operatorname{arcctg} x_m + 1) < \ln(\pi + 1);$$

$$\frac{1}{m^5 + \sqrt[4]{n} + 10} < \frac{1}{m^5}.$$

Отметим, что полученная постоянная $K > 0$ (ряд Дирихле $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^5}$ сходится) не зависит от n, следовательно, $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |y_n| \leq K$, и $y \in \mathbf{m}$.

Теперь докажем, что отображение $g\colon \mathbf{m} \mapsto \mathbf{m}$ является сжимающим. Пусть $x = \{x_n\}$ и $z = \{z_n\}$ – две произвольные ограниченные последовательности. Тогда имеем $\rho(g(x), g(z)) =$

$$= \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\ln(\operatorname{arcctg} x_m + 1)}{m^5 + \sqrt[4]{n} + 10} - 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\ln(\operatorname{arcctg} z_m + 1)}{m^5 + \sqrt[4]{n} + 10} \right| \leq$$

$$\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\ln(\operatorname{arcctg} x_m + 1) - \ln(\operatorname{arcctg} z_m + 1)|}{m^5 + \sqrt[4]{n} + 10}.$$

Числовая функция $f(t) = \ln(\operatorname{arcctg} t + 1)$, дифференцируемая на $\mathbb{R}$, удовлетворяет всем условиям теоремы Лагранжа на отрезке $[x_m; z_m]$ (или $[z_m; x_m]$), если $x_m \neq z_m$. Следовательно, существует точка u_m, лежащая между x_m и z_m, для которой $f(x_m) - f(z_m) = f'(u_m)(x_m - z_m)$. Поскольку для любого числа $t \in \mathbb{R}$

$$|f'(t)| = \left| \frac{1}{\operatorname{arcctg} t + 1} \cdot \frac{-1}{1+t^2} \right| < 1,$$

верно равенство $|\ln(\operatorname{arcctg} x_m + 1) - \ln(\operatorname{arcctg} z_m + 1)| \le |x_m - z_m|$, $m \in \mathbb{N}$. Таким образом,

$$\rho(g(x), g(z)) \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|x_m - z_m|}{m^5 + \sqrt[4]{n} + 10} \le$$

$$\le \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_m - z_m|}{m^5 + \sqrt[4]{n} + 10} \le \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^5+11} \rho(x, z).$$

Покажем, что число $\alpha = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^5+11} < 1$:

$$\alpha = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^5+11} = \frac{1}{12} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^5+11} < \frac{1}{12} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{8m^2+8} <$$

$$< \frac{1}{12} + \int\limits_1^{+\infty} \frac{du}{8(u^2+1)} = \frac{1}{12} + \frac{1}{8} \operatorname{arctg} u \Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{12} + \frac{\pi}{32} < 1.$$

Итак, отображение $g\colon \mathbf{m} \mapsto \mathbf{m}$ является сжимающим, следовательно, уравнение $x = g(x)$ имеет решение $x \in \mathbf{m}$, и притом единственное.

Пример 2.2. Докажем существование и единственность решения $x = \{x_n\} \in \ell_1$ $\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\right)$ уравнения

$$2x_n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x_m}{m^2 + \sqrt{n^3} + 13} = \frac{1}{8n^2}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Решение. Рассмотрим отображение g, ставящее в соответствие любому элементу $x = \{x_n\} \in \ell_1$ числовую последовательность $y = \{y_n\}$ по следующему правилу:

$$y = g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad y_n = \frac{1}{16n^2} - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x_m}{m^2 + \sqrt{n^3} + 13}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда уравнение (2) эквивалентно уравнению $x = g(x)$, для которого решения ищутся в полном метрическом пространстве ℓ_1. Докажем, что для любого элемента $x \in \ell_1$ его образ $y = g(x) \in \ell_1$, т. е. g: $\ell_1 \mapsto \ell_1$. Для этого надо доказать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем:

$$|y_n| \le \frac{1}{16n^2} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|x_m|}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{16n^2} + \frac{1}{2}\left(\sum_{m=1}^{\infty} |x_m|\right)\frac{1}{\sqrt{n^3}}.$$

Так как $x \in \ell_1$, то $\sum\limits_{m=1}^{\infty} |x_m| = K < \infty$, и

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n| \le \frac{1}{16}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + \frac{K}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}} < \infty$$

(оба ряда в правой части сходятся, как ряды Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p >$ 1).

Теперь докажем, что отображение g: $\ell_1 \mapsto \ell_1$ является сжимающим. Пусть $x = \{x_n\}$ и $z = \{z_n\}$ – две произвольные последовательности из ℓ_1. Тогда $\rho(g(x), g(z)) =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{16n^2} - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x_m}{m^2+\sqrt{n^3}+13} - \frac{1}{16n^2} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z_m}{m^2+\sqrt{n^3}+13}\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|x_m - z_m|}{m^2+\sqrt{n^3}+13} \le \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|x_m - z_m|}{\sqrt{n^3}+14} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}+14}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}|x_m - z_m| = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}+14}\cdot\rho(x,z).$$

Покажем, что число $\alpha = \frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}+14} < 1$:

$$\alpha = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}+14} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{\sqrt{8}+14} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right) <$$

$$< \frac{1}{2}\left(\frac{2}{15} + \int\limits_{2}^{+\infty} \frac{du}{u^{3/2}}\right) = \frac{1}{15} - \frac{1}{\sqrt{u}}\bigg|_{2}^{+\infty} = \frac{1}{15} + \frac{1}{\sqrt{2}} < 1.$$

Следовательно, отображение $g\colon \ell_1 \mapsto \ell_1$ является сжимающим, и уравнение $x = g(x)$ имеет единственное решение в ℓ_1.

Пример 2.3. Докажем существование и единственность решения $x = \{x_n\} \in \ell_2$ $\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\right)$ уравнения

$$x_n - \frac{\operatorname{arctg}(10n+5)}{6n} x_{n+2} + \frac{\sin^2 n}{n^2+4} x_{n+3} = \frac{1}{\sqrt[7]{n^4}}, \qquad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Решение. Рассмотрим отображение g, ставящее в соответствие любому элементу $x = \{x_n\} \in \ell_2$ числовую последовательность $y = \{y_n\}$ по следующему правилу:

$$y = g(x) \iff y_n = \frac{1}{\sqrt[7]{n^4}} + \frac{\operatorname{arctg}(10n+5)}{6n} x_{n+2} - \frac{\sin^2 n}{n^2+4} x_{n+3}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда уравнение (3) эквивалентно уравнению $x = g(x)$, для которого решения ищутся в полном метрическом пространстве ℓ_2. Докажем, что для любого элемента $x \in \ell_2$ его образ $y = g(x) \in \ell_2$, т. е. $g\colon \ell_2 \mapsto \ell_2$. Для этого необходимо установить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n^2$. Отметим, что для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо числовое неравенство $(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^2 \le k(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2)$, это следует из соотношения $2ab \le a^2 + b^2$, a, $b \in \mathbb{R}$. Имеем оценки:

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[7]{n^4}} + \frac{\operatorname{arctg}(10n+5)}{6n} x_{n+2} - \frac{\sin^2 n}{n^2+4} x_{n+3}\right)^2 \le$$

$$\le 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[7]{n^8}} + \frac{(\pi/2)^2}{36} x_{n+2}^2 + \frac{1}{25} x_{n+3}^2\right) \le$$

$$\le 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{8/7}} + \sum_{m=3}^{\infty} x_m^2 + \sum_{m=4}^{\infty} x_m^2 \le 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{8/7}} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} x_m^2 < \infty$$

(ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{8/7}}$ сходится как ряд Дирихле с показателем, большим 1; ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} x_m^2$ сходится, так как $x \in \ell_2$).

Пусть $x = \{x_n\}$ и $z = \{z_n\}$ – две произвольные последовательности из ℓ_2. Тогда $\rho^2\left(g\left(x\right), g\left(z\right)\right) =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{arctg}\left(10n+5\right)}{6n} \left(x_{n+2} - z_{n+2}\right) - \frac{\sin^2 n}{n^2+4} \left(x_{n+3} - z_{n+3}\right) \right)^2 \leq$$

$$\leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi^2}{144 n^2} \left(x_{n+2} - z_{n+2}\right)^2 + \frac{1}{\left(n^2+4\right)^2} \left(x_{n+3} - z_{n+3}\right)^2 \right) \leq$$

$$\leq \frac{\pi^2}{72} \rho^2\left(x, z\right) + \frac{2}{25} \rho^2\left(x, z\right) = \left(\sqrt{\frac{\pi^2}{72} + \frac{2}{25}}\ \ \rho\left(x, z\right) \right)^2 .$$

Так как $\alpha = \sqrt{\frac{\pi^2}{72} + \frac{2}{25}} < \sqrt{\frac{1}{7} + \frac{2}{25}} < 1$, то отображение $g\colon \ell_2 \mapsto \ell_2$ является сжимающим, и уравнение $x = g\left(x\right)$ имеет единственное решение.

Пример 2.4. Докажем, что уравнение

$$f\left(x\right) + \int\limits_0^1 \frac{f\left(y\right) e^{x+y^3-2}}{x + \sqrt[3]{1+y^2}} dy = x^6, \qquad x \in [0;1] \tag{4}$$

имеет единственное решение в метрическом пространстве $C[0;1]$.

Решение. Рассмотрим отображение $g\colon C[0;1] \mapsto C[0;1]$, действующее по правилу

$$\varphi = g\left(f\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi\left(x\right) = x^6 - \int\limits_0^1 \frac{f\left(y\right) e^{x+y^3-2}}{x + \sqrt[3]{1+y^2}} dy, \quad x \in [0;1].$$

Это отображение действительно принимает значения в пространстве $C[0;1]$, поскольку для определённого интеграла с параметром x

$$I\left(x\right) = \int\limits_0^1 \frac{f\left(y\right) e^{x+y^3-2}}{x + \sqrt[3]{1+y^2}} dy = \int\limits_0^1 F\left(x, y\right)$$

подынтегральная функция $F(x, y)$ является непрерывной на квадрате $[0;1] \times [0;1]$, и, следовательно, интеграл $I(x)$, как функция от x, непрерывен на отрезке $[0;1]$ (см. [3]). Уравнение (4) эквивалентно уравнению $f = g(f)$, где решения ищутся в полном метрическом пространстве $C[0;1]$.

Докажем, что отображение g является сжимающим. Для любых функций f, $h \in C[0;1]$ имеем $\rho(g(f), g(h)) =$

$$= \max_{x\in[0;1]} \left| x^6 - \int\limits_0^1 \frac{f(y)\, e^{x+y^3-2}}{x+\sqrt[3]{1+y^2}} dy - x^6 + \int\limits_0^1 \frac{h(y)\, e^{x+y^3-2}}{x+\sqrt[3]{1+y^2}} dy \right| \leq$$

$$\leq \max_{x\in[0;1]} \int\limits_0^1 \frac{|f(y)-h(y)|e^{x+y^3-2}}{x+\sqrt[3]{1+y^2}} dy \leq \max_{x\in[0;1]} \int\limits_0^1 \frac{\max\limits_{y\in[0;1]} |f(y)-h(y)|}{x+\sqrt[3]{1+y^2}} dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{\rho(f,h)}{\sqrt[3]{1+y^2}} dy < \rho(f,h) \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{4}}} \right) = \rho(f,h) \frac{1+\sqrt[3]{\frac{4}{5}}}{2}.$$

Здесь мы оценили интеграл по отрезку $[0;1]$ через верхнюю сумму Дарбу по разбиению $\{0; \frac{1}{2}; 1\}$. Число $\alpha = \frac{1+\sqrt[3]{\frac{4}{5}}}{2} < 1$, таким образом, отображение g является сжимающим, и уравнение (4) имеет единственное решение.

Пример 2.5. Докажем, что уравнение

$$f(x) + \int\limits_0^1 \frac{f(y)\ dy}{f^2(y)+x^2+y^2+4} = 2, \qquad x \in [0;1] \tag{5}$$

имеет единственное решение в метрическом пространстве $C[0;1]$.

Решение. Рассмотрим отображение g: $C[0;1] \mapsto C[0;1]$, действующее по правилу

$$\varphi = g(f) \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(x) = 2 - \int\limits_0^1 \frac{f(y)\ dy}{f^2(y)+x^2+y^2+4}, \quad x \in [0;1].$$

Так как функция $F(x,y) = \frac{f(y)}{f^2(y)+x^2+y^2+4}$ является непрерывной на квадрате $[0;1]\times[0;1]$ для любой функции $f \in C[0;1]$, то φ – непрерывная на отрезке $[0;1]$ функция, согласно теореме о непрерывности определённого интеграла с параметром. Таким образом, действительно, для любой функции $f \in C[0;1]$ имеем $\varphi = g(f) \in C[0;1]$.

Докажем, что отображение g сжимающее. При любых фиксированных $x,\ y \in \mathbb{R}$ функция $\Phi(z) = \frac{z}{z^2+x^2+y^2+4}$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа на отрезке $[f(y);h(y)]$ (или $[h(y);f(y)]$), следовательно,

$$\left|\frac{f(y)}{f^2(y)+x^2+y^2+4} - \frac{h(y)}{h^2(y)+x^2+y^2+4}\right| =$$

$$= |\Phi'(u(y))| \cdot |f(y)-h(y)| \le \frac{1}{4}|f(y)-h(y)| \le \frac{1}{4}\rho(f,h),$$

так как

$$|\Phi'(z)| = \left|\frac{z^2+x^2+y^2+4-2z^2}{(z^2+x^2+y^2+4)^2}\right| \le \frac{1}{z^2+x^2+y^2+4} \le \frac{1}{4}$$

при любых значениях параметров x, y и переменного z. Для любых $f,\ h \in C[0;1]$ верны оценки:

$$\rho(g(f),g(h)) = \max_{x\in[0;1]}\left|\int_0^1 \frac{f(y)\ dy}{f^2(y)+x^2+y^2+4} - \int_0^1 \frac{h(y)\ dy}{h^2(y)+x^2+y^2+4}\right| \le$$

$$\le \max_{x\in[0;1]}\int_0^1 \left|\frac{f(y)}{f^2(y)+x^2+y^2+4} - \frac{h(y)}{h^2(y)+x^2+y^2+4}\right| dy \le$$

$$\le \max_{x\in[0;1]}\int_0^1 \frac{1}{4}\rho(f,h)\,dy = \frac{1}{4}\rho(f,h).$$

Таким образом, $\alpha = \frac{1}{4}$, и отображение g является сжимающим в $C[0;1]$. Следовательно, уравнение (5) имеет единственное решение.

3 Компактные множества в метрических пространствах

Множество $A \subset X$, где X – метрическое пространство, называют *компактным* в X, если из всякого бесконечного подмножества множества A можно выделить последовательность, сходящуюся к некоторому элементу из A. Множество $B \subset X$, где X – метрическое пространство, называют *относительно компактным* или *предкомпактным* в X, если его замыкание $\overline{B}$ компактно в X.

Приведём критерии относительной компактности множеств в метрических пространствах $C[a;b]$ и ℓ_p, $p \geq 1$ (определения см. главу 2).

Теорема 3.1 *(Арцела). Для того, чтобы множество $B \subset C[a;b]$ было относительно компактным, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие два условия:*
1) B – равномерно ограниченное *на $[a;b]$ множество функций, т. е.*

$$\exists M > 0 : \ \forall \varphi \in B \ \ \forall x \in [a;b] : \quad |\varphi(x)| \leq M;$$

2) B – равностепенно непрерывное *на $[a;b]$ множество функций, т. е.*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall \varphi \in B \ \forall x, y \in [a;b] : \ \ |x-y| < \delta \Longrightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon.$$

Теорема 3.2. *Для того, чтобы множество $B \subset \ell_p$, $p \geq 1$, было относительно компактным, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие два условия:*
1) B – ограниченное множество в ℓ_p, т. е.

$$\exists M > 0 : \ \forall x = \{x_n\} \in B : \quad \rho(0, x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} \leq M;$$

2) $R_k(x) = \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} |x_n|^p \underset{k \to \infty}{\overset{B}{\rightrightarrows}} 0$ (равномерная на множестве B сходимость числовой последовательности $\{R_k(x)\}$ к нулю), т.

е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N: \ \forall k > N \ \ \forall x \in B: \quad \sum_{n=k+1}^{\infty} |x_n|^p < \varepsilon.$$

Пример 3.1. Докажем относительную компактность в $C[0;1]$ множества B непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0;1]$ функций f, удовлетворяющих условиям:

(а) $\int\limits_0^1 |f'(t)|^3 dt \leq 8$;

(б) $f(t)$ принимает значение 1 хотя бы в одной точке отрезка $[0;1]$.

Решение. Воспользуемся критерием компактности в метрическом пространстве $C[0;1]$ (теоремой Арцела).

1) Докажем равномерную ограниченность на отрезке $[0;1]$ множества функций B. Выберем произвольную функцию $f \in B$. Согласно условию (б), найдётся точка $\tau \in [0;1]$, такая, что $f(\tau) = 1$. Используя формулу Ньютона–Лейбница, получаем

$$f(t) = 1 + \int\limits_{\tau}^{t} f'(u)\, du, \qquad t \in [0;1].$$

Тогда для любой точки $t \in [0;1]$ имеем

$$|f(t)| \leq 1 + \int\limits_0^1 |f'(u)| du \leq 1 + \left(\int\limits_0^1 |f'(u)|^3 du \right)^{\frac{1}{3}} \leq 1 + \sqrt[3]{8} = 3.$$

Последняя оценка получена из условия (а) при помощи неравенства Гёльдера для $p = 3$, $q = 3/2$.

2) Докажем теперь равностепенную непрерывность множества функций B на отрезке $[0;1]$. Для любых точек s, $t \in [0;1]$, $s < t$, и $f \in B$ имеем

$$|f(s) - f(t)| = \left| \int\limits_s^t f'(u)\, du \right| \leq \int\limits_s^t |f'(u)| du \leq$$

$$\leq (t-s)^{\frac{2}{3}} \left(\int\limits_s^t |f'(u)|^3 du \right)^{\frac{1}{3}} \leq (t-s)^{\frac{2}{3}} \left(\int\limits_0^1 |f'(u)|^3 du \right)^{\frac{1}{3}} \leq 2\,(t-s)^{\frac{2}{3}}.$$

Тогда, если для любого $\varepsilon > 0$ положить $\delta = (\varepsilon/2)^{3/2}$, то для произвольных s, $t \in [0;1]$, удовлетворяющих неравенству $|s-t| < \delta$, и $f \in B$ будет справедливо неравенство $|f(s) - f(t)| < 2\delta^{2/3} = \varepsilon$. Следовательно, равностепенная непрерывность множества функций B доказана.

Таким образом, множество B относительно компактно в $C[0;1]$.

Пример 3.2. Докажем относительную компактность в $C[0;2]$ множества B непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0;2]$ функций f, таких, что

$$\int\limits_0^2 \left(|f(t)|^3 + |f'(t)|^4\right) dt < K, \qquad K > 0.$$

Решение. Воспользуемся теоремой Арцела.

1) Докажем равномерную ограниченность функций $f \in B$. Поскольку функция $|f(t)|$ непрерывна на отрезке $[0;2]$, то она достигает своих точных граней, т. е. найдётся точка $t_o \in [0;2]$, такая, что $|f(t_o)| = \min\limits_{[0;2]} |f(t)|$. Используя формулу Ньютона–Лейбница, имеем

$$|f(t)| = \left| f(t_o) + \int\limits_{t_o}^t f'(u)\,du \right| \leq |f(t_o)| + \int\limits_0^2 |f'(u)|du \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \int\limits_0^2 |f(u)|du + \int\limits_0^2 |f'(u)|du.$$

Для оценки последних двух интегралов применим неравенство Гёльдера:

$$\int\limits_0^2 |f(u)|du \leq \left(\int\limits_0^2 |f(u)|^3 du \right)^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} \qquad \left(p = 3, q = \frac{3}{2}\right);$$

$$\int\limits_0^2 |f'(u)|du \le \left(\int\limits_0^2 |f'(u)|^4 du\right)^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{3}{4}} \qquad \left(p = 4, q = \frac{4}{3}\right).$$

Тогда для любого $t \in [0;2]$ получаем оценки:

$$|f(t)| \le \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^2 |f(u)|^3 du\right)^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} + \left(\int\limits_0^2 |f'(u)|^4 du\right)^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{3}{4}} \le$$

$$\le \frac{1}{2}K^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} + K^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{3}{4}} \le \sqrt[3]{K/2} + \sqrt[4]{8K} = M,$$

где число $M > 0$ общее для всех функций f из множества B.

2) Теперь докажем равностепенную непрерывность на отрезке $[0;2]$ функций $f \in B$. Пусть s, $t \in [0;2]$, $s < t$. Тогда для любой функции $f \in B$ имеем

$$|f(s) - f(t)| = \left|\int\limits_s^t f'(u)\,du\right| \le \int\limits_0^2 |f'(u)|du \le$$

$$\le \left(\int\limits_0^2 |f'(u)|^4 du\right)^{\frac{1}{4}} \cdot (t-s)^{\frac{3}{4}} < \sqrt[4]{K} \cdot (t-s)^{\frac{3}{4}}.$$

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Положим $\delta = \frac{\varepsilon^{4/3}}{K^{1/3}}$. Тогда для любых s, $t \in [0;2]$, таких, что $|s-t| < \delta$, и любой $f \in B$ справедлива оценка

$$|f(s) - f(t)| < \sqrt[4]{K} \cdot \delta^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{K} \cdot \frac{\varepsilon}{K^{1/4}} = \varepsilon.$$

Равностепенная непрерывность множества функций B доказана. Следовательно, множество B относительно компактно в $C[0;2]$.

Пример 3.3. Докажем относительную компактность в $C[0;3]$ множества B непрерывных функций f, таких, что

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{x^2+n}, \qquad x \in [0;3], \qquad \text{где} \quad |b_n| \le \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Решение. 1) Проверим равномерную ограниченность функций $f \in B$:

$$|f(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|}{x^2+n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = M,$$

где число M (сумма сходящегося ряда Дирихле) является общим для всех $f \in B$ и $x \in [0;3]$.

2) Докажем равностепенную непрерывность B. Для любых x, $y \in [0;3]$ и $f \in B$ имеем

$$|f(x)-f(y)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{1}{x^2+n} - \frac{1}{y^2+n}\right)\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n| \cdot |x^2-y^2|}{(x^2+n)(y^2+n)} \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x-y|(x+y)}{\sqrt{n}(x^2+n)(y^2+n)} \leq |x-y| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2\sqrt{n}}.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$, где $K = 6\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}} < \infty$. Тогда, если x, $y \in [0;3]$ и $|x-y| < \delta$, то $|f(x)-f(y)| \leq K|x-y| < K\delta = \varepsilon$ для любой функции $f \in B$. Равностепенная непрерывность установлена. Следовательно, множество B относительно компактно в $C[0;3]$.

Пример 3.4. Докажем относительную компактность в $C[0;4]$ множества B непрерывных функций f, таких, что

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\varphi(y)\sin(xy)}{1+x^2+y^2}dy, \qquad x \in [0;4],$$

где $\varphi(y)$ – непрерывная на отрезке $[0;1]$ функция, и $\max\limits_{[0;1]} |\varphi(y)| \leq 1$.

Решение. 1) Установим равномерную ограниченность функций из B. Для любого $x \in [0;4]$ и $f \in B$ имеем:

$$|f(x)| \leq \int_0^1 \frac{|\varphi(y)| \cdot |\sin(xy)|}{1+x^2+y^2}dy \leq \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \operatorname{arctg} y\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

2) Теперь докажем равностепенную непрерывность функций из B. Для любых $x,\ z \in [0;4]$ и $f \in B$ справедлива оценка:

$$|f(x) - f(z)| \le \int\limits_0^1 |\varphi(y)| \cdot \left| \frac{\sin(xy)}{1+x^2+y^2} - \frac{\sin(zy)}{1+z^2+y^2} \right| dy \le$$

$$\le \int\limits_0^1 \left| \frac{\sin(xy)}{1+x^2+y^2} - \frac{\sin(zy)}{1+z^2+y^2} \right| dy.$$

Зафиксируем $y \in [0;1]$. Рассмотрим функцию $Y(t) = \frac{\sin(yt)}{1+y^2+t^2}$. Она дифференцируема в любой точке $t \in [0;4]$, причём $|Y'(t)| =$

$$= \frac{\left| y\cos(yt)\left(1+y^2+t^2\right) - 2t\sin(yt) \right|}{\left(1+y^2+t^2\right)^2} \le \frac{y\left(1+y^2+t^2\right) + 2t}{\left(1+y^2+t^2\right)^2} \le 26.$$

Согласно теореме Лагранжа, для любых $x,\ z \in [0;4]$ найдётся точка u, лежащая между x и z, такая, что $|Y(x) - Y(z)| = |Y'(u)| \cdot |x-z|$. Используя оценку $|Y'(t)| \le 26$, получаем

$$\left| \frac{\sin(xy)}{1+x^2+y^2} - \frac{\sin(zy)}{1+z^2+y^2} \right| = |Y(x) - Y(z)| \le 26|x-z|.$$

Тогда

$$|f(x) - f(z)| \le \int\limits_0^1 26|x-z| dy = 26|x-z|.$$

Если при любом ε положить $\delta = \frac{\varepsilon}{26}$, то $|f(x) - f(z)| < \varepsilon$ для всяких $x,\ z \in [0;4]$, таких, что $|x-z| < \delta$, и $f \in B$. Множество функций B является равностепенно непрерывным. Итак, относительная компактность множества B установлена.

Пример 3.5. Выясним, является ли относительно компактным в $C[0;5]$ множество B функций

$$f_\alpha(x) = \cos^2(\alpha x), \qquad \alpha \in [0;+\infty).$$

Решение. Данное семейство функций обладает свойством равномерной ограниченности:

$$|f_\alpha(x)| = \cos^2(\alpha x) \le 1, \qquad \alpha \ge 0, \quad x \in [0;5].$$

Для произвольных $x,\ y \in [0;5]$ на основании теоремы Лагранжа имеем:

$$|f_\alpha(x) - f_\alpha(y)| = \alpha|\sin(2\alpha u)| \cdot |x-y|,$$

где $u = x + \theta(y-x)$, $\theta \in (0;1)$. Функции $\alpha|\sin(2\alpha u)|$, $\alpha \geq 0$, не являются равномерно ограниченными на $[0;5]$. Исходя из этого, попробуем доказать отсутствие свойства равностепенной непрерывности у множества B, т. е. доказать, что существует число $\varepsilon > 0$, такое, что для любого $\delta > 0$ найдутся $\alpha \geq 0$ и точки $x,\ y \in [0;5]$ с условием $|x-y| < \delta$, для которых $|f_\alpha(x) - f_\alpha(y)| \geq \varepsilon$. Так как $\lim\limits_{\alpha\to\infty} \frac{\pi}{2\alpha} = 0$, то для любого $\delta > 0$ существует $\alpha > 0$, такое, что $|\frac{\pi}{2\alpha}| < \delta$. Положим $x = 0$, $y = \frac{\pi}{2\alpha}$. Тогда $|x-y| < \delta$, и $|f_\alpha(x) - f_\alpha(y)| = |\cos^2 0 - \cos^2 \frac{\pi}{2}| = 1$. Таким образом, можно положить $\varepsilon = 1$. Множество функций B не является равностепенно непрерывным, следовательно, не является относительно компактным в $C[0;5]$.

Пример 3.6. Докажем относительную компактность в метрическом пространстве ℓ_4 множества B числовых последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которых

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{10} x_n^{12} \leq 1.$$

Решение. Воспользуемся критерием относительной компактности в пространстве ℓ_p, $p \geq 1$.

1) Сначала докажем ограниченность множества B в ℓ_4. Для любой последовательности $x = \{x_n\} \in B$, применяя неравенство Гёльдера, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^4 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{10/3}} \cdot n^{\frac{10}{3}} |x_n|^4 \leq \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{10/3}}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{2}{3}} \cdot \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\frac{10}{3}} |x_n|^4\right)^3\right]^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}\right]^{\frac{2}{3}} \cdot \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{10} |x_n|^{12}\right]^{\frac{1}{3}} \leq \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}\right]^{\frac{2}{3}} = K < \infty$$

(сходящийся ряд Дирихле). Следовательно, множество B ограничено в ℓ_4.

2) Теперь докажем, что последовательность остатков ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^4$, где $x \in B$, равномерно на множестве B сходится к нулю. Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$ сходится, то последовательность $\left\{ \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \right\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к нулю. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер $N = N(\varepsilon)$, такой, что для любого $k > N$ верно неравенство

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^5} < \varepsilon^{\frac{3}{2}}.$$

Пусть x – произвольный элемент множества B. Тогда

$$R_k(x) = \sum_{n=k+1}^{\infty} |x_n|^4 = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^{10/3}} \cdot n^{\frac{10}{3}} |x_n|^4 \leq$$

$$\leq \left[\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \right]^{\frac{2}{3}} \cdot \left[\sum_{n=k+1}^{\infty} n^{10} |x_n|^{12} \right]^{\frac{1}{3}} < \varepsilon \cdot \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{10} |x_n|^{12} \right]^{\frac{1}{3}} < \varepsilon,$$

что верно для любого номера $k > N = N(\varepsilon)$. Следовательно, множество B является относительно компактным в ℓ_4.

4 Расстояние до подпространства в гильбертовом пространстве

Пусть H – нормированное пространство, M – его подмножество. Тогда для любого $x \in H$ *расстоянием от элемента x до множества M* называют число

$$\rho(x, M) = \inf_{u \in M} \|x - u\|.$$

Теорема 4.1. *Для любого подпространства L гильбертова пространства H и произвольного элемента $x \in H$ существует, причём единственный, элемент $y \in L$, такой, что $\rho(x, L) = \|x - y\|$.*

Пусть L – подпространство гильбертова пространства H. Тогда элемент $z \in H$ *ортогонален* L (обозначается $z \perp L$) в том случае, если для любого $x \in L$ скалярное произведение $(x, z) = 0$. Множество

$$L^{\perp} = \{z \in H : \; z \perp L\}$$

является подпространством в H, и его называют *ортогональным дополнением* к L.

Теорема 4.2. *Пусть L – подпространство гильбертова пространства H, $x \in H$, а элемент y – тот элемент из L, для которого $\rho\,(x, L) = \|x - y\|$. Тогда $z = x - y \perp L$.*

Теорема 4.3. *Пусть L – подпространство гильбертова пространства H. Тогда для любого элемента $x \in H$ найдутся такие элементы $y \in L$ и $z \in L^{\perp}$, что $x = y+z$, причём это разложение единственно, и*

$$\rho\,(x, L) = \|z\|, \qquad \rho\left(x, L^{\perp}\right) = \|y\|.$$

Заметим, что при таком разложении верно равенство $\|x\|^2 = \|y\|^2+\|z\|^2$. Таким образом, для любого подпространства L гильбертово пространство H является *ортогональной суммой* подпространств L и $L^{\perp}$, т. е. $H = L \oplus L^{\perp}$.

Пример 4.1. Найдём расстояние в гильбертовом пространстве ℓ_2 от элемента $x_o = \{0, 0, 0, 2, 0, 0, \ldots\}$ до подпространства

$$L = \left\{ y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_2 : \; \sum_{k=2}^{6} y_k = 0 \right\}.$$

Напомним, что гильбертово пространство ℓ_2 состоит из числовых последовательностей $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, таких, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$, причём скалярное произведение для любых двух элементов $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ вычисляется по формуле: $(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k y_k$.

Решение. Числовую последовательность $\{0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \ldots\} \in \ell_2$ обозначим z_o, т. е.

$$z_o = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}, \qquad z_k = \begin{cases} 1, \text{ если } k = 2, 3, 4, 5, 6, \\ 0, \text{ если } k = 1 \text{ или } k > 6. \end{cases}$$

Тогда условие принадлежности элемента $y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ подпространству L можно записать, как $(y, z_o) = 0$. Следовательно, $z_o \perp L$, и $L^{\perp} = \langle z_o \rangle = \{\alpha z_o : \ \alpha \in \mathbb{R}\}$. Согласно теореме 4.3, для элемента x_o существует единственное разложение в сумму: $x_o = y_o + \alpha z_o$, где $y_o \in L$, $\rho\,(x_o, L) = \|x_o - y_o\| = |\alpha| \cdot \|z_o\| = |\alpha| \cdot \sqrt{5}$. Коэффициент α найдём из условия $y_o = x_o - \alpha z_o \perp z_o$. Тогда $(x_o - \alpha z_o, z_o) = (x_o, z_o) - \alpha\,(z_o, z_o) = 0$, и $\alpha = \frac{(x_o, z_o)}{(z_o, z_o)} = \frac{2}{5}$. Следовательно, $\rho\,(x_o, L) = \frac{2}{5}\sqrt{5} = \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0,894$.

Пример 4.2. Найдём расстояние в гильбертовом пространстве ℓ_2 от элемента $x_o = \{1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \ldots, \frac{1}{2k-1}, 0, \ldots\}$ до подпространства

$$L = \left\{ y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_2 : \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{k} = 0 \right\}.$$

Решение. Условие $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{k} = 0$ можно записать, как

$$(y, z_o) = 0, \ \text{где } z_o = \left\{ \frac{1}{k} \right\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_2 \qquad \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty \right).$$

Таким образом, $y \in L \iff (y, z_o) = 0$, следовательно, $z_o \perp L$, и $L^{\perp} = \{\alpha z_o : \ \alpha \in \mathbb{R}\}$. Согласно теореме 4.3, для элемента x_o существует единственное разложение в сумму: $x_o = y_o + \alpha z_o$, где $y_o \in L$;

$$\rho\,(x_o, L) = \|x_o - y_o\| = |\alpha| \cdot \|z_o\| = |\alpha| \cdot C, \ \text{где } C = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}.$$

Коэффициент α найдём из условия $y_o = x_o - \alpha z_o \perp z_o$. Тогда $(x_o - \alpha z_o, z_o) = (x_o, z_o) - \alpha\,(z_o, z_o) = 0$, и

$$\alpha = \frac{(x_o, z_o)}{(z_o, z_o)} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}}{C^2}.$$

Следовательно,

$$\rho\left(x_o, L\right)=\frac{1}{C} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{1}{C}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{C}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}-\frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)=\frac{1}{C}\left(C^2-\frac{C^2}{4}\right)=\frac{3}{4} C.$$

Вычислим C. Для этого воспользуемся разложением функции $f(t)=t$ в ряд Фурье на интервале $(-\pi;\pi)$:

$$t=2\left(\sin t-\frac{1}{2} \sin 2t+\frac{1}{3} \sin 3t-\ldots-\frac{(-1)^k}{k} \sin kt+\ldots\right).$$

Согласно равенству Парсеваля имеем:

$$4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi}{k^2}=\int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt=\frac{2\pi^3}{3}, \text{ откуда } C^2=\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Таким образом, $\rho\left(x_o, L\right)=\frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{6}}=\frac{\pi\sqrt{6}}{8} \approx 0,962$.

Пример 4.3. Найдём расстояние в гильбертовом пространстве ℓ_2 от элемента

$$x_o=\left\{\frac{(-1)^n 5^{n/2}}{\sqrt{n!}}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

до подпространства $L^{\perp}$, где $L=\{y=\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_2 : y_1=y_3=0\}$.

Решение. Отметим, что $y \in L$ тогда и только тогда, когда $y \perp e_1$ и $y \perp e_3$, где $e_1=\{1,0,0,0,\ldots\}$, $e_3=\{0,0,1,0,0,\ldots\} \in \ell_2$. Таким образом, $L^{\perp}=\langle e_1, e_3\rangle=\{\alpha e_1+\beta e_3 :\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Согласно теореме 4.3, для элемента x_o существует единственное разложение в сумму: $x_o=y_o+\alpha e_1+\beta e_3$, где $y_o \in L$, и $\rho\left(x_o, L^{\perp}\right)=\|y_o\|$. Поскольку $y_o \perp e_1$, $y_o \perp e_3$, а также $e_1 \perp e_3$, то

$$(x_o-(\alpha e_1+\beta e_3), e_1)=(x_o, e_1)-\alpha(e_1, e_1)=0,$$
$$(x_o-(\alpha e_1+\beta e_3), e_3)=(x_o, e_3)-\beta(e_3, e_3)=0.$$

Отсюда имеем:

$$\alpha=\frac{(x_0, e_1)}{(e_1, e_1)}=(x_o, e_1)=-\sqrt{5}; \qquad \beta=\frac{(x_0, e_3)}{(e_3, e_3)}=(x_o, e_3)=-\frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{6}}.$$

Следовательно, $\rho^2\left(x_o, L^\perp\right) = \|y_o\|^2 = \|x_o\|^2 - \alpha^2\|e_1\|^2 - \beta^2\|e_3\|^2 =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!} - 5 - \frac{125}{6} = (e^5 - 1) - \frac{155}{6} = e^5 - \frac{161}{6}.$$

Итак, $\rho^2\left(x_o, L^\perp\right) = \sqrt{e^5 - \frac{161}{6}} \approx 11,03.$

Пример 4.4. Найдём в гильбертовом пространстве $L^2[0;1]$, являющемся пополнением евклидова пространства кусочно непрерывных функций со скалярным произведением $(f,g) = \int\limits_0^1 f(t)\,g(t)\,dt$, расстояние от элемента $f_o(t) = t-1$ до подпространства $L = \left\langle t^2, t^3\right\rangle = \{\alpha t^2 + \beta t^3 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Решение. Согласно теореме 4.3, для элемента f_o существует единственное разложение в сумму: $f_o = g_o + h_o$, где $g_o \in L$, $h_o \in L^\perp$, т. е. существуют единственные коэффициенты $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, такие, что $f_o(t) = \alpha t^2 + \beta t^3 + h_o(t)$, $h_o \perp t^2$, $h_o \perp t^3$. Поскольку $h_o(t) = f_o(t) - \alpha t^2 - \beta t^3 = t - 1 - \alpha t^2 - \beta t^3$, то

$$(h_o, t^2) = \int\limits_0^1 \left(t - 1 - \alpha t^2 - \beta t^3\right) t^2 dt = 0 \iff \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{\alpha}{5} - \frac{\beta}{6} = 0;$$

$$(h_o, t^3) = \int\limits_0^1 \left(t - 1 - \alpha t^2 - \beta t^3\right) t^3 dt = 0 \iff \frac{1}{5} - \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{6} - \frac{\beta}{7} = 0.$$

Отсюда получаем систему линейных алгебраических уравнений для нахождения α и β:

$$\frac{\alpha}{5} + \frac{\beta}{6} = -\frac{1}{12}; \qquad \frac{\alpha}{6} + \frac{\beta}{7} = -\frac{1}{20}.$$

Решая систему, получаем $\alpha = -4{,}5$, $\beta = 4{,}9$. Следовательно,

$\rho^2(f_o, L) = \|h_o\|^2 = \|f_o\|^2 - \|g_o\|^2 =$

$$= \int\limits_0^1 (t-1)^2 dt - \int\limits_0^1 (4,9t^3 - 4,5t^2)^2 dt = \frac{1}{3} - \frac{13}{100} = \frac{61}{300}.$$

Окончательно имеем: $\rho\left(f_o, L\right) = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{61}{3}} \approx 0,451.$

Пример 4.5. Найдём расстояние в гильбертовом пространстве $L^2[0;1]$ от элемента

$$f_o\left(t\right) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ t, & \frac{1}{2} < t \le 1 \end{cases}$$

до подпространства

$$L = \left\{ g \in L^2[0;1] : \int\limits_0^1 g\left(t\right) dt = \int\limits_0^1 g\left(t\right) t dt = 0 \right\}.$$

Решение. Отметим, что $g \in L \iff g \perp u$, $g \perp v$, где $u\left(t\right) = 1$, $v\left(t\right) = t$. Тогда $L^\perp = \langle u, v\rangle = \{\alpha u + \beta v : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Согласно теореме 4.3, имеем единственное разложение: $f_o = g_o + \alpha u + \beta v$, $g_o \in L$, причём $\rho\left(f_o, L\right) = \|f_o - g_o\| = \|\alpha u + \beta v\|$. Коэффициенты α и β найдём из условий $\left(g_o, u\right) = \left(g_o, v\right) = 0$, т. е.

$$\int\limits_0^1 \left(f_o\left(t\right) - \alpha - \beta t\right) dt = \int\limits_0^1 \left(f_o\left(t\right) - \alpha - \beta t\right) t dt = 0.$$

Подставляя $f_o\left(t\right)$ в последние равенства, получаем

$$\int\limits_{1/2}^1 t dt - \int\limits_0^1 \left(\alpha + \beta t\right) dt = 0 \iff \frac{3}{8} - \alpha - \frac{\beta}{2} = 0;$$

$$\int\limits_{1/2}^1 t^2 dt - \int\limits_0^1 \left(\alpha + \beta t\right) t dt = 0 \iff \frac{7}{24} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{3} = 0.$$

Таким образом, α и β находим из системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 8\alpha + 4\beta = 3 \\ 12\alpha + 8\beta = 7 \end{cases} \iff \alpha = -\frac{1}{4}, \ \beta = \frac{5}{4}.$$

Итак,

$$\rho^2(f_o, L) = \int\limits_0^1 \left(\frac{5}{4}t - \frac{1}{4}\right)^2 dt = \frac{13}{48} \Longrightarrow \rho(f_o, L) = \sqrt{\frac{13}{48}} \approx 0,520.$$

5 Линейные ограниченные функционалы

Пусть L — нормированное пространство. Функцию на L со значениями в $\mathbb{R}$ ($f\colon L \mapsto \mathbb{R}$) называют *функционалом.* Если для любых чисел α, $\beta \in \mathbb{R}$ и любых элементов x, $y \in L$ справедливо равенство $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$, то функционал f называют *линейным.* Линейный функционал f является *ограниченным*, если образом любого ограниченного в L множества будет ограниченное числовое множество. В силу линейности f это равносильно тому, что найдётся число $C > 0$, такое, что для любого элемента $x \in L$, $\|x\| \le 1$, верно неравенство $|f(x)| \le C$. *Нормой* линейного ограниченного функционала называют число

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \le 1} |f(x)| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \sup_{x \ne 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

Функционал $f\colon L \mapsto \mathbb{R}$ называют непрерывным в точке $x_o \in L$ в том случае, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta = \delta(\varepsilon, x_o) > 0$, такое, что для любого $x \in L$ из $\|x - x_o\| < \delta$ следует $|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$. Если функционал непрерывен в любой точке $x_o \in L$, то его называют *непрерывным.*

Теорема 5.1. *Линейный функционал $f\colon L \mapsto \mathbb{R}$ непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен.*

Пример 5.1. Покажем, что функционал $f\colon \mathbf{m} \mapsto \mathbb{R}$, заданный в нормированном пространстве $\mathbf{m}$ ограниченных числовых последовательностей следующим образом:

$$f(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n, \quad x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}, \quad a_k \in \mathbb{R},\ k = 1, 2, \ldots n,$$

является линейным, непрерывным, и найдём его норму.

Решение. Линейность функционала f легко проверяется. Непрерывность будет установлена, согласно теореме 5.1, когда будет доказана ограниченность f. Выберем любую последовательность $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbf{m}$, такую, что $\|x\| = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |x_k| = 1$. Тогда

$$|f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| \cdot |x_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

Таким образом, $\|f\| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|$, и функционал f является ограниченным, следовательно, непрерывным. Рассмотрим последовательность

$$x_o = \{\operatorname{sign} a_1, \operatorname{sign} a_2, \ldots \operatorname{sign} a_n, 0, 0, \ldots\} \in \mathbf{m}; \ \operatorname{sign} y = \begin{cases} 1, & y > 0 \\ -1, & y < 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

Отметим, что $\|x_o\| = 1$ и $f(x_o) = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|$. Следовательно, $\|f\| = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|$.

Пример 5.2. Найдём норму линейного функционала $f\colon c \mapsto \mathbb{R}$, заданного в нормированном пространстве c сходящихся числовых последовательностей следующим образом:

$$f(x) = x_4 - 5 \lim_{k\to\infty} x_k, \quad x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in c, \quad \|x\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|.$$

Решение. Выберем произвольную сходящуюся числовую последовательность $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\|x\| = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |x_k| = 1$. Тогда, согласно свойству предельного перехода в неравенстве, $\lim\limits_{k\to\infty} |x_k| \leq 1$, и $|f(x)| \leq |x_4| + 5 \lim\limits_{k\to\infty} |x_k| \leq 6$. Значит, $\|f\| \leq 6$. Для последовательности $x_o = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $x_4 = 1$, $x_k = -1$ при $k \neq 4$, имеем $\|x_o\| = 1$ и $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = -1$, следовательно, $f(x_o) = 6$. Таким образом, $\|f\| = 6$.

Пример 5.3. Найдём норму линейного функционала $f\colon c_0 \mapsto \mathbb{R}$, заданного в нормированном пространстве c_0 числовых последовательностей, сходящихся к нулю, следующим образом:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k \cdot k}, \quad x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in c_0, \quad \|x\| = \max_{k \in \mathbb{N}} |x_k|.$$

Решение. Пусть числовая последовательность $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям: $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$ и $\|x\| = \max\limits_{k\in\mathbb{N}} |x_k| = 1$. Тогда $|f(x)| \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k \cdot k} = \ln 2$. Действительно, $\ln(1+t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^k$ при $t \in (-1; 1]$, и при $t = -\frac{1}{2}$ мы имеем $\ln \frac{1}{2} = -\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k \cdot k}$. Значит, $\|f\| \leq \ln 2$. Докажем, что $\|f\| = \ln 2$. Рассмотрим последовательность элементов $x^{(n)} = \{x_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty} \in c_0$, $x_k^{(n)} = 1$ при $k \leq n$, $x_k^{(n)} = 0$ при $k > n$. Тогда $f(x^{(n)}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k \cdot k} = S_n$ — частичная сумма ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k \cdot k}$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x^{(n)}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \ln 2$. Так как $\|x^{(n)}\| = 1$ при всех n, то $\|f\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |f(x)| \geq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |f(x^{(n)})| = \ln 2$. Таким образом, $\|f\| = \ln 2$.

Пример 5.4. Найдём норму линейного функционала $f\colon \ell_1 \mapsto \mathbb{R}$, заданного в нормированном пространстве числовых последовательностей ℓ_1 следующим образом:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{1 + \ln k}, \quad x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_1 \quad \left(\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \right).$$

Решение. Выберем любую последовательность $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_1$, такую, что $\|x\| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k| = 1$. Тогда

$$|f(x)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{1 + \ln k} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{1 + \ln k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = 1.$$

Следовательно, $\|f\| \leq 1$. Для последовательности $x_o = \{1, 0, 0, 0, \ldots\} \in \ell_1$ имеем $\|x_o\| = 1$ и $f(x_o) = 1$. Таким образом, $\|f\| = 1$.

Пример 5.5. Найдём норму линейного функционала $f\colon \ell_p \mapsto \mathbb{R}$, заданного в нормированном пространстве числовых последовательностей ℓ_p, $p > 1$, следующим образом:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k, \qquad x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_p, \quad \|x\|_p = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right\}^{1/p},$$

где числовая последовательность $a = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ — некоторая ненулевая последовательность из ℓ_q, $1/p + 1/q = 1$, $\|a\|_q = \left\{ \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^q \right\}^{1/q} < \infty$.

Решение. Пусть $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_p$ и $\|x\|_p = 1$. Тогда, используя неравенство Гёльдера для рядов, получаем

$$|f(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| \leq \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^q \right\}^{\frac{1}{q}} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}} = \|a\|_q \cdot \|x\|_p = \|a\|_q.$$

Следовательно, $\|f\| \leq \|a\|_q$. Теперь рассмотрим последовательность $\tilde{x} = \{\text{sign}\ a_k \cdot |a_k|^{q-1}\}_{k=1}^{\infty}$. Она принадлежит ℓ_p, причём

$$\|\tilde{x}\|_p = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{p(q-1)} \right\}^{1/p} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^q \right\}^{1/p} = (\|a\|_q)^{q/p}.$$

Элемент

$$x_o = \frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|_p} = (\|a\|_q)^{-q/p} \cdot \tilde{x} \in \ell_p,$$

его норма $\|x_o\|_p = 1$, и

$$f(x_o) = (\|a\|_q)^{-q/p} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^q = \|a\|_q^{q-q/p} = \|a\|_q.$$

Таким образом, $\|f\| = \|a\|_q$.

Пример 5.6. Найдём норму линейного функционала $f\colon C[-1;1] \mapsto \mathbb{R}$, заданного следующим образом:

$$f(x) = x(-1) - 2x(0) + \int_{-1}^{1} t^3 x(t) dt, \quad x \in C[-1;1].$$

Решение. Пусть непрерывная на отрезке $[-1;1]$ функция $x(t)$ имеет норму $\|x\| = \max\limits_{t\in[-1;1]} |x(t)| = 1$. Тогда $|f(x)| \leq$

$$\leq |x(-1)|+2|x(0)|+\int\limits_{-1}^{1} |t^3|\cdot|x(t)|dt \leq 1+2+2\int\limits_{0}^{1} t^3 dt = 3+2\cdot\frac{1}{4} = 3{,}5.$$

Следовательно, $\|f\| \leq$3,5. Для функции

$$x_o(t) = \begin{cases} -1, & t \in (-1;0] \\ \ \ 1, & t \in \{-1\} \cup (0;1] \end{cases} \qquad \text{(см. рис. 1)}$$

имеем $f(x_o) =$3,5, но функция x_o разрывна. Рассмотрим последовательность

Рис. 1: к примеру 5.6

непрерывных на отрезке $[-1;1]$ функций x_n, определённых следующим образом (см. рис. 2):

$$x_n(t) = \begin{cases} 1-2n(t+1) & , \ t \in [-1; -1+\frac{1}{n}] \\ -1 & , \ t \in [-1+\frac{1}{n}; 0] \\ 2nt-1 & , \ t \in [0; \frac{1}{n}] \\ 1 & , \ t \in [\frac{1}{n}; 1] \end{cases}$$

Отметим, что предельной функцией (в смысле поточечной сходимости)

Рис. 2: к примеру 5.6

на отрезке $[-1;1]$ для функциональной последовательности $\{x_n(t)\}$ как раз и является функция $x_o(t)$. Вычислим $f(x_n)$ для любого $n \in \mathbb{N}$: $f(x_n) =$

$$= 1+2+\int\limits_{-1}^{-1+\frac{1}{n}} (1-2n(t+1))t^3 dt - \int\limits_{-1+\frac{1}{n}}^{0} t^3 dt + \int\limits_{0}^{\frac{1}{n}} (2nt-1)t^3 dt + \int\limits_{\frac{1}{n}}^{1} t^3 dt \geq$$

$$\geq 3-\frac{1}{n}-\frac{t^4}{4}\bigg|_{-1+\frac{1}{n}}^{0}-\frac{1}{n}+\frac{t^4}{4}\bigg|_{\frac{1}{n}}^{1}=3+\frac{1}{4}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^4+1-\left(\frac{1}{n}\right)^4\right)-\frac{2}{n}=b_n$$

(мы оценили снизу интегралы по промежуткам $[-1;-1+\frac{1}{n}]$ и $[0;\frac{1}{n}]$, пользуясь тем, что $x_n(t)t^3 \geq -1$ на $[-1;1]$). Поскольку $b_n \to 3{,}5$ при $n \to \infty$, мы получаем $\|f\| \geq \sup\limits_{\|x\|=1} f(x) \geq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f(x_n) \geq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n = 3{,}5$. Учитывая полученную ранее оценку $\|f\| \leq 3{,}5$, имеем $\|f\| = 3{,}5$.

Пример 5.7. Вычислим норму линейного функционала $f\colon L^3[0;1] \mapsto \mathbb{R}$, заданного следующим образом:

$$f(x)=\int\limits_0^1 e^t x(t)dt, \qquad x\in L^3[0;1].$$

Решение. Выберем любую функцию $x\in L^3[0;1]$, для которой $\|x\| = \left\{\int\limits_0^1 |x(t)|^3 dt\right\}^{1/3} = 1$. Тогда, используя неравенство Гёльдера при $p=3$, $q=3/2$, имеем

$$|f(x)| \leq \left\{\int\limits_0^1 e^{3t/2}dt\right\}^{2/3}\cdot\|x\| = \left\{\frac{2}{3}\left(e^{3/2}-1\right)\right\}^{2/3} = A.$$

Следовательно, $\|f\| \leq A$. Найдём норму функции $\tilde{x}(t) = e^{t/2}$ в $L^3[0;1]$:

$$\|\tilde{x}\| = \left\{\int\limits_0^1 e^{3t/2}dt\right\}^{1/3} = \left\{\frac{2}{3}\left(e^{3/2}-1\right)\right\}^{1/3} = \sqrt{A}.$$

Пусть $x_o(t) = \frac{\tilde{x}(t)}{\|\tilde{x}\|} = \frac{e^{t/2}}{\sqrt{A}}$, $t\in[0;1]$. Тогда

$$f(x_o) = \frac{1}{\sqrt{A}}\int\limits_0^1 e^t\cdot e^{t/2}dt = \frac{1}{\sqrt{A}}\cdot A^{3/2} = A.$$

Так как $\|x_o\|=1$, то $\|f\| = A = \sqrt[3]{\frac{4}{9}\left(e^{3/2}-1\right)^2}$.

6 Вычисление нормы линейного оператора

Пусть линейный оператор A действует из нормированного пространства $(X, \|\cdot\|_X)$ в нормированное пространство $(Y, \|\cdot\|_Y)$. Его нормой называется величина

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y \tag{6}$$

Супремум здесь может достигаться на некотором векторе $x_o \in X$, т. е. $\|Ax_o\|_Y = \sup\limits_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y$, а может и не достигаться.

Вычисление нормы состоит из двух пунктов:
1) Находим положительную константу C, такую, что для всякого вектора $x \in X$ единичной нормы выполнено $\|Ax\|_Y \leq C$. Тогда мы получаем оценку $\|A\| \leq C$.
2) Проверяем, что найденная оценка — точная, т. е. $\|A\| = C$. Для этого надо либо найти вектор $x \in X$ единичной нормы, такой, что $\|Ax\|_Y = C$ (в таком случае супремум из (6) достигается на векторе x), либо убедиться, что для всякого положительного числа $c' < C$ найдётся вектор $x' \in X$ единичной нормы, для которого $\|Ax'\| > c'$, что эквивалентно существованию последовательности $\{x_n\} \subset X$, $\|x_n\|_X = 1$, такой, что

$$\lim_{n\to\infty} \|Ax_n\|_Y = C.$$

Если не удаётся выполнить пункт 2), это может означать, что константа C из пункта 1) была завышена, и надо постараться доказать неравенство $\|Ax\|_Y \leq C$ при меньшей C.

Пример 6.1. Вычислим норму линейного оператора $A\colon L^1[0;4] \mapsto L^1[0;4]$, действующего по правилу

$$Ax = y \iff y(t) = \int\limits_0^t s^3 x(s)\, ds, \qquad t \in [0;4].$$

Решение. 1) Пусть $x \in L^1[0;4]$; $\|x\| = \int_0^4 |x(t)|dt = 1$. Оценим норму $y = Ax$ в пространстве $L^1[0;4]$.

$$\|y\| = \int_0^4 |y(t)|dt = \int_0^4 \left| \int_0^t s^3 x(s)\,ds \right| dt \le \int_0^4 \int_0^t s^3 |x(s)|\,dsdt =$$

поменяем порядок интегрирования

$$= \int_0^4 \int_s^4 s^3 |x(s)|\,dtds = \int_0^4 (4-s)\,s^3 |x(s)|\,ds \le \sup_{[0;4]} (4-s)\,s^3 \cdot \int_0^4 |x(s)|\,ds =$$

$= \sup\limits_{[0;4]} (4-s)\,s^3 = (4-3)\,3^3 = 27$ (наибольшее значение функции $f(s) = (4-s)\,s^3$ на отрезке $[0;4]$ достигается в точке $s = 3$, где производная $f'(s)$ равна нулю). Итак, мы доказали, что $\|A\| \le 27$.

2) Выясним, при каких условиях полученное неравенство становится равенством. Первое неравенство в цепочке имеет вид "модуль интеграла $\le$ интеграла от модуля" и становится равенством, если подынтегральная функция не меняет знак, т. е. если $x(t) \ge 0$ при $0 \le t \le 4$ (случай $x(t) \le 0$ аналогичен). Тогда второе неравенство примет вид

$$\int_0^4 (4-s)\,s^3 x(s)\,ds \le \sup_{[0;4]} (4-s)\,s^3 \cdot \int_0^4 x(s)\,ds.$$

Так как $\|x\| = 1$ и $x(s)$ не меняет знак, то в этом случае равенство невозможно. Но левая часть будет приближаться к правой части, если функция $x(s)$ будет "концентрироваться" вблизи точки максимума функции $f(s) = (4-s)\,s^3$ (точки $s = 3$). Рассмотрим такие функции $x_n \in L^1[0;4]$ с единичными нормами (см. рис. 3):

Рис. 3: к примеру 6.1

$$x_n(s) = \begin{cases} n, & |s-3| \le 1/2n, \\ 0, & |s-3| > 1/2n, \ s \in [0;4]. \end{cases}$$

Тогда

$$\|Ax_n\| = \int\limits_0^4 (4-s)\, s^3 x_n(s)\, ds = n \cdot \int\limits_{3-1/2n}^{3+1/2n} (4-s)\, s^3 ds =$$

$= n \cdot \frac{1}{n} \cdot (4 - s_n)\, s_n^3$ по теореме о среднем, где $|s_n - 3| \leq \frac{1}{2n}$. Но $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 3$, следовательно, $\|Ax_n\| \to 27$. Таким образом, найденная константа $C = 27$ является точным значением нормы оператора A.

Пример 6.2. Вычислим норму линейного оператора A: $L^2[-2;2] \mapsto L^2[-2;2]$, действующего по правилу

$$Ax = y \iff y(t) = 2x(t) + t^4 x(-t), \qquad t \in [-2;2].$$

Решение. 1) Пусть $x \in L^2[-2;2]$; $\|x\|^2 = \int_{-2}^2 x^2(t)\, dt = 1$. Вектор $y = Ax$ равен сумме таких двух векторов:

$$y_1(t) = 2x(t), \qquad y_2(t) = t^4 x(-t).$$

Очевидно, $\|y_1\| = 2$. Оценим норму y_2.

$$\|y_2\|^2 = \int\limits_{-2}^{2} t^8 x^2(-t)\, dt = \int\limits_{-2}^{2} s^8 x^2(s)\, ds \leq \sup_{[-2;2]} s^8 \cdot \int\limits_{-2}^{2} x^2(s)\, ds = 256 \tag{7}$$

(была сделана замена: $s = -t$), т. е. $\|y_2\| \leq 16$, следовательно,

$$\|y\| \leq \|y_1\| + \|y_2\| \leq 18. \tag{8}$$

Получена оценка $\|A\| \leq C = 18$.

2) Выясним, при каких условиях неравенства (7) и (8) становятся равенствами. Как и в примере 6.1, в (7) равенство не достигается, но левая часть стремится к правой части, если функция $x(s)$ концентрируется вблизи точек максимума функции s^8 (точек $s = 2$ и $s = -2$). Рассмотрим последовательность таких функций $x_n \in L^2[-2;2]$ с единичными нормами (см. рис. 4):

Рис. 4: к примеру 6.2

$$x_n(t) = \begin{cases} n, & 2 - 1/2n^2 \le |t| \le 2, \\ 0, & |t| < 2 - 1/2n^2. \end{cases}$$

Их образы имеют вид

$$Ax_n(t) = \begin{cases} \left(2 + t^4\right) n, & 2 - 1/2n^2 \le |t| \le 2, \\ 0, & |t| < 2 - 1/2n^2. \end{cases}$$

Учитывая чётность функций $Ax_n(t)$ и используя теорему о среднем для определённого интеграла, имеем

$$\|Ax_n\|^2 = 2 \int\limits_{2-\frac{1}{2n^2}}^{2} \left(2 + t^4\right)^2 n^2 dt = 2n^2 \cdot \frac{1}{2n^2} \left(2 + \tau_n^4\right)^2,$$

где $\tau_n \in [2 - \frac{1}{2n^2}; 2]$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = 2$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \|Ax_n\| = \lim\limits_{n\to\infty} \left(2 + \tau_n^4\right)$ $= 18$. Таким образом, найденное число $C = 18$ является точным значением нормы оператора A.

Пример 6.3. Вычислим норму линейного оператора A: $L^2[0; 2\pi] \mapsto L^2[0; 2\pi]$, действующего по правилу

$$Ax = y \iff y(t) = \int\limits_0^{\pi/2} (x(t+s) - x(t-s))\, ds, \qquad t \in [0; 2\pi]$$

(функции x и y считаются 2π-периодичными).

Решение. Воспользуемся тем, что тригонометрическая система

$$e_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}; \quad e_{2k-1}(t) = \frac{\sin(kt)}{\sqrt{\pi}},\ e_{2k}(t) = \frac{\cos(kt)}{\sqrt{\pi}},\ k = 1, 2, 3, \ldots \tag{9}$$

является ортонормированным базисом сепарабельного гильбертова пространства $L^2[0; 2\pi]$.

1) Пусть $\|x\| = 1$. Разложим x:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n(t), \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 = 1 \quad \text{(равенство Парсеваля)}.$$

Применим оператор A к каждому вектору из базиса (9):

$$Ae_0(t) = 0; \quad Ae_{2k-1}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\pi/2} (\sin(kt+ks) - \sin(kt-ks))\, ds =$$

$$= 2 \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos(kt)}{\sqrt{\pi}} \sin(ks)\, ds = 2\frac{\cos(kt)}{k\sqrt{\pi}} (1 - \cos(k\pi/2))\, ds = \lambda_k e_{2k}(t),$$

где $\lambda_k = \frac{2}{k}\left(1 - \cos\frac{k\pi}{2}\right)$ ($\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = \frac{2}{3}$, $\lambda_4 = 0$ и т. д.); аналогично получаем $Ae_{2k} = -\lambda_k e_{2k-1}$. Теперь вектор $y = Ax$ и его норма примут следующий вид:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left(c_{2k-1} e_{2k}(t) - c_{2k} e_{2k-1}(t)\right);$$

$$\|y\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \left(c_{2k-1}^2 + c_{2k}^2\right) \le 2^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_{2k-1}^2 + c_{2k}^2\right) \le 4.$$

Таким образом, $\|y\| \le 2$, следовательно, $\|A\| \le 2$.

2) Равенство $\|y\| = 2$ достигается, например, когда $x(t) = e_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin t$. Ответ: $\|A\| = 2$.

Пример 6.4. Вычислим норму линейного оператора $A\colon C[0;2] \mapsto L^2[-2;2]$, действующего по правилу

$$Ax = y \iff y(t) = (t-1) \int\limits_0^1 x(s)\, ds + (t^2-1) \int\limits_1^2 x(s)\, ds, \;\; t \in [-2;2].$$

Решение. 1) Пусть $x \in C[0;2]$, $\|x\| = \max\limits_{[0;2]} |x(t)| = 1$. Обозначим $a = \int\limits_0^1 x(s)\, ds$, $b = \int\limits_1^2 x(s)\, ds$. Тогда $|a| \le 1$, $|b| \le 1$, и вектор $y = Ax$

имеет вид

$$y(t) = a \cdot v(t) + b \cdot w(t), \quad \text{где} \quad v(t) = t - 1,\ w(t) = t^2 - 1.$$

Оценим норму y в пространстве $L^2[-2;2]$:

$$\|y\|^2 = \|av + bw\|^2 = a^2\|v\|^2 + b^2\|w\|^2 + 2ab\,(v, w).$$

Как нетрудно вычислить, $\|v\|^2 = \frac{28}{3}$, $\|w\|^2 = \frac{92}{15}$, $(v, w) = -\frac{4}{3}$. Таким образом,

$$\|y\|^2 = \frac{28}{3}a^2 + \frac{92}{15}b^2 - 2 \cdot \frac{4}{3}ab \le \frac{28}{3} + \frac{92}{15} + 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{272}{15}. \qquad (10)$$

Вывод: $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| \le \frac{\sqrt{272}}{\sqrt{15}}$.

2) Равенство в (10) достигается при $a = 1$, $b = -1$ (или при $a = -1$, $b = 1$). Но $a = 1 \iff x(t) = 1$ при всех $t \in (0;1)$; $b = -1 \iff x(t) = -1$ при всех $t \in (1;2)$. Эти два требования несовместны, так как функция $x(t)$ непрерывна на $[0;2]$. Но можно подобрать последовательность непрерывных на $[0;2]$ функций $x_n(t)$, для которых $a_n = \int_0^1 x_n(s)\,ds$ и $b_n = \int_1^2 x_n(s)\,ds$ сходятся к 1 и -1 соответственно. Рассмотрим последовательность таких функций из $C[0;2]$ с единичными нормами (см. рис. 5):

Рис. 5: к примеру 6.4

$$x_n(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1 - 1/n, \\ n(1-t), & 1 - 1/n \le t \le 1 + 1/n, \\ -1, & 1 + 1/n \le t \le 2. \end{cases}$$

Для x_n мы получаем $a_n = \int\limits_0^{1-1/n} ds + \int\limits_{1-1/n}^{1} n(1-s)\,ds = 1 - \frac{1}{2n}$;

$b_n = \int\limits_1^{1+1/n} n(1-s)\,ds - \int\limits_{1+1/n}^{2} ds = -\left(1 - \frac{1}{2n}\right)$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -1$, то $\|Ax_n\|^2 \to \frac{272}{15}$ при $n \to \infty$. Вывод: $\|A\| = \frac{\sqrt{272}}{\sqrt{15}}$.

Пример 6.5. Вычислим норму линейного оператора A: $L^{5/4}[0;2] \mapsto L^1[0;2]$, действующего по правилу

$$Ax = y \iff y\,(t) = t\,(1-t)\,x\,(t)\,, \qquad t \in [0;2].$$

Решение. 1) Пусть $x \in L^{5/4}[0;2]$, $\|x\| = \left(\int_0^2 |x\,(t)\,|^{5/4} dt\right)^{4/5} = 1$. Тогда по неравенству Гёльдера для $p = 5/4$, $q = p/(p-1) = 5$, получим

$$\|y\| = \int\limits_0^2 |y\,(t)\,|dt \le \left[\int\limits_0^2 |x\,(t)\,|^{5/4} dt\right]^{4/5} \left[\int\limits_0^2 |t\,(1-t)\,|^5 dt\right]^{1/5} =$$

$$= \left[\int\limits_0^1 t^5\,(1-t)^5\,dt + \int\limits_1^2 t^5 (t-1)^5 dt\right]^{1/5} = \left(\frac{23}{6}\right)^{1/5}.$$

Следовательно, $\|A\| \le \sqrt[5]{\frac{23}{6}}$.

2) Как известно, неравенство Гёльдера

$$\int\limits_a^b |f\,(t)\,g\,(t)\,|dt \le \left(\int\limits_a^b |f\,(t)\,|^p dt\right)^{1/p} \cdot \left(\int\limits_a^b |g\,(t)\,|^q dt\right)^{1/q}$$

(где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) обращается в равенство, если $|f\,(t)\,| = C|g\,(t)\,|^{q/p}$ почти всюду. В нашем случае это означает, что $|x\,(t)\,| = Ct^4|1-t|^4$. Подберём константу C, чтобы x имел единичную норму в $L^{5/4}[0;2]$:

$$\int\limits_0^2 \left(Ct^4|1-t|^4\right)^{5/4} dt = C^{5/4} \int\limits_0^2 |t\,(1-t)\,|^5 dt = C^{5/4} \cdot \frac{23}{6} = 1,$$

откуда $C = \left(\frac{6}{23}\right)^{4/5}$. Таким образом, мы нашли единичный вектор $x\,(t) == \left(\frac{6}{23}\right)^{4/5} t^4\,(1-t)^4$, для которого $\|Ax\| = \sqrt[5]{\frac{23}{6}}$. Следовательно, $\|A\| = \sqrt[5]{\frac{23}{6}}$.

Пример 6.6. Вычислим норму линейного оператора $A\colon \ell_2 \mapsto \ell_2$, действующего по правилу: $Ax = y \iff$

$$(y_1, y_2, y_3, \ldots) = (x_1 - x_2 + x_3, x_2 - x_3 + x_4, \ldots x_n - x_{n+1} + x_{n+2}, \ldots).$$

Решение. Введём оператор сдвига $B\colon (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (x_2, x_3, x_4, \ldots)$. Тогда наш оператор примет вид: $A = I - B + B^2$, где I – единичный оператор.

1) Пусть $x \in \ell_2$, $\|x\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2 = 1$. Тогда

$$\|Bx\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} x_{n+1}^2 = \sum_{m=2}^{\infty} x_m^2 \leq 1; \quad \|B^2x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} x_{n+2}^2 = \sum_{m=3}^{\infty} x_m^2 \leq 1.$$

Следовательно, $\|Ax\| \leq \|x\| + \|Bx\| + \|B^2x\| = 3$.

2) Выясним, при каких условиях эти неравенства становятся равенствами. Равенство $\|Bx\| = \|x\|$ равносильно условию $x_1 = 0$, равенство $\|B^2x\| = \|x\|$ равносильно условию $x_1 = x_2 = 0$, поэтому будем рассматривать единичные векторы x, для которых $x_1 = x_2 = 0$. Равенство $\|x - Bx + B^2x\| = \|x\| + \|Bx\| + \|B^2x\|$ недостижимо, так как x, Bx и B^2x не могут быть коллинеарными. Однако, существует последовательность $\{x^{(m)}\} \subset \ell_2$, $\|x^{(m)}\| = 1$, такая, что $\|x^{(m)} + Bx^{(m)}\| \to 0$, $\|x^{(m)} - B^2x^{(m)}\| \to 0$. Пусть

$$x_n^{(m)} = \begin{cases} 0, & n = 1, 2, \\ \frac{(-1)^n}{\sqrt{2m}}, & 3 \leq n \leq 2m + 2, \\ 0, & n > 2m + 2. \end{cases}$$

Тогда

$$\left(Bx^{(m)}\right)_n = \begin{cases} 0, & n = 1, \\ \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2m}}, & 2 \leq n \leq 2m + 1, \\ 0, & n > 2m + 1; \end{cases}$$

$$\left(B^2x^{(m)}\right)_n = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2m}}, & n \leq 2m, \\ 0, & n > 2m. \end{cases}$$

Следовательно, $Ax^{(m)} = x^{(m)} - Bx^{(m)} + B^2x^{(m)} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2m}} (-1, 2, -3, 3, -3, 3, \ldots, -3, 3, -2, 1, 0, 0, \ldots)$$

(числа 3 и -3 встречаются по $m-1$ раз). Тогда

$$\|Ax^{(m)}\|^2 = 2\cdot\frac{1}{2m} + 2\cdot\frac{4}{2m} + 2(m-1)\frac{9}{2m} \to 9 \quad \text{при} \quad m\to\infty.$$

Ответ: $\|A\| = 3$.

Пример 6.7. Вычислим норму линейного оператора A: $\mathbf{m} \mapsto L^2[0;1]$, действующего по правилу

$$Ax = y \iff y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n t^n}{n!}, \qquad t\in[0;1].$$

Решение. 1) Пусть $x\in\mathbf{m}$, $\|x\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = 1$. При каждом $t\in[0;1]$ имеем:

$$|y(t)| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n| t^n}{n!} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t - 1,$$

следовательно,

$$\|y\|^2 = \int\limits_0^1 y^2(t)\,dt \le \int\limits_0^1 (e^t-1)^2 dt = \frac{e^2-4e+5}{2}.$$

2) Равенство $\|Ax\|^2 = \frac{e^2-4e+5}{2}$ достигается на единичном векторе $x = (1,1,1,1,\ldots)$. Ответ: $\|A\| = \sqrt{\frac{e^2-4e+5}{2}}$.

7 Обратные операторы

Пусть линейный оператор A действует из нормированного пространства $(X, \|\cdot\|_X)$ в нормированное пространство $(Y, \|\cdot\|_Y)$. Если оператор A биективен, то обратным к нему называется оператор $A^{-1}: Y \mapsto X$, действующий по правилу:

$$A^{-1}y = x \iff Ax = y.$$

Отметим, что оператор, обратный к линейному, также является линейным. Таким образом, найти обратный оператор означает: решить уравнение $Ax = y$ относительно x при всех $y\in Y$. Если при некотором y уравнение не имеет решения или имеет более одного решения, то оператор не обратим.

Пример 7.1. Найдём обратный оператор для линейного оператора $A\colon C[0;2\pi] \mapsto C[0;2\pi]$, действующего по правилу

$$Ax = y \iff y(t) = 2x(t) + \sin t \cdot x\left(t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

(функции $x(t)$ и $y(t)$ считаются 2π-периодичными).

Решение. У нас одно линейное уравнение

$$2x(t) + \sin t \cdot x\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) = y(t) \tag{11}$$

с двумя неизвестными: $x(t)$ и $x\left(t + \frac{2\pi}{3}\right)$. Чтобы составить систему уравнений, в которой число уравнений равно числу неизвестных, нам придётся подставить в (11) $t + \frac{2\pi}{3}$ и $t - \frac{2\pi}{3}$ вместо t. Получится система трёх уравнений с тремя неизвестными:

$$\left\{\begin{array}{ccccl} 2x(t) & + & \sin t \cdot x\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) & = y(t) \\ 2x\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) & + & \sin\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) \cdot x\left(t - \frac{2\pi}{3}\right) & = y\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) \\ 2x\left(t - \frac{2\pi}{3}\right) & + & \sin\left(t - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot x(t) & = y\left(t - \frac{2\pi}{3}\right) \end{array}\right.$$

(отметим, что $x\left(t + \frac{4\pi}{3}\right) = x\left(t + 2\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = x\left(t - \frac{2\pi}{3}\right)$ с учётом 2π-периодичности $x(t)$). Матрица системы выглядит так (если занумеровать неизвестные в порядке: $x(t)$, $x\left(t + \frac{2\pi}{3}\right)$, $x\left(t - \frac{2\pi}{3}\right)$):

$$\begin{pmatrix} 2 & \sin t & 0 \\ 0 & 2 & \sin\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin\left(t - \frac{2\pi}{3}\right) & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Её определитель равен $\Delta = 8 + \sin t \cdot \sin\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(t - \frac{2\pi}{3}\right) > 0$ при всех t. Найдём первую неизвестную $x(t)$ по формуле Крамера: $x(t) = \Delta_1/\Delta$,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} y(t) & \sin t & 0 \\ y\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) & 2 & \sin\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) \\ y\left(t - \frac{2\pi}{3}\right) & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4y\,(t) + \sin t \cdot \sin\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) y\left(t - \frac{2\pi}{3}\right) - 2\sin t \cdot y\left(t + \frac{2\pi}{3}\right).$$

Ответ: оператор, обратный к оператору A, существует и действует по формуле: $A^{-1}y = x \iff$

$$x\,(t) = \frac{4y\,(t) + \sin t \cdot \sin\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) y\left(t - \frac{2\pi}{3}\right) - 2\sin t \cdot y\left(t + \frac{2\pi}{3}\right)}{8 + \sin t \cdot \sin\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(t - \frac{2\pi}{3}\right)}.$$

Полученная функция $x\,(t)$ непрерывна. Подставив её в оператор A, получим исходную функцию $y\,(t)$ (и в этом, и в трёх последующих примерах проверка предоставляется читателю).

Пример 7.2. Найдём обратный оператор для линейного оператора $A\colon C[0;1] \mapsto C[0;1]$, действующего по правилу

$$Ax = y \iff y\,(t) = x\,(0) + x\,(t) - \int\limits_0^1 st^2 x\,(s)\,ds.$$

Решение. Будем искать $x = A^{-1}y$. Мы имеем одно линейное уравнение

$$x\,(0) + x\,(t) - t^2 L = y\,(t) \tag{12}$$

с тремя неизвестными: $x\,(t)$, $x\,(0)$ и $L = \int_0^1 sx\,(s)\,ds$. Второе уравнение мы получим, подставив в (12) $t = 0$:

$$2x(0) = y(0) \implies x(0) = \frac{1}{2}y(0). \tag{13}$$

Третье уравнение мы получим, умножив обе части (12) на t и проинтегрировав от 0 до 1:

$$\int\limits_0^1 tdt \cdot x\,(0) + \int\limits_0^1 tx\,(t)\,dt - \int\limits_0^1 t \cdot t^2 dt \cdot L = \int\limits_0^1 ty\,(t)\,dt,$$

$$\text{т. е.} \qquad \frac{1}{2}x\,(0) + L - \frac{1}{4}L = \int\limits_0^1 ty\,(t)\,dt. \tag{14}$$

Подставим $x\,(0)$ из (13) в (14):

$$\frac{3}{4}L + \frac{1}{4}y\,(0) = \int\limits_0^1 ty\,(t)\,dt \quad\Longrightarrow\quad L = \frac{4}{3}\int\limits_0^1 ty\,(t)\,dt - \frac{1}{3}y\,(0)\,.$$

Теперь подставим $x\,(0)$ и L в уравнение (12):

$$\frac{1}{2}y\,(0) + x\,(t) - \frac{4t^2}{3}\int\limits_0^1 uy\,(u)\,du + \frac{t^2}{3}y\,(0) = y\,(t)\,,$$

и получим ответ:

$$x\,(t) = y\,(t) - \left(\frac{t^2}{3} + \frac{1}{2}\right)y\,(0) + \frac{4t^2}{3}\int\limits_0^1 uy\,(u)\,du.$$

При $t = 0$ эта формула даёт $x\,(0) = y\,(0)\,/2$, т. е. не противоречит (13). Очевидно, функция $x\,(t)$ непрерывна. Обратный оператор найден.

Пример 7.3. Найдём обратный оператор для линейного оператора $A\colon C^1[1;2] \mapsto C^1[1;2]$, действующего по правилу

$$Ax = y \iff y\,(t) = x\,(t) - 2\int\limits_1^t \frac{x\,(s)}{s}ds. \qquad (15)$$

(Напомним, что $C^1[a;b]$ – пространство функций, имеющих непрерывную производную на отрезке $[a;b]$; норма функции $x(t)$ в этом пространстве определяется так: $\|x\| = \max\limits_{[a;b]}|x\,(t)\,| + \max\limits_{[a;b]}|x'\,(t)\,|$).

Решение. Продифференцировав уравнение (15) по t, получим новое уравнение:

$$x'\,(t) - 2\frac{x\,(t)}{t} = y'\,(t)\,.$$

Это неоднородное линейное дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $x\,(t)$. Применим метод вариации постоянных. Решим однородное линейное дифференциальное уравнение:

$x'(t) - 2\frac{x(t)}{t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dx}{x} = 2\frac{dt}{t} \quad \Longrightarrow \quad x = Ct^2.$

Ищем общее решение $x(t)$ неоднородного уравнения в виде $x(t) = C(t)\,t^2$. Подставив $t = 1$ в уравнение (15), получим начальное условие $x(1) = y(1)$ для решения полученного дифференциального уравнения; таким образом, $C(1) = y(1)$.

$C'(t)\,t^2 + 2tC(t) - 2tC(t) = y'(t) \quad \Longrightarrow \quad C'(t) = \frac{y'(t)}{t^2} \quad \Longrightarrow$

$$C(t) = y(1) + \int\limits_1^t \frac{y'(s)}{s^2}ds = y(1) + \int\limits_1^t \frac{dy(s)}{s^2} =$$

интегрируем по частям

$$= y(1) + \left.\frac{y(s)}{s^2}\right|_1^t - \int\limits_1^t y(s)\,\frac{-2}{s^3}ds = y(1) + \frac{y(t)}{t^2} - y(1) + 2\int\limits_1^t \frac{y(s)}{s^3}ds.$$

Таким образом, $x = A^{-1}y \iff$

$$x(t) = t^2\left(y(1) + \frac{y(t)}{t^2} - y(1) + 2\int\limits_1^t \frac{y(s)}{s^3}ds\right) = y(t) + 2t^2\int\limits_1^t \frac{y(s)}{s^3}ds.$$

Пример 7.4. Найдём обратный оператор для линейного оператора $A\colon L^2[0;2\pi] \mapsto L^2[0;2\pi]$, действующего по правилу

$$Ax = y \iff y(t) = \pi x(t) + \int\limits_0^\pi x(s)\sin(s+t)\,ds$$

(функции $x(t)$ и $y(t)$ считаются 2π-периодичными).

Решение. Применив формулу синуса суммы, получим уравнение

$$\pi x(t) + \sin t \cdot \int\limits_0^\pi x(s)\cos s ds + \cos t \cdot \int\limits_0^\pi x(s)\sin s ds = y(t).$$

Введём обозначения: $A = \int\limits_0^\pi x(s)\cos s ds$, $B = \int\limits_0^\pi x(s)\sin s ds$. Тогда $\pi x(t) + A\sin t + B\cos t = y(t)$. Имеем одно линейное уравнение с тремя неизвестными: $x(t)$, A и B. Чтобы составить ещё два уравнения с теми же неизвестными, помножим обе части первого уравнения на $\cos t$ и на $\sin t$ и проинтегрируем от 0 до π:

$$\pi\int\limits_0^\pi x(t)\cos t dt + A\int\limits_0^\pi \cos t\sin t dt + B\int\limits_0^\pi \cos^2 t dt = \int\limits_0^\pi y(t)\cos t dt;$$

$$\pi\int\limits_0^\pi x(t)\sin t dt + A\int\limits_0^\pi \sin^2 t dt + B\int\limits_0^\pi \sin t\cos t dt = \int\limits_0^\pi y(t)\sin t dt;$$

т. е.

$$\pi A + \frac{\pi}{2}B = \int\limits_0^\pi y(t)\cos t dt; \qquad (16)$$

$$\pi B + \frac{\pi}{2}A = \int\limits_0^\pi y(t)\sin t dt; \qquad (17)$$

откуда получаем:

$$2\cdot(16)-(17) \iff A = \tfrac{2}{3\pi}\int\limits_0^\pi y(t)(2\cos t - \sin t)\,dt,$$

$$2\cdot(17)-(16) \iff B = \tfrac{2}{3\pi}\int\limits_0^\pi y(t)(2\sin t - \cos t)\,dt.$$

Теперь, зная A и B, выражаем $x(t)$:

$$x(t) = \frac{1}{\pi}(y(t) - A\sin t - B\cos t) =$$

$$= \frac{y(t)}{\pi} - \frac{2}{3\pi^2}\int\limits_0^\pi y(u)(2\sin t\cos u - \sin t\sin u + 2\cos t\sin u - \cos t\cos u)du =$$

$$= \frac{y(t)}{\pi} + \frac{2}{3\pi^2}\int\limits_0^\pi y(u)(\cos(t-u) - 2\sin(t+u))du.$$

Читатель может самостоятельно проверить, что найденная функция $x(t)$ принадлежит классу $L^2[0;2\pi]$ и удовлетворяет уравнению $Ax = y$.

8 Спектр линейного оператора. Нахождение собственных значений и собственных векторов

Пусть линейный ограниченный оператор A действует из банахова пространства $(X, \|\cdot\|_X)$ в то же самое пространство. Если для некоторого числа λ оператор $A-\lambda I$ имеет обратный $(A-\lambda I)^{-1} = R_\lambda(A)$, определённый на всём пространстве X, то число λ называют *регулярным значением* оператора A, а оператор $R_\lambda(A)$ – *резольвентным оператором* или *резольвентой*. Отметим, что, согласно теореме Банаха об обратном операторе, оператор $R_\lambda(A)$ также является ограниченным. Множество всех значений λ, не являющихся регулярными, называют *спектром* оператора A.

Будем искать спектр оператора A, т. е. изучать следующую проблему: при каких $\lambda \in \mathbb{R}$ оператор $A-\lambda I$ необратим? Возможны две причины необратимости оператора: отсутствие инъективности и отсутствие сюръективности.

1) Пусть $A-\lambda I$ не инъективен, т. е. существуют два различных вектора $x_1, x_2 \in X$, такие, что $(A-\lambda I)\,x_1 = (A-\lambda I)\,x_2$. Возьмём их разность $x = x_1 - x_2$. Получаем:

$$x \neq 0, \qquad (A-\lambda I)\,x = 0, \quad \text{т. е.} \quad Ax = \lambda x.$$

Таким образом, λ является *собственным значением* оператора A, а вектор x – один из собственных векторов, отвечающих собственному значению λ.

2) Пусть $A-\lambda I$ инъективен, но не сюръективен. Собственных векторов для λ не будет. Но нарушение сюръективности означает, что существует вектор $y \in X$, для которого невозможно найти $x \in X$, чтобы выполнялось $(A-\lambda I)\,x = y$. Другими словами, образ оператора $A-\lambda I$ не совпадает со всем пространством X. Если замыкание образа оператора $A-\lambda I$ плотно в X, будем говорить, что λ принадлежит *непрерывному спектру* A, в противном случае – *остаточному спектру* A.

Для изучения спектра A применяется следующий алгоритм:

1) Решаем уравнение $(A-\lambda I)\,x = 0$ при всех λ. Если при некотором λ найдутся ненулевые решения, то λ – собственное значение

оператора A, а найденные ненулевые решения – собственные векторы, отвечающие собственному значению λ.

2) При каждом λ, не являющемся собственным значением A, решаем уравнение $(A - \lambda I)\, x = y$ при всех $y \in X$. Если решение существует при всех $y \in X$, то тем самым мы получим обратный оператор $(A - \lambda I)^{-1}$. Если же при некоторых $y \in X$ решения нет, то λ – точка непрерывного или остаточного спектра.

Пример 8.1. Найдём спектр линейного оператора A: $C[0;1] \mapsto C[0;1]$, действующего по правилу

$$Ax = y \iff y\,(t) = tx\,(t) + 2x\,(0)\,.$$

Для собственных значений найдём собственные векторы.

Решение. 1) Решаем уравнение $(A - \lambda I)\, x = 0$:

$$(t - \lambda)\, x\,(t) + 2x\,(0) = 0.$$

Чтобы найти $x\,(0)$, подставим $t = 0$: $-\lambda x\,(0) + 2x\,(0) = 0$. Если $\lambda = 2$, то $x\,(0)$ может принимать любое значение, и тогда $x\,(t) = \frac{2x(0)}{2-t}$ – собственный вектор для $\lambda = 2$. Если $\lambda \neq 2$, то $x\,(0) = 0$, и тогда $x\,(t) = 0$, т. е. уравнение $(A - \lambda I)\, x = 0$ имеет только нулевое решение, и $\lambda \neq 2$ не является собственным значением.

2) Решаем уравнение $(A - \lambda I)\, x = y$ при $\lambda \neq 2$:

$$(t - \lambda)\, x\,(t) + 2x\,(0) = y\,(t)\,. \tag{18}$$

Подставим $t = 0$:

$$-\lambda x\,(0) + 2x\,(0) = y\,(0) \quad \Longrightarrow \quad x\,(0) = \frac{y\,(0)}{2 - \lambda}. \tag{19}$$

Теперь подставим $x\,(0)$ в уравнение (18):

$$(t - \lambda)\, x\,(t) + \frac{2y\,(0)}{2 - \lambda} = y\,(t) \quad \Longrightarrow \quad x\,(t) = \frac{(2 - \lambda)\, y\,(t) - 2y\,(0)}{(2 - \lambda)\,(t - \lambda)}. \tag{20}$$

При $\lambda \notin [0;1]$, $\lambda \neq 2$, такая функция будет непрерывной (нетрудно проверить, что значение $x\,(0)$ по формулам (19) и (20) получится одинаковым), и оператор $A - \lambda I$ обратим.

При $\lambda = 0$ образ оператора $A - \lambda I = A$ состоит из функций $y\,(t)$, дифференцируемых в точке 0, таких, что $y'\,(0) = y\,(0)\,/2$, поскольку в этом и только в этом случае найденная по формуле (20) функция $x\,(t) = \frac{2y(t)-2y(0)}{2t}$ будет непрерывна в нуле. Такие функции плотны в $C[0;1]$, поэтому $\lambda = 0$ – точка непрерывного спектра оператора A.

Пусть $\lambda \in (0;1]$. Тогда, если непрерывная на отрезке $[0;1]$ функция является решением уравнения (18), то при $t = \lambda$ получаем, что $y\,(\lambda) = 2x(0)$, или, с учётом (19), $y\,(\lambda) = \frac{2y(0)}{2-\lambda}$. Следовательно, образ оператора $A - \lambda I$ является подмножеством множества

$$Y = \{y \in C[0;1] : (2-\lambda)\,y\,(\lambda) - 2y\,(0) = 0\}.$$

Множество Y является ядром непрерывного линейного функционала $f\,(y) = (2-\lambda)\,y\,(\lambda) - 2y\,(0)$, следовательно, $\overline{Y} = Y$, но поскольку $f \neq 0$, то $Y \neq C[0;1]$, и $\lambda \in (0;1]$ – точки остаточного спектра.

Ответ: спектр $[0;1] \cup \{2\}$;
собственное значение 2 с собственными векторами $x\,(t) = \frac{C}{2-t}$, $C \in \mathbb{R}$;
$\{0\}$ – непрерывный спектр; $(0;1]$ – остаточный спектр.

Пример 8.2. Найдём спектр линейного оператора A: $C[-2;2] \mapsto C[-2;2]$, действующего по правилу

$$Ax = y \iff y\,(t) = 3x\,(-t) - x\,(0)\,.$$

Для собственных значений найдём собственные векторы.

Решение. 1) Уравнение $(A - \lambda I)\,x = 0$ имеет вид $3x\,(-t) - x\,(0) - \lambda x\,(t) = 0$. Это линейное уравнение с тремя неизвестными $x\,(t)$, $x\,(0)$, $x\,(-t)$. Подставив вместо t сначала 0, а затем $-t$, мы получим систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} -\lambda x\,(t) & -x\,(0) & +3x\,(-t) & = 0 \\ & (2-\lambda)\,x\,(0) & & = 0 \\ 3x\,(t) & -x\,(0) & -\lambda x\,(-t) & = 0 \end{cases}$$

Чтобы она имела ненулевое решение, определитель её матрицы должен обратиться в нуль:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 3 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left(\lambda^2 - 9\right) = 0 \implies \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -3.$$

Если $\lambda = 2$, то $x(0)$ может принимать любое значение C. Тогда:

$$\begin{cases} -2x(t) & -C & +3x(-t) & = 0 \\ 3x(t) & -C & -2x(-t) & = 0 \end{cases} \iff x(t) = x(-t) = C,$$

т. е. собственными векторами для $\lambda = 2$ являются константы.
При $\lambda = \pm 3$ мы получаем $x(0) = 0$. Кроме того,

при $\lambda = 3$ $\begin{cases} -3x(t) & +3x(-t) & = 0 \\ 3x(t) & -3x(-t) & = 0 \end{cases} \iff x -$ чётная функция;

при $\lambda = -3$ $\begin{cases} 3x(t) & +3x(-t) & = 0 \\ 3x(t) & +3x(-t) & = 0 \end{cases} \iff x-$нечётная функция.

2) Пусть $\lambda \neq 2$, $\lambda \neq \pm 3$. Тогда $(A - \lambda I)x = y \iff 3x(-t) - x(0) - \lambda x(t) = y(t)$. Подставив вместо t сначала 0, затем $-t$, мы получим систему трёх уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} -\lambda x(t) & -x(0) & +3x(-t) & = y(t) \\ & (2-\lambda)x(0) & & = y(0) \\ 3x(t) & -x(0) & -\lambda x(-t) & = y(-t) \end{cases}$$

Найдём $x(t)$ по формуле Крамера. $\Delta = (2 - \lambda)\left(\lambda^2 - 9\right) \neq 0$;

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} y(t) & -1 & 3 \\ y(0) & 2-\lambda & 0 \\ y(-t) & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)y(t) - (\lambda+3)y(0) + 3(\lambda-2)y(-t);$$

$$x(t) = \frac{\lambda(\lambda-2)y(t) - (\lambda+3)y(0) + 3(\lambda-2)y(-t)}{(2-\lambda)(\lambda^2-9)}.$$

Это непрерывная функция. Если подставить $t = 0$, получим

$$x(0) = \frac{\lambda(\lambda-2) - (\lambda+3) + 3(\lambda-2)}{(2-\lambda)(\lambda^2-9)}y(0) = \frac{(\lambda^2-9)\,y(0)}{(2-\lambda)(\lambda^2-9)} = \frac{y(0)}{2-\lambda},$$

что согласуется со вторым уравнением системы. Таким образом, при всех λ, кроме 2 и ± 3, оператор $A - \lambda I$ обратим.

Ответ: спектр $\{2; 3; -3\}$;
при собственном значении 2 собственные векторы – константы;
при собственном значении 3 собственные векторы – чётные функции,

равные 0 при $t = 0$;
при собственном значении -3 собственные векторы – нечётные функции.

Пример 8.3. Найдём спектр линейного оператора A: $L^2[-\pi, \pi] \mapsto L^2[-\pi, \pi]$, действующего по правилу

$$Ax = y \iff y(t) = x(4t)$$

(функции $x(t)$ и $y(t)$ считаются 2π-периодичными). Для собственных значений найдём собственные векторы.

Разложим $x(t)$ в тригонометрический ряд Фурье:

$$x\left(t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nt + b_n \sin nt\right) \tag{21}$$

(сходимость ряда понимается в среднем квадратичном).

1) Найдём собственные значения и собственные векторы оператора A. Для этого решим уравнение

$$\left(A - \lambda I\right) x = 0 \iff x\left(4t\right) = \lambda x\left(t\right).$$

Если $\lambda = 0$, то $x\left(4t\right) = 0 \Longrightarrow x\left(t\right) = 0$, и $\lambda = 0$ не является собственным значением.
Если $\lambda \neq 0$, то, используя разложение $x(t)$ в ряд Фурье, имеем

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos 4mt + b_m \sin 4mt\right) = \frac{\lambda a_0}{2} + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nt + b_n \sin nt\right). \tag{22}$$

Поскольку левая и правая части равенства (22) представляют разложения одного и того же элемента из $L^2[-\pi, \pi]$ по тригонометрической системе, которая является базисом в $L^2[-\pi, \pi]$, то коэффициенты при одинаковых функциях слева и справа должны быть равны. Следовательно, $a_0 = \lambda a_0$, или $(1 - \lambda) a_0 = 0$. Таким образом, при $\lambda = 1$ коэффициент a_0 может принимать любые значения, а при

$\lambda \neq 1$ возможно только $a_0 = 0$. Приравниваем коэффициенты при $\cos nt$ и $\sin nt$, $n \geq 1$. Если n не делится на 4, то в разложении (22) слева отсутствуют функции $\cos nt$ и $\sin nt$, следовательно, $\lambda a_n = \lambda b_n = 0 \Longrightarrow a_n = b_n = 0$ при любом $\lambda \neq 0$. Если же $n = 4m$, $m \in \mathbb{N}$, то имеем следующие соотношения для коэффициентов: $a_m = \lambda a_{4m}$, $b_m = \lambda b_{4m}$, $m \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$a_4 = \frac{a_1}{\lambda} = 0,\ b_4 = \frac{b_1}{\lambda} = 0,\ a_8 = \frac{a_2}{\lambda} = 0,\ b_8 = \frac{b_2}{\lambda} = 0, \text{ и т. д.}$$

Таким образом, получаем, что при $\lambda = 1$ коэффициент a_0 может принимать любое значение, $a_n = b_n = 0$ при $n \in \mathbb{N}$, т. е. $x(t) = a_0/2$, $a_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ — собственный вектор, отвечаюший собственному значению $\lambda = 1$. Если $\lambda \neq 1$, то все коэффициенты равны 0, значит $x(t) = 0$, и $\lambda \neq 1$ не является собственным значением.

2) Найдём регулярные значения оператора A. Сразу отметим, что для всякой функции из $L^2[-\pi;\pi]$ имеем равенство $\|Ax\| = \|x\|$, следовательно, $\|A\| = 1$, и любое λ, для которого $|\lambda| > \|A\| = 1$, является регулярным значением (см. [1], теорема 4.19). Покажем, что весь отрезок $[-1;1]$ является спектром оператора A. Решаем уравнение $(A - \lambda I)\,x = y$ при $\lambda \in [-1;1)$. Разложим y в ряд Фурье:

$$y(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n \cos nt + s_n \sin nt\right). \tag{23}$$

Тогда наше уравнение с учётом (21) и (23) даст следующие соотношения для коэффициентов Фурье функций x и y:

а) $a_0 - \lambda a_0 = c_0$;

б) $-\lambda a_n = c_n$, $-\lambda b_n = s_n$, если n не делится на 4;

в) $a_n - \lambda a_{4n} = c_{4n}$, $b_n - \lambda b_{4n} = s_{4n}$, $n \in \mathbb{N}$.

В частности, при $y(t) = \cos t$ ($c_1 = 1$, $c_k = 0$ при $k = 0, 2, 3, 4, \ldots$, $s_k = 0$ при $k = 1, 2, 3, 4, \ldots$) получим: $a_0 = 0$; $-\lambda a_1 = 1$; для остальных коэффициентов: $\lambda a_n = \lambda b_n = 0$, если n не делится на 4, и $a_n - \lambda a_{4n} = b_n - \lambda b_{4n} = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Ясно, что при $\lambda = 0$ уравнение решений не имеет. Если $\lambda \neq 0$, то $a_1 = -1/\lambda$, $a_4 = -1/\lambda^2$, $a_{16} = -1/\lambda^3$,…, $a_{4^k} = -1/\lambda^{k+1}$, таким образом, a_n не стремятся к 0 при $n \to \infty$ для $\lambda \in [-1;0) \cup (0;1)$, и уравнение $(A - \lambda I)x = \cos t$ и в этом случае не имеет решений. Итак, спектр оператора A есть отрезок $[-1;1]$.

3) Докажем, что $\lambda \in (-1;1)$ являются точками остаточного спектра. Для этого покажем, что образ Y оператора $A-\lambda I$ (меньший, чем всё пространство) является замкнутым множеством ($\overline{Y}=Y$).

Пусть $y \in \overline{Y}$, т. е. существует последовательность $\{y_n\} \subset Y$, которая сходится к y. Тогда существует последовательность $\{x_n\} \subset L^2[-\pi;\pi]$, такая, что $y_n = Ax_n - \lambda x_n$, и $\lim\limits_{n\to\infty}(Ax_n - \lambda x_n) = y$. Докажем, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится. Для любых m и n, согласно обратному неравенству треугольника для нормы, имеем:

$$\|(Ax_m - \lambda x_m) - (Ax_n - \lambda x_n)\| \geq \\ \|A(x_m - x_n)\| - |\lambda| \cdot \|x_m - x_n\| = (1-|\lambda|)\|x_m - x_n\|.$$

Отсюда из фундаментальности последовательности $\{Ax_n - \lambda x_n\}$ следует фундаментальность последовательности $\{x_n\}$. Так как $L^2[-\pi;\pi]$ — полное пространство, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in L^2[-\pi;\pi]$. Поскольку оператор A ограничен, получаем

$$y = \lim_{n\to\infty}(Ax_n - \lambda x_n) = \lim_{n\to\infty} Ax_n - \lambda \lim_{n\to\infty} x_n = Ax - \lambda x \in Y.$$

4) Покажем, что $\lambda = -1$ является точкой непрерывного спектра, т. е. образ Y оператора $A+I$ всюду плотен в $L^2[-\pi;\pi]$, т. е. $\overline{Y} = L^2[-\pi;\pi]$. Для этого достаточно показать, что единственным элементом $y \in L^2[-\pi;\pi]$, ортогональным Y, является 0 (см. [2], теорема 6.7). Пусть для некоторого y равенство

$$(Ax + x, y) = 0$$

справедливо при всех x. Воспользовавшись разложением (23), выпишем наше равенство, взяв в качестве x последовательно все функции ортогональной тригонометрической системы:

$$\pi c_0 + \pi c_0 = 0; \;\; \pi c_{4n} + \pi c_n = 0, \; \pi s_{4n} + \pi s_n = 0, \; n \in \mathbb{N}. \qquad (24)$$

Таким образом, $c_0 = 0$, а также

$$|c_n| = |c_{4n}| = |c_{4^2 n}| = \ldots, \; |s_n| = |s_{4n}| = |s_{4^2 n}| = \ldots,$$

где n не делится на 4. Так как последовательности $\{c_n\}$ и $\{s_n\}$ коэффициентов Фурье должны сходиться к 0, то из соотношений (24) следует, что все коэффициенты Фурье равны 0. Таким образом, $y = 0$.

Ответ: спектр $[-1; 1]$;
$\lambda = 1$ – собственное значение (собственные векторы – константы);
$|\lambda| < 1$ – точки остаточного спектра;
$\lambda = -1$ – точка непрерывного спектра.

Пример 8.4. Найдём спектр линейного оператора A: $L^2[-\pi; \pi] \mapsto L^2[-\pi; \pi]$, действующего по правилу

$$Ax = y \iff y(t) = \int\limits_0^{2\pi} x(t-s)\sin(2s)\,ds$$

(функции $x(t)$ и $y(t)$ считаются 2π-периодичными).
Для собственных значений найдём собственные векторы.

Решение. Сделав замену переменной $u = t - s$ и пользуясь 2π-периодичностью, выразим Ax таким образом:

$$\int\limits_0^{2\pi} x(t-s)\sin(2s)\,ds = \int\limits_0^{2\pi} x(u)\sin(2t-2u)\,du =$$
$$= \sin(2t)\int\limits_0^{2\pi} x(u)\cos(2u)\,du - \cos(2t)\int\limits_0^{2\pi} x(u)\sin(2u)\,du =$$
$$= \sin(2t)\cdot C - \cos(2t)\cdot S. \quad (25)$$

1) Пусть $(A - \lambda I)\,x = 0$.
Первый случай: $\lambda = 0$. Тогда $C = S = 0$, т. е. вектор x ортогонален $\cos(2t)$ и $\sin(2t)$. Все такие x будут собственными векторами для $\lambda = 0$.
Второй случай: $\lambda \neq 0$. Тогда $x(t) = \frac{1}{\lambda}\left(C\sin(2t) - S\cos(2t)\right)$.

Подставим такую функцию x в формулы для C и S:

$$C = \frac{1}{\lambda} \int\limits_0^{2\pi} \left(C \sin\left(2u\right) - S \cos\left(2u\right) \right) \cos\left(2u\right) du = -\frac{\pi S}{\lambda};$$

$$S = \frac{1}{\lambda} \int\limits_0^{2\pi} \left(C \sin\left(2u\right) - S \cos\left(2u\right) \right) \sin\left(2u\right) du = \frac{\pi C}{\lambda}.$$

Получаем: $C = -\frac{\pi S}{\lambda} = -\frac{\pi^2 C}{\lambda^2} \Longrightarrow C = S = 0$, т. е. для $\lambda \neq 0$ нет собственного вектора.

2) Решаем уравнение $(A - \lambda I)\, x = y$ при $\lambda \neq 0$. Оно имеет вид

$$C \sin\left(2t\right) - S \cos\left(2t\right) - \lambda x\left(t\right) = y\left(t\right). \tag{26}$$

Проинтегрируем это равенство, помноженное на $\cos\left(2t\right)$ и на $\sin\left(2t\right)$:

$$C \int\limits_0^{2\pi} \sin\left(2t\right) \cos\left(2t\right) dt - S \int\limits_0^{2\pi} \cos^2\left(2t\right) dt - \lambda \int\limits_0^{2\pi} x\left(t\right) \cos\left(2t\right) dt =$$

$$= -\pi S - \lambda C = \int\limits_0^{2\pi} y\left(t\right) \cos\left(2t\right) dt; \tag{27}$$

$$C \int\limits_0^{2\pi} \sin^2\left(2t\right) dt - S \int\limits_0^{2\pi} \cos\left(2t\right) \sin\left(2t\right) dt - \lambda \int\limits_0^{2\pi} x\left(t\right) \sin\left(2t\right) dt =$$

$$= \pi C - \lambda S = \int\limits_0^{2\pi} y\left(t\right) \sin\left(2t\right) dt. \tag{28}$$

Поскольку $\begin{vmatrix} -\lambda & -\pi \\ \pi & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \pi^2 \neq 0$, при любом y из уравнений (27) и (28) можно найти C и S, а затем из (26) выразить

$$x\left(t\right) = \frac{1}{\lambda} \left(C \sin\left(2t\right) - S \cos\left(2t\right) - y\left(t\right) \right).$$

Таким образом, при всех $\lambda \neq 0$ оператор $A - \lambda I$ обратим.

Ответ: спектр $\{0\}$, 0 – собственное значение, собственные векторы – все ненулевые векторы из $\langle \cos(2t), \sin(2t) \rangle^{\perp}$.

Пример 8.5. Найдём спектр линейного оператора A: $C^1[0;1] \mapsto C^1[0;1]$, действующего по правилу

$$Ax = y \iff y(t) = 3x(0) - \int\limits_0^t x(s)\, ds.$$

Для собственных значений найдём собственные векторы.

Решение. 1) Решаем уравнение

$$3x(0) - \int\limits_0^t x(s)\, ds = \lambda x(t). \tag{29}$$

Дифференцируя равенство (29) по t, получаем:

$$-x(t) = \lambda x'(t) \quad \Longrightarrow \quad x(t) = x(0)\, e^{-t/\lambda}.$$

Если $\lambda = 0$, то $x(t) = 0$, и $\lambda = 0$ не является собственным значением.

Пусть $\lambda \neq 0$. При $t = 0$ (29) даёт $3x(0) = \lambda x(0)$. Если $\lambda = 3$, то $x(0)$ может принимать любое значение C, и функция $x(t) = Ce^{-t/3}$ будет собственным вектором для $\lambda = 3$. Если же $\lambda \neq 3$, $\lambda \neq 0$, то $x(0) = 0$, и собственного вектора не будет.

2) Решаем при $\lambda \neq 3$ уравнение

$$3x(0) - \int\limits_0^t x(s)\, ds - \lambda x(t) = y(t). \tag{30}$$

При $\lambda = 0$, продифференцировав равенство (30) по t, получаем $-x(t) = y'(t)$. Подставляя $t = 0$ в (30), имеем $3x(0) = y(0)$, т. е. $-3y'(0) = y(0)$. Следовательно, образ оператора $A - 0I = A$ состоит из функций $y \in C^1[0;1]$ со свойством $3y'(0) + y(0) = 0$. Множество

$$Y = \{y \in C^1[0;1] : 3y'(0) + y(0) = 0\}$$

не является всюду плотным в $C^1[0;1]$, поскольку является ядром ненулевого непрерывного линейного функционала $f(y) = 3y'(0) + y(0)$.

Пусть $\lambda \neq 0$. Подставляем $t = 0$ в равенство (30) и получаем $(3-\lambda)\,x(0) = y(0)$. Продифференцируем равенство (30) по t и решим задачу Коши:

$$-x(t) - \lambda x'(t) = y'(t)\,; \qquad x(0) = \frac{y(0)}{3-\lambda}.$$

Используя метод вариации постоянных, будем искать общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения в виде $x(t) = C(t)\,e^{-t/\lambda}$, тогда уравнение примет вид
$-C(t)\,e^{-t/\lambda} - \lambda C'(t)\,e^{-t/\lambda} + C(t)\,e^{-t/\lambda} = y'(t) \Longrightarrow C'(t) = -\frac{1}{\lambda}y'(t)\,e^{t/\lambda}$.
Начальное условие даст нам $C(0) = x(0) = \frac{y(0)}{3-\lambda}$. Итак, решение задачи Коши $x(t) = e^{-t/\lambda}\left(\frac{y(0)}{3-\lambda} - \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^t e^{s/\lambda}dy(s)\right) =$
$= e^{-t/\lambda}\left(\frac{y(0)}{3-\lambda} - \frac{1}{\lambda}\left(e^{t/\lambda}y(t) - y(0)\right) + \frac{1}{\lambda^2}\int\limits_0^t y(s)\,e^{s/\lambda}ds\right)$.
Таким образом, при всех $\lambda \notin \{0;3\}$ оператор $A - \lambda I$ обратим.

Ответ: спектр $\{0;3\}$; $\lambda = 0$ – остаточный спектр, $\lambda = 3$ – собственное значение с собственными векторами $x(t) = Ce^{-t/3}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Е.А.Власова, В.С.Зарубин, Г.Н.Кувыркин, Приближенные методы математической физики, М., Издательство МГТУ, 2001.

2. Е.А.Власова, Ряды, М., Издательство МГТУ, 2000.

3. В.С.Зарубин, Е.Е.Иванова, Г.Н.Кувыркин, Интегральное исчисление функций одного переменного, М., Издательство МГТУ, 1999.

4. Л.В.Канторович, Г.П.Акилов, Функциональный анализ, М., "Наука", 1984.

5. А.А.Кириллов, А.Д.Гвишиани, Теоремы и задачи функционального анализа, М., "Наука", 1979.

6. А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, М., "Наука", 1989.

7. В.А.Треногин, Функциональный анализ, М., "Наука", 1993.

ОГЛАВЛЕНИЕ