Лекция № 1.
Неопределенный интеграл

Определение 1.1. Функция $F(x)$ называется **первообразной** или **неопределенным интегралом** функции $f(x)$ на промежутке $I \subset \mathbb{R}$, если $\forall\ x \in I\ F'(x) = f(x)$, и обозначается
$$F(x) = \int f(x)dx.$$

Если F и G — две первообразные f на I, то $F - G = \text{const}$ на I. Действительно, если $(F-G)' \equiv 0$ на I, то по теореме Лагранжа при $a < b$, a, $b \in I$, имеем
$$(F-G)(b) - (F-G)(a) = (b-a)(F-G)'(c) = 0,$$
где $a < c < b$.

Свойства неопределенных интегралов

Линейность.
$$\int af(x) + bg(x)dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx.$$

Формула интегрирования по частям. Если f и g дифференцируемы на I, то
$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx.$$

Доказательство. Продифференцируем левую и правую части, получается
$f(x)g'(x)dx = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - g(x)f'(x)$. □

Формулу интегрирования по частям можно переписать так:
$$\int f(x)dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)df(x).$$

Замена переменного (следствие формулы дифференцирования сложной функции). Пусть $\varphi(x)$ дифференцируема на I. Тогда
$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(y)dy\Big|_{y=\varphi(x)}.$$

Доказательство. Если продифференцировать левую и правую части этой формулы, получится $f(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$. □

Метод подстановки. Пусть $x = \xi(u)$, ξ' сохраняет знак на J. Тогда функция ξ биективно отображает промежуток J в промежуток I, и первообразная $f(x)$ на I может быть вычислена по формуле
$$\int f(x)dx = \int f(\xi(u))\xi'(u)du.$$

Следующие интегралы элементарных функций следует проверить дифференцированием и выучить наизусть:

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1; \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x, \quad a > 0,\ a \neq 1;$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C; \qquad \int \sin x\, dx = C - \cos x;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C; \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = C - \operatorname{ctg} x;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad a > 0;$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad a > 0;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + b}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + b}\right| + C, \quad b \neq 0.$$

Интегралы сложных функций вычисляются с помощью свойств, перечисленных выше. Но успех не гарантирован!

Определение 1.2. Неберущимися интегралами называют первообразные элементарных функций, не являющиеся элементарными функциями.

Если интеграл сводится к неберущемуся, значит, он тоже неберущийся. Полезно знать наиболее известные примеры неберущихся интегралов, чтобы не потратить время на безуспешные попытки их выразить:

$$\int e^{\pm x^2} dx; \quad \int \frac{\sin x}{x} dx; \quad \int \frac{e^x}{x} dx; \quad \int \frac{\ln(1+x)}{x} dx;$$

$$\int \sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}\, dx, \quad \int \sqrt{\frac{1 + ax^2}{1 + bx^2}}\, dx, \quad \begin{array}{l} a \neq 0, \\ b \neq 0, \\ a \neq b. \end{array}$$

Рассмотрим примеры интегрирования при помощи замены переменного.

Пример 1.1.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x+2}} dx = \quad [\text{замена} \ \ y = 3x + 5 \Longrightarrow dy = 3dx]$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{y}}{1/2} + C = \frac{2}{3} \sqrt{3x+5} + C.$$

Пример 1.2.

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{5 - \cos^2 x}} dx = \int \frac{\cos x\ dx}{\sqrt{4 + \sin^2 x}} dx = \int \frac{dy}{\sqrt{4 + y^2}} =$$

$$[\text{замена: } y = \sin x \Longrightarrow dy = \cos x\, dx]$$

$$= \ln\left|y + \sqrt{4+y^2}\right| + C = \ln\left|\sin x + \sqrt{4+\sin^2 x}\right| + C.$$

Пример 1.3.

$$\int \frac{x\,dx}{x^4+6x^2+90} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{(x^2+3)^2+81} = \qquad \left[\begin{array}{c}\text{замена}\\ y = x^2+3\end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y^2+81} = \frac{1}{18}\operatorname{arctg}\frac{y}{9} + C = \frac{1}{18}\operatorname{arctg}\frac{x^2+3}{9} + C.$$

Теперь рассмотрим примеры интегрирования по частям.

Пример 1.4.
Пусть $n \neq -1$.

$$\int x^n \ln x\,dx = \frac{1}{n+1}\int \ln x\, d(x^{n+1}) =$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\ln x - \int x^{n+1}\frac{dx}{x}\right) = \frac{x^{n+1}\ln x}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C.$$

Пример 1.5.
В этом примере нужно 2 раза интегрировать по частям.

$$\int (x^2+x)e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int (x^2+x)de^{2x} =$$

$$= \frac{1}{2}\Big((x^2+x)e^{2x} - \int e^{2x}(2x+1)dx\Big) =$$

$$= \frac{e^{2x}}{2}(x^2+x) - \frac{1}{4}\int (2x+1)de^{2x} =$$

$$= \frac{e^{2x}}{2}(x^2+x) - \frac{1}{4}\Big((2x+1)e^{2x} - \int e^{2x}2dx\Big) =$$

$$= \frac{e^{2x}}{4}\Big(2(x^2+x) - (2x+1) + 1\Big) + C =$$

$$= \frac{x^2e^{2x}}{2} + C.$$

Пример 1.6. В этом примере тоже придется интегрировать по частям два раза, но здесь первообразная выразится сама через себя:

$$
\begin{aligned}
F(x) = \int e^x \sin 2x \; dx = \int \sin 2x \, d(e^x) = \\
= e^x \sin 2x - \int e^x \, d \sin 2x = e^x \sin 2x - 2 \int e^x \cos 2x dx = \\
= e^x \sin 2x - 2 \int \cos 2x \, d(e^x) = \\
= e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x + 2 \int e^x \, d(\cos 2x) = \\
= e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x - 4 \int e^x \sin 2x dx = \\
= e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x - 4F(x) + C,
\end{aligned}
$$

откуда получаем, перенеся $4F(x)$ в левую часть,

$$
F(x) = \frac{1}{5}\big(e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x\big) + C_1.
$$

Задачи по теме лекции 1

Вычислить неопределенные интегралы, выбрав замену переменного:

1.1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5x+1}} dx.$ **1.2.** $\displaystyle\int (x+2)^7 x \, dx.$

1.3. $\displaystyle\int x e^{-x^2/2} dx.$ **1.4.** $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}.$

1.5. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}^3 x \, dx}{\cos^2 x}.$ **1.6.** $\displaystyle\int \frac{x - \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx.$

1.7. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2 \ln x + 1}}{x} dx.$

В данных задачах применить интегрирование по частям:

1.8. $\displaystyle\int \arcsin x \, dx.$ **1.9.** $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x \, dx.$

1.10. $\displaystyle\int x^2 \sin 2x \, dx.$ **1.11.** $\displaystyle\int x^3 e^x dx.$ **1.12.** $\displaystyle\int \frac{\ln \sin x}{\cos^2 x} dx.$

Лекция № 2.
Интегрирование рациональных функций

Определение 2.1. **Рациональной функцией** называется функция вида $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где P и Q — многочлены. Данная функция называется **правильной дробью**, если степень P ниже степени Q.

Лемма 2.1. *Если рациональная функция P/Q — неправильная дробь, то существует единственное разложение*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

где S — многочлен, R/Q — правильная дробь.

Лемма доказывается алгоритмом деления многочленов в столбик. Интегрировать многочлены легко, поэтому сосредоточимся на правильных дробях.

Определение 2.2. Рациональная функция называется **простейшей дробью**, если имеет вид

$$\text{а)}\quad \frac{A}{(x-x_o)^k} \quad \text{или} \quad \text{б)}\quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}, \tag{1}$$

где константы $A, B, C, x_o, p, q \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, и $p^2 - 4q < 0$.

Далее без ограничения общности будем считать, что у многочлена Q старший коэффициент равен 1. Из основной теоремы алгебры следует, что многочлен $Q(x)$ раскладывается на множители

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{m}(x-x_i)^{k_i} \prod_{j=1}^{r}(x^2+p_jx+q_j)^{l_j},$$

где $x_1, \ldots, x_m$ — действительные корни, k_j — кратность x_j; $p_j^2 - 4q_j < 0$, и l_j — кратность комплексных корней

$$\frac{1}{2}\left(-p_j \pm \sqrt{p_j^2 - 4q_j}\right).$$

Теорема 2.1. *Если $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ — правильная дробь, то существует единственное разложение*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{k_i}\frac{A_{ik}}{(x-x_i)^k} + \sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{l_j}\frac{B_{jl}x+C_{jl}}{(x^2+p_jx+q_j)^l}. \tag{2}$$

В этой формуле количество неопределенных коэффициентов A_{ik}, B_{jl}, C_{jl} составляет

$$\sum_{i=1}^{m} k_i + 2\sum_{j=1}^{r} l_j = \deg Q.$$

Чтобы их вычислить, нужно привести к общему знаменателю правую часть (2) и приравнять коэффициенты при степенях x от $\deg Q - 1$ до нулевой. Число уравнений равно числу неизвестных.

Пример 2.1.

$$\frac{3x+5}{(x-1)(x+3)} = \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(x+3)} = \\ = \frac{A_1(x+3) + A_2(x-1)}{(x-1)(x+3)} \Longrightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 = 3 \\ 3A_1 - A_2 = 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A_1 = 2 \\ A_2 = 1. \end{cases}$$

Пример 2.2.

$$\frac{3x^2+2x+1}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A_1}{(x+1)} + \frac{A_{21}}{(x-1)} + \frac{A_{22}}{(x-1)^2} = \\ = \frac{A_1(x^2-2x+1) + A_{21}(x^2-1) + A_{22}(x+1)}{(x+1)(x-1)^2},$$

$$\text{откуда} \quad \begin{cases} A_1 + A_{21} & = 3 \\ -2A_1 + A_{22} & = 2 \\ A_1 - A_{21} + A_{22} & = 1. \end{cases}$$

Пример 2.3.

$$\frac{x^3-x+1}{x^4+4} = \frac{x^3-x+1}{(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)} = \\ = \frac{B_1x+C_1}{x^2-2x+2} + \frac{B_2x+C_2}{x^2+2x+2}.$$

Теперь нам осталось научиться интегрировать простейшие дроби обоих видов, см. (1):
а) заменой $y = x - x_o$ получаем

$$\int \frac{A\,dx}{(x-x_o)^k} = \begin{cases} A\ln|x-x_o| + C, & k=1; \\ C - \dfrac{A/(k-1)}{(x-x_o)^{k-1}}, & k>1; \end{cases}$$

б) выделим полный квадрат в знаменателе:

$$x^2+px+q = (x-x_o)^2 + a^2, \qquad a>0.$$

Сделаем замену $y = x - x_o$:

$$\int \frac{Bx+C_1}{(x^2+px+q)^l}dx = \int \frac{By+C'}{(y^2+a^2)^l}dy = \\ = \frac{B}{2}\int \frac{d(y^2+a^2)}{(y^2+a^2)^l} + C'\int \frac{dy}{(y^2+a^2)^l}.$$

Первое слагаемое после замены $z = y^2 + a^2$ интегрируется так же, как дробь вида а). Последнее слагаемое при $l = 1$ — табличный интеграл (см. стр. 6), а при $l > 1$ применим интегрирование по частям. Рассмотрим случай $l = 2$.

$$\int \frac{dy}{(y^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{y^2+a^2-y^2}{(y^2+a^2)^2}dy =$$
$$= \frac{1}{a^2}\left(\int \frac{y^2+a^2}{(y^2+a^2)^2}dy - \int \frac{y^2}{(y^2+a^2)^2}dy\right) =$$
$$= \frac{1}{a^2}\left(\int \frac{dy}{y^2+a^2} + \frac{1}{2}\int y\,d\frac{1}{y^2+a^2}\right) =$$
$$= \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{y}{a} + \frac{1}{2}\,\frac{y}{y^2+a^2} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{y^2+a^2}dy\right) =$$
$$= \frac{1}{2a^2}\left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{y}{a} + \frac{y}{y^2+a^2}\right) + C.$$

Аналогично можно вычислить интеграл

$$\int \frac{dy}{(y^2+a^2)^k},$$

интегрируя по частям $k-1$ раз. Результат выглядит следующим образом:

$$\int \frac{dy}{(y^2+a^2)^k} =$$
$$= \frac{y}{a^2(2k-2)(y^2+a^2)^{k-1}} + \frac{(2k-3)y}{a^4(2k-2)(2k-4)(y^2+a^2)^{k-2}} +$$
$$+ \ldots + \frac{(2k-3)(2k-5)\ldots 3\,y}{a^{2k-2}(2k-2)(2k-4)\ldots 2(y^2+a^2)} +$$
$$+ \frac{(2k-3)(2k-5)\ldots 3\,y}{a^{2k-1}(2k-2)(2k-4)\ldots 2(y^2+a^2)}\operatorname{arctg}\frac{y}{a}.$$

Читателю предлагается проверить это равенство, предварительно выведя соотношение

$$\left(\frac{y}{(y^2+a^2)^n}\right)' = \frac{1-2n}{(y^2+a^2)^n} + \frac{2na^2}{(y^2+a^2)^{n+1}}.$$

Таким образом, задача интегрирования рациональных функций решена для всех случаев.

Пример 2.4.

Делаем замену $y = x + 1$; здесь $a = 2$.

$$\int \frac{x}{(x^2+2x+5)^2} dx =$$

$$= \int \frac{y-1}{(y^2+4)^2} dy = \frac{1}{2} \int \frac{d(y^2+4)}{(y^2+4)^2} - \int \frac{dy}{(y^2+4)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ \frac{1}{y^2+4} - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{2} + \frac{y}{y^2+4}\right) + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\ \frac{1}{x^2+2x+5} - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{x^2+2x+5}\right) + C.$$

Задачи по теме лекции 2

Проинтегрировать правильные дроби, разложив их на простейшие:

2.1. $\int \frac{(x-2)dx}{x^2-2x+10}$. **2.2**. $\int \frac{dx}{(x+1)x^2}$.

2.3. $\int \frac{x+5}{x^3-4x}dx$. **2.4**. $\int \frac{dx}{x^3-8}$.

2.5. $\int \frac{x^2+x+1}{x^3+4x^2}dx$.

Проинтегрировать неправильные дроби, сначала выделив целую часть, затем разложив правильные дроби на простейшие:

2.6. $\int \frac{x^3dx}{x^2-2x+5}$. **2.7**. $\int \frac{x^2+1}{x^2-1}dx$.

2.8. $\int \frac{x^3dx}{(x-1)^2(x-2)}$. **2.9**. $\int \frac{x^5}{x^2+9}dx$.

2.10 $\int \frac{x^4dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

Лекция № 3.
Интегрирование тригонометрических функций

Научимся интегрировать функции вида

$$f(x) = \frac{P(\cos x, \sin x)}{Q(\cos x, \sin x)},$$

где $P(u,v)$ и $Q(u,v)$ — многочлены. С помощью различных замен переменных будем сводить задачу к интегрированию рациональных функций.

Случай I. Пусть $f(\pi - x) \equiv -f(x)$. Тогда $\cos x$ входит в числитель только в нечетных степенях, а в знаменатель — только в четных (или наоборот, но тогда домножим числитель и знаменатель на $\cos x$). Проинтегрируем с помощью замены $y = \sin x$:

$$\int f(x)dx = \int \frac{P_1\big((1-\sin^2 x), \sin x\big)}{Q_1\big((1-\sin^2 x), \sin x\big)} d\sin x = \int \frac{P_2(y)}{Q_2(y)} dy.$$

Пример 3.1.

$$\int \frac{2\,dx}{\cos x} = \int \frac{2\cos x\ dx}{\cos^2 x} = \int \frac{2\,d\sin x}{1-\sin^2 x} = \left[\begin{array}{c}\text{замена}\\ y = \sin x\end{array}\right]$$

$$= \int \frac{2}{1-y^2} dy = \int \frac{dy}{y+1} - \int \frac{dy}{y-1} = \ln \frac{|\sin x + 1|}{|\sin x - 1|} + C.$$

Случай II. Пусть функция f нечетна. Тогда $\sin x$ входит в числитель только в нечетных степенях, а в знаменатель — только в четных (или наоборот, но тогда домножим числитель и знаменатель на $\sin x$). Проинтегрируем с помощью замены $y = \cos x$.

Случай III. Пусть функция f π-периодична. Тогда все одночлены многочленов P и Q четных степеней (или все нечетных, но тогда домножим числитель и знаменатель на $\cos x$).

Если знаменателя нет ($Q \equiv 1$), применяют формулы понижения степени:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

Возможно, понижение степени придется применить не один раз (например, для $\int \cos^4 x\ dx$), но мы обязательно придем к тому, что в любом одночлене будет встречаться либо косинус, либо синус в нечетной степени (случаи I и II).

Если же знаменатель нетривиален, следует сделать замену $t = \operatorname{tg} x$ или $t = \operatorname{ctg} x$.

Пример 3.2.

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x} = \int \frac{1}{\sin^2 x \operatorname{tg}^2 x} \; \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\cos^{-2} x}{\operatorname{tg}^4 x} d \operatorname{tg} x =$$

$$= \int \frac{1+t^2}{t^4} dt = -\frac{t^{-3}}{3} - t^{-1} + C_n = -\frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x - \operatorname{ctg} x + C_n.$$

Константы C_n независимы, каждая соответствует своему интервалу $(\pi n; \pi(n+1))$.

Общий случай. Если функция $f(x)$ не обладает вышеупомянутыми симметриями:

$$f(\pi - x) \equiv -f(x),\ f(-x) \equiv -f(x) \text{ или } f(\pi + x) \equiv f(x),$$

то имеется еще один способ свести интегрирование тригонометрической функции к интегрированию рациональной — *универсальная тригонометрическая подстановка.* Этот метод подходит для всех случаев, но более трудоемок.

На каждом интервале $(2\pi n - \pi; 2\pi n + \pi)$ положим $t = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$. Тогда

$$x = 2\pi n + 2 \operatorname{arctg} t \implies dx = \frac{2dt}{1+t^2};$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2};\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2};\ \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Пример 3.3.

$$\int \frac{dx}{2+\sin x} = \int \frac{2dt/(1+t^2)}{2 + \dfrac{2t}{1+t^2}} =$$

$$= \int \frac{dt}{1+t^2+t} = \int \frac{dt}{(t+1/2)^2 + 3/4} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2(t+1/2)}{\sqrt{3}} + C_n = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}} + C_n.$$

Константы C_n соответствуют разным интервалам $(2\pi n-\ -\pi; 2\pi n + \pi)$. Однако подынтегральная функция непрерывна в точках $2\pi n{+}\pi$, поэтому ее первообразная $F(x)$ должна быть непрерывна в них. Значит, константы C_n жестко связаны между собой. Вычислим $F(2\pi n + \pi)$, исходя из непрерывности F слева и справа:

$$\lim_{x \to 2\pi n + \pi - 0} F(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(+\infty) + C_n = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + C_n,$$

$$\lim_{x \to 2\pi n + \pi + 0} F(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(-\infty) + C_{n+1} = \frac{-\pi}{\sqrt{3}} + C_{n+1}.$$

Следовательно, $C_{n+1} = C_n + \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}} \Longrightarrow C_n = C_0 + \dfrac{2\pi n}{\sqrt{3}}.$

Теперь рассмотрим дополнительный прием интегрирования тригонометрических функций — *преобразование произведения в сумму.* Он основан на трех тождествах:

$$\cos x \cos y = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2};$$

$$\sin x \sin y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2};$$
$$\sin x \cos y = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2}.$$

Пример 3.4.

$$\int \sin x \cos 3x \sin 4x \, dx = \frac{1}{2} \int (\sin 4x - \sin 2x) \sin 4x \, dx =$$
$$= \frac{1}{4} \int 1 - \cos 8x - \cos 2x + \cos 6x \, dx =$$
$$= \frac{1}{4}\Big(x - \frac{\sin 8x}{8} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 6x}{6}\Big) + C.$$

Задачи по теме лекции 3

Проинтегрировать функцию, используя замену $y = \sin x$ или $y = \cos x$:

$$\mathbf{3.1}.\ \int \sin^5 x \, dx. \quad \mathbf{3.2}.\ \int \operatorname{tg} x \sin^2 x \, dx. \quad \mathbf{3.3}.\ \int \frac{\cos x}{4 + \sin^2 x} dx.$$

Проинтегрировать функцию, используя формулы понижения степени:

$$\mathbf{3.4}.\ \int \cos^4 x \, dx. \quad \mathbf{3.5}.\ \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx.$$

Проинтегрировать функцию, используя замену $t = \operatorname{tg} x$ или $t = \operatorname{ctg} x$:

$$\mathbf{3.6}.\ \int \operatorname{tg}^3 x \, dx. \quad \mathbf{3.7}.\ \int \frac{dx}{1 + 3\cos^2 x}.$$

Проинтегрировать функцию, используя замену $t = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$:

$$\mathbf{3.8}.\ \int \frac{dx}{2\sin x + \cos x}. \quad \mathbf{3.9}.\ \int \frac{dx}{3 + \cos x}.$$

Проинтегрировать функцию, преобразуя произведение в сумму:

$$\mathbf{3.10}.\ \int \sin 2x \cos 3x \, dx.$$

Лекция № 4.

Интегрирование иррациональных функций

Линейные иррациональности

Функции вида
$$f(x)=\frac{P\left(x,\sqrt[k]{x+b}\right)}{Q\left(x,\sqrt[k]{x+b}\right)},$$
где $P(u,v)$ и $Q(u,v)$ — многочлены, интегрируются при помощи замены $t=\sqrt[k]{x+b}$. Тогда $x=t^k-b,\ \ dx=kt^{k-1}dt$, и интеграл примет вид
$$\int f(x)dx=\int\frac{P\left(t^k-b,t\right)}{Q\left(t^k-b,t\right)}kt^{k-1}dt=\int\frac{P_1(t)}{Q_1(t)}dt,$$
где $P_1(t)$ и $Q_1(t)$ — многочлены. Получился интеграл от рациональной функции.

Пример 4.1.

Вычислить интеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$. Поскольку присутствуют корни 2-й и 3-й степеней, здесь надо взять $t=\sqrt[6]{x}$, тогда $x=t^6$, $dx=6t^5dt$.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\int\frac{6t^5dt}{t^3+t^2}=6\int\frac{t^3dt}{t+1}=$$
$$=6\int t^2-t+1-\frac{1}{t+1}dt=2t^3-3t^2+6t-6\ln|t+1|+C=$$
$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+C.$$

Квадратичные иррациональности

Рассмотрим функции вида
$$f(x)=\frac{P\Big(x,\sqrt{\pm(x^2+px+q)}\Big)}{Q\Big(x,\sqrt{\pm(x^2+px+q)}\Big)},\tag{3}$$
где $P(u,v)$ и $Q(u,v)$ — многочлены. Начнем с наиболее простых случаев.

Случай I. Пусть $f(x)=\dfrac{P(x)}{\sqrt{\pm(x^2+px+q)}}$, где $P(x)$ — многочлен. Интеграл можно найти в виде
$$\int f(x)dx=R(x)\sqrt{\pm(x^2+px+q)}+\int\frac{k\,dx}{\sqrt{\pm(x^2+px+q)}},\tag{4}$$

где $R(x)$ — многочлен меньшей степени, чем $P(x)$. Его находят методом неопределенных коэффициентов, продифференцировав обе части (4) и вычисляя коэффициенты $R(x)$ последовательно от старшего к младшим.

Пример 4.2.

$$\int \sqrt{x^2+1}\, dx = \int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} dx =$$

$$= (Ax+B)\sqrt{x^2+1} + k \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Здесь $\deg P = 2 \Longrightarrow \deg R \leqslant 1$. Продифференцировав левую и правую части и домножив на $\sqrt{x^2+1}$, получаем

$$x^2+1 = A(x^2+1) + \frac{1}{2}(Ax+B)2x + k = 2Ax^2 + Bx + A + k,$$

следовательно, $A = 1/2$, $B = 0$, $k = 1/2$.
Ответ: $\int \sqrt{x^2+1}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + C.$

Случай II. Пусть $f(x) = \dfrac{1}{x^m\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $m \in \mathbb{N}$. Сделаем подстановку $x = 1/t$ $\Longrightarrow dx = -dt/t^2$ и получим

$$\int \frac{dx}{x^m\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{-t^{m-2}dt}{\sqrt{at^{-2}+bt^{-1}+c}} =$$

$$= \int \frac{-\operatorname{sign} t \cdot t^{m-1}dt}{\sqrt{a+bt+ct^2}}.$$

Таким образом, при $c \neq 0$ мы пришли к случаю I, а при $c = 0$ — к линейной иррациональности.

III. Общий случай. Линейной заменой $y = x + p/2$ выражение (3) сводится к виду

$$g(y) = \frac{P\big(y, \sqrt{Z(y)}\big)}{Q\big(y, \sqrt{Z(y)}\big)}, \quad \text{где} \quad Z(y) = \left[\begin{array}{ll} a^2 - y^2 & \text{(IIIа)} \\ y^2 + a^2 & \text{(IIIб)} \\ y^2 - a^2 & \text{(IIIв)} \end{array}\right.$$

Рассмотрим эти три подслучая.
(IIIа). Область определения $\sqrt{a^2-y^2}$ — отрезок $[-a;a]$.
Подстановка: $y = a\sin t$, $|t| \leqslant \pi/2$. Тогда $dy = a\cos t\, dt$, $\sqrt{a^2-y^2} = a\cos t$. Получаем

$$\int \frac{P\big(y, \sqrt{Z(y)}\big)}{Q\big(y, \sqrt{Z(y)}\big)} dy = \int \frac{P\,(a\sin t, a\cos t)\; a\cos t}{Q\,(a\sin t, a\cos t)} dt,$$

такие интегралы были изучены на лекции 3. Наконец, выражаем t через y: $t = \arcsin(y/a)$.

Пример 4.3.

$$\int \left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^3 dx = \quad \left[\text{пусть} \ \ x = R\sin t,\ |t| \leqslant \pi/2\right]$$
$$= \int (R\cos t)^3 R\cos t\ dt = \frac{R^4}{4}\int (1+\cos 2t)^2 dt =$$
$$= \frac{R^4}{4}\int 1 + 2\cos 2t + \frac{1+\cos 4t}{2} dt = \frac{R^4}{8}\Big(3t + 2\sin 2t + \frac{\sin 4t}{4}\Big).$$

Осталось подставить в это выражение $t = \arcsin\dfrac{x}{R}$,

$$\sin 2t = \frac{2x\sqrt{R^2-x^2}}{R^2}, \quad \cos 2t = 1 - 2\Big(\frac{x}{R}\Big)^2 = \frac{R^2-2x^2}{R^2}$$
$$\text{и} \quad \sin 4t = \frac{4x\sqrt{R^2-x^2}(R^2-2x^2)}{R^4}.$$

(IIIб). Область определения $\sqrt{y^2+a^2}$ — вся ось $\mathbb{R}$. Можно свести к интегралу от тригонометрической функции подстановкой

$$y = a\operatorname{tg} t \Longrightarrow dy = \frac{a\ dt}{\cos^2 t}; \quad \sqrt{y^2+a^2} = \frac{a}{\cos t}$$

или сразу прийти к интегралу рациональной функции, сделав *первую подстановку Эйлера* (рис. А): $y = \dfrac{a}{2}\Big(t - \dfrac{1}{t}\Big)$, $t > 0$. Тогда

$$dy = \frac{a}{2}\Big(1+\frac{1}{t^2}\Big)dt, \quad \sqrt{y^2+a^2} = \frac{a}{2}\Big(t+\frac{1}{t}\Big), \quad t = \frac{y+\sqrt{y^2+a^2}}{a}.$$

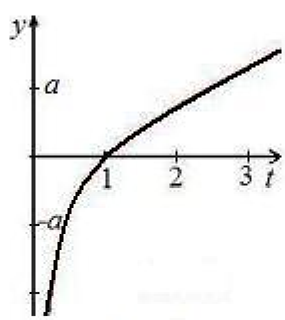


Рис. А

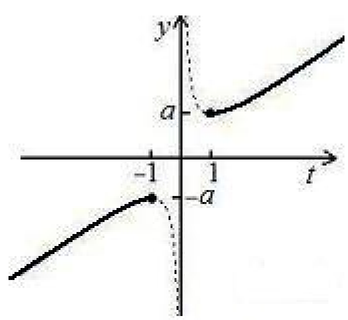


Рис. Б

Пример 4.4.

Здесь сделаем подстановку $x = 2\operatorname{tg} t$; $dx = 2\,dt/\cos^2 t$.

$$\int \frac{dx}{(4+x^2)^{3/2}} = \int \frac{\cos^3 t}{8}\,\frac{2\,dt}{\cos^2 t} = \int \frac{\cos t}{4}dt = \frac{\sin t}{4} + C =$$
$$= \frac{1}{4}\sin\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C = \frac{x}{8}\cos\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C = \frac{x}{4\sqrt{4+x^2}} + C.$$

Пример 4.5.

Здесь следует применить первую подстановку Эйлера $x = \dfrac{1}{2}\Big(t - \dfrac{1}{t}\Big)$, $t > 0$.

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\frac{1}{2}(1+t^{-2})dt}{1+\frac{1}{2}(t+t^{-1})} =$$

$$= \int \frac{(t^2+1)dt}{t(t+1)^2} = \int \frac{1}{t} - \frac{2}{(t+1)^2}dt = \ln t + \frac{2}{t+1} + C\Big|_{t=x+\sqrt{1+x^2}}.$$

(IIIв). Область определения $\sqrt{y^2-a^2}$ — два луча $(-\infty;-a]$ и $[a;+\infty)$. Можно свести к интегралу от тригонометрической функции, сделав подстановку

$$y = \frac{a}{\cos t} \implies dy = \frac{a\sin t\,dt}{\cos^2 t}; \quad \sqrt{y^2-a^2} = a\operatorname{tg} t.$$

Кроме того, можно сразу свести к рациональной функции, сделав *вторую подстановку Эйлера* (рис. Б):

$$y = \frac{a}{2}\Big(t+\frac{1}{t}\Big),\ |t| \geqslant 1;\ dy = \frac{a}{2}\Big(1-\frac{1}{t^2}\Big)dt, \sqrt{y^2-a^2} = \frac{a}{2}\Big|t-\frac{1}{t}\Big|.$$

Но здесь выражение t через y менее удобно:

$$t = \frac{y + \operatorname{sign} y\ \sqrt{y^2-a^2}}{a}.$$

Пример 4.6.

Пусть $x > 0$. Сделаем подстановку $x = 1/\cos t$, где $0 \leqslant \leqslant t < \pi/2$; соответственно $dx = \sin t\,dt/\cos^2 t$:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx = \int \frac{\operatorname{tg} t}{\cos^{-1} t}\,\frac{\sin t\,dt}{\cos^2 t} = \int \operatorname{tg}^2 t\,dt =$$
$$= \int \frac{1}{\cos^2 t} - 1\ dt = \operatorname{tg} t - t + C = \sqrt{x^2-1} - \arccos\frac{1}{x} + C.$$

Дробно-линейные иррациональности

Функции вида

$$f(x) = \frac{P\left(x, \sqrt[k]{\dfrac{ax+b}{\alpha x+\beta}}\right)}{Q\left(x, \sqrt[k]{\dfrac{ax+b}{\alpha x+\beta}}\right)},$$

где $P(u,v)$ и $Q(u,v)$ — многочлены, $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \neq 0$, интегрируются с помощью замены $t = \sqrt[k]{\dfrac{ax+b}{\alpha x+\beta}}$.

Выразим x через t:

$$t^k = \frac{ax+b}{\alpha x+\beta} \Longrightarrow \alpha t^k x + \beta t^k - ax - b = 0 \Longrightarrow x = \frac{\beta t^k - b}{a - \alpha t^k};$$

$$dx = \frac{k\Delta\, t^{k-1}dt}{(\alpha t^k - a)^2}.$$

Получаем интеграл рациональной функции:

$$\int f(x)dx = k\Delta \int \frac{P\left(\dfrac{\beta t^k - b}{a-\alpha t^k}, t\right) t^{k-1}}{Q\left(\dfrac{\beta t^k - b}{a-\alpha t^k}, t\right)(\alpha t^k - a)^2} dt.$$

Впрочем, при $k=2$ можно свести дробно-линейную иррациональность к квадратичной, например,

$$\sqrt{\frac{x+2}{x-1}} = \frac{|x+2|}{\sqrt{(x+2)(x-1)}} = \operatorname{sign}(x+2)\frac{x+2}{\sqrt{(x+2)(x-1)}}.$$

Интегральный бином

Если мы хотим проинтегрировать функцию вида

$$f(x) = x^p\left(\sqrt[n]{x^q+a}\right)^k,$$

где $k, n \in \mathbb{N}$, $p, q \in \mathbb{Q}$, то возможны три случая:

1) замена $y = \sqrt[n]{x^q+a}$ сведет к интегралу от рациональной функции;
2) замена $y = \sqrt[n]{1+ax^{-q}}$ сведет к интегралу от рациональной функции;
3) если ни та, ни другая замена не приводит к цели, то интеграл неберущийся.

Как пример для случая 1) предлагается задача 4.9.

Задачи по теме лекции 4

Проинтегрировать линейные иррациональности:

$$\textbf{4.1.} \int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx. \quad \textbf{4.2.} \int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}\,dx.$$

Проинтегрировать квадратичные иррациональности методом неопределенных коэффициентов:

$$\textbf{4.3.} \int \frac{17-2x^2}{\sqrt{5+4x-x^2}}\,dx. \quad \textbf{4.4.} \int \frac{2x^2-x}{\sqrt{x^2-4}}\,dx.$$

Проинтегрировать квадратичные иррациональности с помощью подходящих замен переменных:

$$\textbf{4.5}.\ \int x^2\sqrt{x^2-1}\,dx. \quad \textbf{4.6}.\ \int (x^2+1)^{3/2}\,dx.$$

$$\textbf{4.7}.\ \int \frac{dx}{1+\sqrt{2x-x^2}}\,dx. \quad \textbf{4.8}.\ \int \frac{4dx}{x+\sqrt{x^2+4x}}\,dx.$$

Вычислить интегральные биномы:

$$\textbf{4.9}.\ \int \frac{1}{x}\sqrt{1+x^{-4}}\ dx \quad \text{(решение см. в примере 10.1).}$$

$$\textbf{4.10}.\ \int x^5\sqrt[3]{x^3+1}\,dx.$$

Лекция № 5.
Интеграл Римана

Пусть функция f определена на отрезке $[a;b]$.

Определение 5.1. **Разбиением** отрезка $[a;b]$ называется набор таких точек $\{a_i\}_{i=0}^n$, $n \in \mathbb{N}$, что

$$a = a_o < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b.$$

Диаметр разбиения $\operatorname{diam}\{a_i\} = \max\limits_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})$.

Определение 5.2. Разбиение $\{b_j\}_{j=0}^m$ называется **измельчением** разбиения $\{a_i\}_{i=0}^n$, если $\{a_i\}_{i=0}^n \subset \{b_j\}_{j=0}^m$, т.е.

$$\forall i \in \{0, \ldots, n\} \;\; \exists j \in \{0, \ldots, m\} : \quad a_i = b_j.$$

Определение 5.3. Пусть $\{a_i\}_{i=0}^n$ — разбиение отрезка $[a;b]$, и пусть выбраны точки $x_i \in [a_{i-1}; a_i]$. **Интегральной суммой** функции f по разбиению $\{a_i\}$ с выбором точек $\{x_i\}$ называется сумма

$$S_{\{a_i\}}^{\{x_i\}}(f) = \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})f(x_i).$$

Определение 5.4. Говорят, что функция $f(x)$ **интегрируема (по Риману)** на отрезке $[a;b]$, если существует такое число $I \in \mathbb{R}$, что

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \quad \text{если} \quad \operatorname{diam}\{a_i\} < \delta, \quad \text{то} \quad \left| S_{\{a_i\}}^{\{x_i\}}(f) - I \right| < \varepsilon.$$

Число I называется **определенным интегралом** функции f по отрезку $[a;b]$ и обозначается

$$I = \int\limits_a^b f(x)\, dx.$$

Лемма 5.1. *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на нем.*

Доказательство. Пусть f интегрируема. Тогда, взяв δ для $\varepsilon = 1$, получим

$$\text{если} \quad \operatorname{diam}\{a_i\} < \delta, \quad \text{то} \quad I - 1 < S_{\{a_i\}}^{\{x_i\}}(f) < I + 1. \tag{5}$$

Будем рассуждать от противного. Пусть f не ограничена на $[a;b]$. Возьмем некоторое разбиение $\{a_i\}$ с диаметром $< \delta$. Функция f не ограничена хотя бы на одном отрезке разбиения, скажем, на $[a_{k-1}; a_k]$. Зафиксируем точки $x_i \in [a_{i-1}; a_i]$ для $i \neq k$, а точку $x_k \in [a_{k-1}; a_k]$ будем менять. Тогда мы получим неограниченное множество значений интегральной суммы, что противоречит условию (5). ☐

Определение 5.5. Пусть функция f ограничена на отрезке $[a;b]$, $\{a_i\}_{i=0}^n$ — разбиение $[a;b]$. **Верхняя** и **нижняя суммы Дарбу** f по разбиению $\{a_i\}$:

$$S^*_{\{a_i\}}(f) = \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1}) \sup_{[a_{i-1};a_i]} f(x);$$

$$_*S_{\{a_i\}}(f) = \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1}) \inf_{[a_{i-1};a_i]} f(x).$$

Очевидно, $S^*_{\{a_i\}}(f) = \sup S^{\{x_i\}}_{\{a_i\}}(f)$, $_*S_{\{a_i\}}(f) = \inf S^{\{x_i\}}_{\{a_i\}}(f)$, где супремум и инфимум берутся по всем наборам точек $x_i \in [a_{i-1};a_i]$.

Лемма 5.2. *Если разбиение* $\{b_j\}_{j=0}^m$ *— измельчение разбиения* $\{a_i\}_{i=0}^n$*, то*

$$S^*_{\{b_j\}}(f) \leqslant S^*_{\{a_i\}}(f), \quad _*S_{\{b_j\}}(f) \geqslant {_*S_{\{a_i\}}(f)}.$$

Доказательство. Пусть $a_i = b_{j(i)}$, тогда $j(0) = 0 < j(1) < < j(2) < \ldots < j(n) = m$. Получаем

$$S^*_{\{b_j\}}(f) = \sum_{j=1}^{m}(b_j - b_{j-1}) \sup_{[b_{j-1};b_j]} f(x) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=j(i-1)+1}^{j(i)} (b_j - b_{j-1}) \sup_{[b_{j-1};b_j]} f(x) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=j(i-1)+1}^{j(i)} (b_j - b_{j-1}) \sup_{[a_{i-1};a_i]} f(x) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1}) \sup_{[a_{i-1};a_i]} f(x) = S^*_{\{a_i\}}(f);$$

аналогично получаем $_*S_{\{b_j\}}(f) \geqslant {_*S_{\{a_i\}}(f)}$. □

Следствие 5.1. *Если* $\{a_i\}$ *и* $\{c_k\}$ *— два разбиения отрезка* $[a;b] \subset D(f)$*, то*

$$_*S_{\{a_i\}}(f) \leqslant S^*_{\{c_k\}}(f).$$

Доказательство. Построим разбиение $\{b_j\} = \{a_i\} \cup \{c_k\}$, т.е. объединим два множества точек и перенумеруем точки в порядке возрастания. Тогда
$_*S_{\{a_i\}}(f) \leqslant {_*S_{\{b_j\}}(f)} \leqslant S^*_{\{b_j\}}(f) \leqslant S^*_{\{c_k\}}(f)$. □

Определение 5.6. Пусть функция f ограничена на $[a;b]$. **Верхним** и **нижним интегралами Дарбу** f по $[a;b]$ называются величины

$${}_a^bI^*(f) = \inf S^*_{\{a_i\}}(f), \quad {}_a^bI_*(f) = \sup {_*S_{\{a_i\}}(f)},$$

где инфимум и супремум берутся по всем возможным разбиениям $\{a_i\}$ отрезка $[a;b]$.

Из следствия 5.1 получаем неравенство ${}_a^bI^*(f) \geqslant {}_a^bI_*(f)$.

Теорема 5.1. (Критерий Дарбу). *Пусть функция f ограничена на отрезке $[a;b]$. Тогда f интегрируема по Риману на $[a;b]$ в том и только в том случае, если ${}_a^bI^*(f)= {}_a^bI_*(f)$, и тогда*

$$\int_a^b f(x)dx = {}_a^bI^*(f) = {}_a^bI_*(f).$$

Доказательство. [$\Rightarrow$]: Если f интегрируема, т.е. существует $\int\limits_a^b f(x)dx = I$, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$: для любого разбиения с диаметром меньше δ выполнено

$$\forall\{x_i\} \quad \left|S_{\{a_i\}}^{\{x_i\}}(f) - I\right| < \varepsilon/2.$$

Перейдя к супремуму и инфимуму по всем возможным $\{x_i\}$, получим $S^*_{\{a_i\}}(f) \leqslant I+\varepsilon/2$, ${}_*S_{\{a_i\}}(f) \geqslant I-\varepsilon/2$, и в силу произвольности ε получим ${}_a^bI^*(f) = {}_a^bI_*(f) = I$.
[$\Leftarrow$]: Пусть ${}_a^bI^*(f)= {}_a^bI_*(f) = I$. Обозначим $M = \sup\limits_{[a;b]}|f(x)|$. Построим такое разбиение $\{a_i\}_{i=0}^n$, что $S^*_{\{a_i\}}(f) < I + \varepsilon/2$, ${}_*S_{\{a_i\}}(f) > I - \varepsilon/2$. Возьмем

$$\delta = \min\Big\{\frac{\varepsilon}{4Mn}\ ;\ \frac{a_i - a_{i-1}}{2}\ :\ i = 1, 2, \ldots, n\Big\}.$$

Пусть $\{b_j\}_{j=0}^m$ — некоторое разбиение $[a;b]$ с диаметром меньше δ. Точки a_i при $1 \leqslant i \leqslant n-1$ попадут в разные отрезки разбиения $\{b_j\}$: $b_{j(i)-1} < a_i \leqslant b_{j(i)}$. Для удобства положим $j(0) = 0$, $j(n) = m+1$. Остальные отрезки расположатся между точками a_i:

$$a_{i-1} \leqslant b_{j(i-1)} < b_{j(i-1)+1} < \ldots < b_{j(i)-1} \leqslant a_i.$$

Оценим интегральную сумму по разбиению $\{b_j\}$:

$$\begin{aligned}
S_{\{b_j\}}^{\{x_i\}}(f) \leqslant S^*_{\{b_j\}}(f) &= \sum_{i=1}^{n-1}(b_{j(i)} - b_{j(i)-1}) \sup_{[b_{j-1};b_j]} f(x) + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=j(i-1)+1}^{j(i)-1}(b_j - b_{j-1}) \sup_{[b_{j-1};b_j]} f(x) \leqslant \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n-1}\big((a_i - b_{j(i)-1})M + (b_{j(i)} - a_i)M\big) + \\
&\qquad\qquad + \sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=j(i-1)+1}^{j(i)-1}(b_j - b_{j-1}) \sup_{[a_{i-1};a_i]} f(x) \leqslant
\end{aligned}$$

(составим из кусочков каждый отрезок $[a_{i-1};a_i]$ и учтем, что $\sup f$ по нему может быть меньше M не более, чем на $2M$)

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1}) \sup_{[a_{i-1};a_i]} f(x) + 2M\sum_{i=1}^{n-1}(b_{j(i)} - b_{j(i)-1}) \leqslant$$

$$\leqslant S^*_{\{a_i\}}(f) + 2M(n-1)\delta < I + \frac{\varepsilon}{2} + 2M(n-1)\delta < I + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Аналогично интегральная сумма оценивается снизу через $I - \varepsilon$. □

Задачи по теме лекции 5

Вычислить нижнюю и верхнюю суммы Дарбу для данных функций и разбиений отрезков:

5.1. $f(x) = x$ на $[0;1]$, разбиение на n равных частей.

5.2. $f(x) = 4^x$ на $[0;4]$, разбиение на 8 равных частей.

5.3. Доказать, что функция $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$
не интегрируема по Риману на $[0;1]$.

5.4. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-n}, & x = (2k+1)2^{-n},\ k \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}, \\ 1, & x \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{при других } x, \end{cases}$$

интегрируема по Риману на $[0;1]$.
Указание: если разбить отрезок на N равных частей (N нечетно), то в верхней сумме Дарбу будет не более 2^n+1 слагаемых, не меньших $2^{-n}/n$, отсюда получить верхнюю оценку верхней суммы Дарбу.

5.5. Доказать, что нестрого возрастающая функция на отрезке $[a;b]$ интегрируема по Риману. *Указание*: разбить отрезок на n равных частей и оценить разность верхней и нижней сумм Дарбу.

Лекция № 6.
Свойства определенного интеграла

Константа интегрируема, и $\int\limits_a^b c\,dx = c(b-a)$. Это следует из того, что все интегральные суммы для c равны тому же числу.

Линейность. Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$; c, $k \in \mathbb{R}$, то $cf(x)+kg(x)$ интегрируема, причем

$$\int_a^b cf(x) + kg(x)dx = c\int_a^b f(x)dx + k\int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Для любого разбиения $\{a_i\}$ и любых выбранных точек $x_i \in [a_{i-1};a_i]$ справедливо соотношение

$$S_{\{a_i\}}^{\{x_i\}}(cf+kg) = cS_{\{a_i\}}^{\{x_i\}}(f) + kS_{\{a_i\}}^{\{x_i\}}(g).$$

Остается перейти к пределу при $\operatorname{diam}\{a_i\} \to 0$. $\square$

Сужение. Если $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, причем $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$, то $f(x)$ интегрируема на отрезке $[\alpha;\beta]$.

Доказательство. $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$: если $\operatorname{diam}\{a_i\} < \delta$, то $S^*_{\{a_i\}}(f) -{}_*S_{\{a_i\}}(f) < \varepsilon$. Выберем разбиение с диаметром меньше δ, такое, что $\alpha = a_{i_1}$, $\beta = a_{i_2}$. Тогда $\{a_i\}_{i=i_1}^{i_2}$ — разбиение отрезка $[\alpha;\beta]$, для которого $S^*_{\{a_i\}}(f) -{}_*S_{\{a_i\}}(f) < \varepsilon$. В силу произвольности ε по критерию Дарбу $f(x)$ интегрируема на $[\alpha;\beta]$. $\square$

Аддитивность. Если $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a;b]$ и $[b;c]$, то она интегрируема и на отрезке $[a;c]$, причем

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

Доказательство. Пусть $\int\limits_a^b f(x)dx = I$, $\int\limits_b^c f(x)dx = J$. Докажем для произвольного ε, что

$${}_a^cI^*(f) < I + J + \varepsilon, \quad {}_a^cI_*(f) > I + J - \varepsilon$$

(тогда по критерию Дарбу все будет доказано). Для этого выберем такие два разбиения: $\{a_i\}_{i=0}^n$ отрезка $[a;b]$ и $\{b_i\}_{i=0}^m$ отрезка $[b;c]$, что

$$S^*_{\{a_i\}}(f) < I + \frac{\varepsilon}{2},\ {}_*S_{\{a_i\}}(f) > I - \frac{\varepsilon}{2},$$

$$S^*_{\{b_i\}}(f) < J + \frac{\varepsilon}{2},\ {}_*S_{\{b_i\}}(f) > J - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Построим разбиение $\{c_j\}_{j=0}^{n+m}$ отрезка $[a;c]$ точками $c_j = a_j$ при $0 \leqslant j \leqslant n$, $c_j = b_{j-n}$ при $n \leqslant j \leqslant n+m$. Тогда получим оценки

$$
{}_a^c I^*(f) \leqslant S^*_{\{c_j\}}(f) < I + J + \varepsilon,
$$

$$
{}_a^c I_*(f) \geqslant {}_*S_{\{c_j\}}(f) > I + J - \varepsilon.
$$

□

Монотонность. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$.

$$
\text{Если } f(x) \leqslant g(x) \text{ на } [a;b], \text{ то } \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx. \tag{6}
$$

Это следует из того, что для любого разбиения $\{a_i\}$ и любых выбранных точек $x_i \in [a_{i-1}; a_i]$ верно неравенство

$$
S^{\{x_i\}}_{\{a_i\}}(f) \leqslant S^{\{x_i\}}_{\{a_i\}}(g).
$$

Оценка по модулю. Если $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то $|f(x)|$ также интегрируема, причем

$$
\Big|\int_a^b f(x)dx\Big| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx.
$$

Доказательство. Интегрируемость $|f(x)|$ доказывается по критерию Дарбу благодаря неравенству

$$
S^*_{\{a_i\}}(|f|) - {}_*S_{\{a_i\}}(|f|) \leqslant S^*_{\{a_i\}}(f) - {}_*S_{\{a_i\}}(f).
$$

Применим свойство (6) к неравенствам $-|f(x)| \leqslant f(x)$ и $f(x) \leqslant |f(x)|$. □

Теорема о среднем. Если $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то существует число $\mu \in [\inf\limits_{[a;b]} f; \sup\limits_{[a;b]} f]$, называемое **средним значением** f на отрезке $[a;b]$, такое, что

$$
\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a).
$$

Если при этом $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то $\exists\, x \in [a;b]$, такой, что $\mu = f(x)$.

Доказательство. Применим свойство (6) к неравенствам $\inf\limits_{[a;b]} f \leqslant f(x)$, $f(x) \leqslant \sup\limits_{[a;b]} f$. Результат разделим на длину отрезка $(b-a)$. □

Нечувствительность к точке. Если $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, $f_o(x) = f(x)$ во всех точках $x \in [a;b]$, кроме конечного множества $\{x_1, \dots x_N\}$, то f_o также интегрируема на $[a;b]$, и интегралы f и f_o совпадут. Действительно,

$$
\Big|S^{\{x_i\}}_{\{a_i\}}(f_o) - \int\limits_a^b f(x)dx\Big| \leqslant \Big|S^{\{x_i\}}_{\{a_i\}}(f) - \int\limits_a^b f(x)dx\Big| +
$$

$$
+ N \max_{[a;b]} |f_o(x) - f(x)| \operatorname{diam}\{a_i\} \to 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{diam}\{a_i\} \to 0.
$$

Однако для непрерывных функций такая ситуация невозможна: значение функции в отдельной точке нельзя произвольно изменить. Более того, верна следующая лемма.

Лемма 6.1. *Пусть $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ и непрерывна в точке $x_o \in [a;b]$. Если $f(x) \geqslant 0$ на $[a;b]$ и $f(x_o) > 0$, то $\int\limits_a^b f(x)dx > 0$.*

Доказательство. Нестрогое неравенство верно по свойству (6), примененному к неравенству $f(x) \geqslant 0$. Если же f непрерывна в точке x_o и $f(x_o) = h > 0$, то $\exists$ $\delta > 0$: $f(x) > h/2$ при $x \in [\alpha;\beta] = [x_o - \delta; x_o + \delta] \cap [a;b]$. Если взять разбиение $\{a_i\}$ с точками $a_k = \alpha$, $a_{k+1} = \beta$, то

$$ {}_a^bI_*(f) \geqslant {}_*S_{\{a_i\}}(f) \geqslant (\beta - \alpha)\frac{h}{2} \geqslant \frac{h\delta}{2} > 0. \qquad \square $$

Определение 6.1. Функция называется **кусочно-непрерывной** на промежутке, если она имеет на нем лишь конечное множество разрывов, причем только устранимых и первого рода.

Теорема 6.1. *Если функция $f(x)$ ограничена и кусочно-непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на нем.*

Доказательство. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она равномерно непрерывна на нем, т. е.

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0 : \text{если}\, a\leqslant x, y\leqslant b, |x-y|<\delta, \text{то}\, |f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

Взяв разбиение $\{a_i\}$ с диаметром $< \delta$, получим

$$S^*_{\{a_i\}}(f) - {}_*S_{\{a_i\}}(f) < \varepsilon(b-a).$$

По критерию Дарбу f интегрируема на $[a;b]$. Аддитивность и нечувствительность к точке позволят перейти к кусочно-непрерывной функции. $\square$

Дифференцирование интеграла по верхнему пределу

Положим $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$; $\int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx$ при $b > a$.

Теорема 6.2. *Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке I и зафиксирована точка $c \in I$, то функция*

$$F(x) = \int_c^x f(y)dy$$

является первообразной функции f на I.

Доказательство. В силу аддитивности интеграла, если x, $x+h \in I$, то

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(y)dy.$$

Покажем, что $F'(x) = f(x)$, применив теорему о среднем ($\exists\, z$ между x и $x+h$):

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(y)dy = f(z) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f(x),$$

поскольку f непрерывна в точке x. $\square$

Следствие 6.1. Формула Ньютона — Лейбница: *если a, $b \in I$ и функция $F(x)$ — первообразная непрерывной функции $f(x)$ на I, то*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Эта формула позволяет вычислять определенный интеграл через неопределенный.

Пример 6.1.

Вычислить интеграл функции $f(x) = x^3$ по отрезку $[1,3]$ и среднее значение $f(x)$ на этом отрезке.

По формуле Ньютона — Лейбница

$$\int\limits_1^3 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_1^3 = \frac{3^4-1^4}{4} = 20.$$

Среднее значение $\mu = 20/(3-1) = 10$. Оно достигается в точке $x = \sqrt[3]{10}$.

Задачи по теме лекции 6

Вычислить интегралы данных функций по данным отрезкам:

6.1. $\displaystyle\int\limits_1^4 x^2 dx.$ **6.2.** $\displaystyle\int\limits_{-2}^5 |x|dx.$ **6.3.** $\displaystyle\int\limits_0^3 \frac{2xdx}{1+x^2}.$

Вычислить среднее значение функции на отрезке:

6.4. $f(x) = x^4$ на $[0;5]$.

6.5. $f(x) = \operatorname{sign} x$ на $[-2;3]$.

6.6. $f(x) = \sin^4 x$ на $[0;\pi]$.

6.7. $f(x) = \max\{0; 1-x^2\}$ на $[-2;2]$.

6.8. Доказать, что для всякого многочлена $P(x)$ степени не выше 3 справедлива формула Симпсона:

$$\int\limits_a^b P(x)dx = \frac{b-a}{6}\big(P(a)+4P(c)+P(b)\big), \quad c = \frac{a+b}{2}.$$

Указание: представить $P(x)$ в виде многочлена от $(x-c)$.

Лекция № 7.
Площади плоских фигур

Определение 7.1. Пусть $\Phi \subset \mathbb{R}^2$ — плоская фигура. Ее внутренняя и внешняя площади определяются так:

$$S_*(\Phi)=\sup\{S(M)\colon M\subset\Phi\},\ S^*(\Phi)=\inf\{S(M)\colon M\supset\Phi\},$$

где M — конечные объединения многоугольников на плоскости. Если $S_*(\Phi) = S^*(\Phi)$, то говорят, что Φ **квадрируема** и ее площадь

$$S(\Phi) = S_*(\Phi) = S^*(\Phi).$$

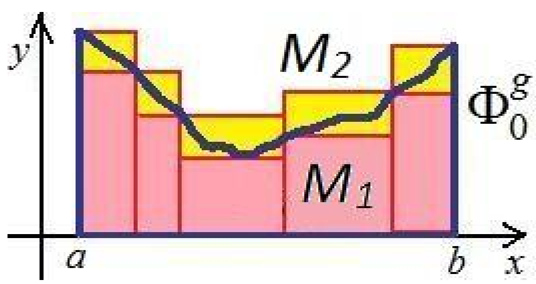
Площади в декартовых координатах

Лемма 7.1. *Если фигура Φ_0^g на плоскости задана неравенствами*

$$a \leqslant x \leqslant b; \qquad 0 \leqslant y \leqslant g(x),$$

функция $g(x) \geqslant 0$ непрерывна на $[a;b]$, то Φ_0^g квадрируема и ее площадь равна

$$S(\Phi_0^g) = \int_a^b g(x)dx = I.$$



Доказательство. Пусть $\{a_i\}_{i=0}^n$ — разбиение отрезка $[a;b]$. Тогда фигура Φ_0^g содержит ступенчатую фигуру M_1, а сама содержится в ступенчатой фигуре M_2:

$$M_1 = \bigcup_{i=1}^n \Big([a_{i-1};a_i] \times [0; \inf_{[a_{i-1};a_i]} g]\Big);$$

$$M_2 = \bigcup_{i=1}^n \Big([a_{i-1};a_i] \times [0; \sup_{[a_{i-1};a_i]} g]\Big).$$

Площади этих многоугольных фигур:

$$S(M_1)= {}_*S_{\{a_i\}}(g),\ S(M_2)= S^*_{\{a_i\}}(g),$$

а в силу интегрируемости g и та и другая могут быть сколь угодно близки к I. Таким образом,

$$S^*(\Phi_0^g) = S_*(\Phi_0^g) = I. \qquad \square$$

Теорема 7.1. *Если фигура Φ_f^g на плоскости задана неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$; $f(x) \leqslant y \leqslant g(x)$, функции f и g непрерывны и $g(x) \geqslant f(x)$ на $[a;b]$, то площадь Φ_f^g*

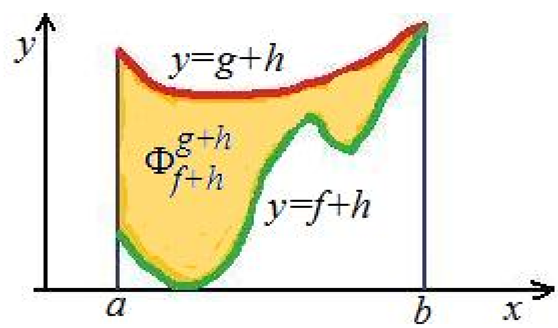
$$S(\Phi_f^g) = \int\limits_a^b g(x) - f(x)\ dx.$$

Доказательство. Пусть

$$-h = \min\bigl\{0;\ f(x):\ x \in [a;b]\bigr\}.$$

Сдвинув фигуру Φ_f^g на h вверх, мы получим равную ей фигуру Φ_{f+h}^{g+h}, которую можно представить (пренебрегая граничными точками) в виде

$$\Phi_{f+h}^{g+h} = \Phi_0^{g+h} \backslash \Phi_0^{f+h}, \quad \text{причем } \Phi_0^{g+h} \supset \Phi_0^{f+h}.$$



Тогда

$$S^*(\Phi_{f+h}^{g+h}) \leqslant S^*(\Phi_0^{g+h}) - S_*(\Phi_0^{f+h}),$$

$$S_*(\Phi_{f+h}^{g+h}) \geqslant S_*(\Phi_0^{g+h}) - S^*(\Phi_0^{f+h}),$$

следовательно, Φ_{f+h}^{g+h} квадрируема, и

$$S(\Phi_{f+h}^{g+h}) = S(\Phi_0^{g+h}) - S(\Phi_0^{f+h}) =$$

$$= \int\limits_a^b g + h\ dx - \int\limits_a^b f + h\ dx = \int\limits_a^b g - f\ dx. \qquad \square$$

Пример 7.1.

Вычислим площадь между гиперболой $\{xy = 3\}$ и прямой $\{x+y = 4\}$. Абсциссы точек пересечения: $a = 1$, $b = 3$. Верхняя граница $y = g(x) = 4 - x$, нижняя граница $y = = f(x) = 3/x$. Таким образом, площадь

$$S = \int\limits_1^3 4 - x - \frac{3}{x}\ dx = \left(4x - \frac{x^2}{2} - 3\ln|x|\right)\Bigg|_1^3 =$$

$$= (7{,}5 - 3\ln 3) - 3{,}5 = 4 - \ln 27 \approx 0{,}704.$$

Ответ: $S \approx 0{,}704$.

Площади фигур с границами, заданными параметрически

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы параметрически:

$$\left\{\begin{array}{l} x = x_1(t), \\ y = y_1(t), \\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x = x_2(t), \\ y = y_2(t), \\ \gamma \leqslant t \leqslant \delta, \end{array}\right. \quad \begin{array}{c} x_1'(t), x_2'(t), y_1(t), y_2(t) \\ \text{непрерывны,} \end{array}$$

причем $x_1'(t), x_2'(t)$ сохраняют знак. Тогда при вычислении площади Φ_f^g разобьем интеграл на два слагаемых и в одном сделаем подстановку $x = x_1(t)$, а в другом $x = x_2(t)$:

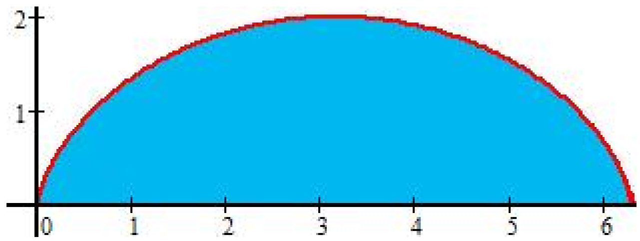
$$S(\Phi_f^g) = \int\limits_a^b g(x)dx - \int\limits_a^b f(x)dx =$$

$$= \operatorname{sign}\, x_2' \int\limits_\gamma^\delta y_2(t)dx_2(t) - \operatorname{sign}\, x_1' \int\limits_\alpha^\beta y_1(t)dx_1(t)$$

(множитель $\operatorname{sign} x_1'$ появился из-за того, что при $x_1' < 0$ имеем $x_1(\alpha) = b$, $x_1(\beta) = a$. Поэтому пределы интегрирования α и β стоят наоборот).

Пример 7.2.

Найдем площадь между аркой циклоиды $\{x = t - \sin t;\ y = 1 - \cos t;\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\}$ и осью Ox.



Здесь нижняя граница $y = 0$, верхняя граница $y = g(x)$ задана параметрически. Делаем подстановку $x = x(t)$:

$$S = \int\limits_0^{2\pi} g(x)dx = \int\limits_0^{2\pi} y(t)dx(t) = \int\limits_0^{2\pi} (1 - \cos t)(1 - \cos t)dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} 1 - 2\cos t + \cos^2 t\ dt = \left(t - 2\sin t + \frac{2t + \sin 2t}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 3\pi.$$

Интересен случай, когда граница Φ является петлей самопересекающейся кривой $\{x = x(t), y = y(t)\}$. Пусть направление обхода — по часовой стрелке. Для простоты предположим, что область внутри петли выпукла. Тогда

$$x'(t) > 0 \text{ при } \gamma < t < \delta; \qquad x'(t) < 0 \text{ при } \alpha < t < \beta;$$
$$\text{участок } \gamma < t < \delta \text{ лежит выше участка } \alpha < t < \beta.$$

При этом либо $\tau = \beta < \alpha = \gamma < \delta = T$ (вход-выход петли справа), либо $\tau = \gamma < \delta = \beta < \alpha = T$ (вход-выход петли слева). В обоих случаях формула площади Φ перепишется в виде

$$S(\Phi) = \int\limits_\gamma^\delta y(t)dx(t) + \int\limits_\beta^\alpha y(t)dx(t) = \int\limits_\tau^T y(t)dx(t). \qquad (7)$$

Замечание 7.1. 1) формула (7) верна для любой гладкой петли без внутренних самопересечений, обходимой по часовой стрелке. Вход-выход может находиться с любой стороны. Для доказательства фигуру Φ придется разрезать вертикальными прямыми на части вида Φ_f^g;

2) если петлю обходим против часовой стрелки, в формуле (7) меняется знак.

Пример 7.3.

Вычислим площадь петли кривой $\{x = t^2, y = t^3 - t\}$. Значения параметра t для точки входа-выхода: $\tau = -1$, $T = 1$. По формуле (7) получаем

$$\pm S = \int\limits_{-1}^{1} y(t)dx(t) = \int\limits_{-1}^{1} (t^3 - t)2tdt = 2\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = -\frac{8}{15}.$$

Ответ: $S = 8/15$, обход против часовой стрелки.

Площади в полярных координатах

Введем на плоскости полярные координаты (ρ, φ), $\rho \geqslant 0$, $|\varphi| \leqslant \pi$, связанные с декартовыми координатами соотношениями $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$

Теорема 7.2. *Если фигура Φ задана в полярных координатах: $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, $\rho \leqslant R(\varphi)$, где $\alpha < \beta \leqslant \alpha + 2\pi$ и функция $R(\varphi) \geqslant 0$ непрерывна на $[\alpha; \beta]$, то Φ квадрируема и ее площадь*

$$S(\Phi) = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} R^2(\varphi)d\varphi = J.$$

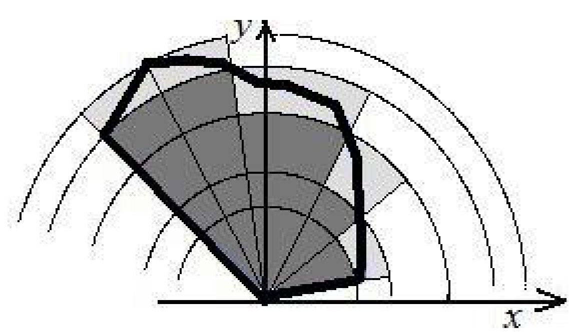
Доказательство. Сектор круга радиусом r с углом δ квадрируем, его площадь равна $r^2\delta/2$. Пусть $\{a_i\}_{i=0}^n$ — разбиение отрезка $[\alpha; \beta]$. Тогда фигура Φ содержит объединение секторов V_1, а сама содержится в объединении секторов V_2:

$$V_1 = \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ \begin{array}{c} a_{i-1} \leqslant \varphi \leqslant a_i \\ \rho \leqslant \inf\limits_{[a_{i-1}; a_i]} R \end{array} \right\}; \quad V_2 = \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ \begin{array}{c} a_{i-1} \leqslant \varphi \leqslant a_i \\ \rho \leqslant \sup\limits_{[a_{i-1}; a_i]} R \end{array} \right\}.$$

Площади этих фигур таковы:

$$S(V_1) = \frac{{}_*S_{\{a_i\}}(R^2)}{2}, \quad S(V_2) = \frac{S^*_{\{a_i\}}(R^2)}{2},$$

а в силу интегрируемости R^2 и та и другая могут быть сколь угодно близки к J. Таким образом, $S^*(\Phi) = S_*(\Phi) = J$. На рисунке фигура Φ обведена толстой линией, V_1 закрашена темно-серым, V_2 — темно- и светло-серым. □



Пример 7.4.

Вычислим площадь внутри одного лепестка лемнискаты, заданной уравнением $\rho^2 = \cos 2\varphi$. Здесь $\alpha = -\pi/4$, $\beta = \pi/4$, $R(\varphi) = \sqrt{\cos 2\varphi}$. Получаем

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} R^2(\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\varphi\; d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2\varphi\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{1}{4}\big(1-(-1)\big) = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $S = 1/2$.

Задачи по теме лекции 7

Вычислить площади фигур, заданных в декартовых координатах:

7.1. $x^2 + y^2 < 5, \quad xy > 2, \quad x > 0.$

7.2. $x^2 < y < x + 12.$

7.3. $4 < y < \dfrac{6}{2 - \cos x}, \quad |x| < \pi.$

Вычислить площади фигур, заданных в полярных координатах:

7.4. $\varphi < \rho < \varphi + 2\pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi$ (рис. А).

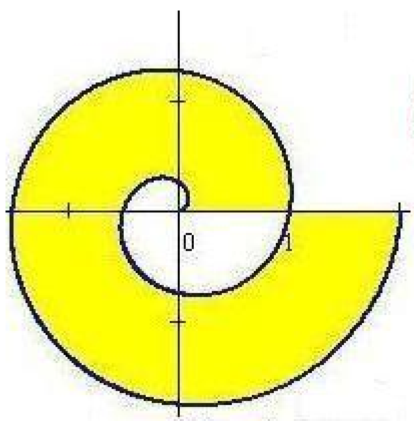


Рис. А

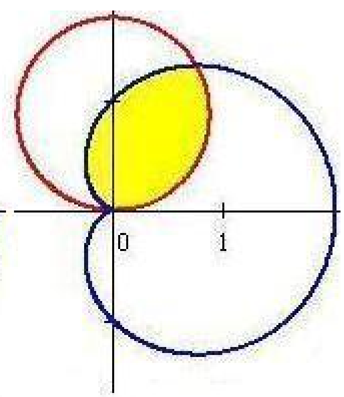


Рис. Б

7.5. Внутри кардиоиды $\rho = 1 + \cos\varphi$ и внутри окружности $\rho = \sqrt{3}\sin\varphi$ (рис. Б).

Вычислить площади фигур, ограниченных параметрически заданными кривыми:

7.6. Циклоидой $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ и прямой $y = \dfrac{2x}{\pi}$ (рис. В).

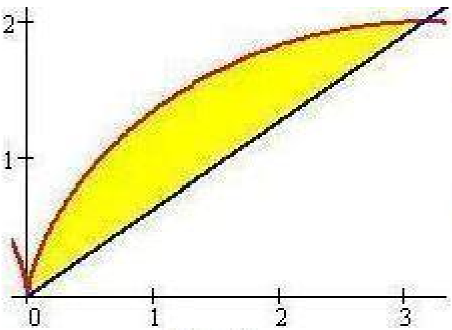


Рис. В

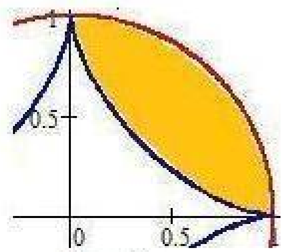


Рис. Г

7.7. Между $\{x = \cos^3 t,\, y = \sin^3 t\}$ и $\{x = \cos t,\, y = \sin t\}$ в первой четверти (рис. Г).

Объемы

Определение 8.1. Пусть $B \subset \mathbb{R}^3$ — тело. Его внутренний и внешний объемы определяются следующим образом:

$$V_*(B) = \sup\{V(M) : M \subset B\}; \quad V^*(B) = \inf\{V(M) : M \supset B\},$$

где M — конечные объединения многогранников. Если $V_*(B)$ и $V^*(B)$ совпадают, то говорят, что B **кубируемо** и его объем

$$V(B) = V_*(B) = V^*(B).$$

Метод плоских слоев

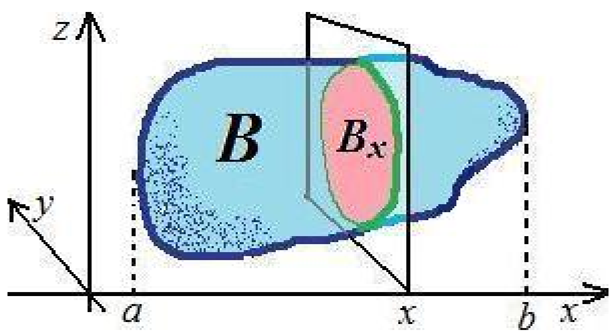
Пусть $B \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченное тело. Обозначим

$$a = \inf\{x : \ \exists(x; y; z) \in B\}, \quad b = \sup\{x : \ \exists(x; y; z) \in B\}.$$

Для каждого $x \in [a; b]$ определим множество

$$B_x = \{(y; z) : \ (x; y; z) \in B\},$$

т.е. сечение тела B плоскостью, параллельной Oyz. Поясним это на рисунке:



Теорема 8.1. *Пусть $B \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченное тело, для которого все сечения B_x квадрируемы и выполнено условие: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ разбиение $\{a_i\}$ отрезка $[a; b]$, такое, что*

$$S^*\Bigg(\bigcup_{a_{i-1} \leqslant x \leqslant a_i} B_x\Bigg) - S_*\Bigg(\bigcap_{a_{i-1} \leqslant x \leqslant a_i} B_x\Bigg) < \varepsilon. \tag{8}$$

Тогда B кубируемо и его объем

$$V(B) = \int\limits_a^b S(B_x)dx. \tag{9}$$

Доказательство. Введем функцию $\sigma(x) = S(B_x)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть $\{a_i\}_{i=0}^n$ — разбиение $[a;b]$, соответствующее ε. Для каждого слоя $\{a_{i-1} \leqslant x \leqslant a_i\}$ в силу условия (8) найдутся такие многоугольные фигуры M_i и M^i, что

$$\bigcup_{a_{i-1} \leqslant x \leqslant a_i} B_x \subset M^i; \qquad \bigcap_{a_{i-1} \leqslant x \leqslant a_i} B_x \supset M_i; \quad S(M^i) - S(M_i) < 2\varepsilon.$$

Тогда имеем $M_* \subset B \subset M^*$, где M^* и M_* — многогранные тела:

$$M^* = \bigcup_{i=1}^n \Big([a_{i-1}; a_i] \times M^i \Big), \quad M_* = \bigcup_{i=1}^n \Big([a_{i-1}; a_i] \times M_i \Big).$$

Получаем следующие цепочки неравенств:

$$V(M_*) \leqslant {}_*S_{\{a_i\}}(\sigma) \leqslant {}_a^bI_*(\sigma) \leqslant {}_a^bI^*(\sigma) \leqslant S^*_{\{a_i\}}(\sigma) \leqslant V(M^*);$$
$$V(M_*) \leqslant V_*(B) \leqslant V^*(B) \leqslant V(M^*).$$

Учитывая оценку

$$V(M^*) - V(M_*) < 2\varepsilon(b-a)$$

и произвольность выбора ε, получаем

$${}_a^bI_*(\sigma) = {}_a^bI^*(\sigma) = V_*(B) = V^*(B),$$

что полностью доказывает (9). □

Рассмотрим два важных частных случая.
Коническое тело. Пусть U — квадрируемая фигура в плоскости $\{x = H\}$, тело B есть объединение отрезков, соединяющих начало координат с точками U. Условие (8), очевидно, выполнено. По свойству подобных фигур $S(B_x) = \dfrac{x^2}{H^2} S(U)$, $0 \leqslant x \leqslant H$. Вычисляем объем

$$V(B) = \int\limits_0^H S(B_x)dx = \frac{S(U)}{H^2} \int\limits_0^H x^2 dx = \frac{S(U)}{H^2}\,\frac{H^3}{3} = \frac{H\,S(U)}{3}.$$

Тело вращения. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — непрерывные функции на $[a;b]$, $g(x) \geqslant f(x) \geqslant 0$. Будем вращать фигуру

$$\Phi_f^g = \{a \leqslant x \leqslant b; f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\}$$

вокруг оси Ox. Получится тело

$$B = \Big\{ (x;y;z): \ a \leqslant x \leqslant b; \ f(x) \leqslant \sqrt{y^2+z^2} \leqslant g(x) \Big\}.$$

Для него условие (8) выполнено; сечение B_x — кольцо (или круг при $f(x) = 0$) площадью $S(B_x) = \pi(g^2(x) - f^2(x))$. Следовательно, объем тела вращения

$$V(B) = \pi \int\limits_a^b \big(g^2(x) - f^2(x) \big)\, dx.$$

Далее будем изучать только тела вращения.

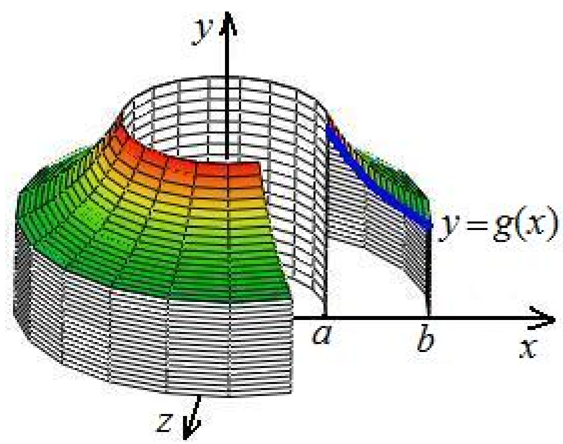
Метод цилиндрических слоев

Теорема 8.2. *Пусть тело B получено вращением фигуры Φ_0^g, где $g(x) \geqslant 0$ непрерывна на $[a;b]$, $b > a \geqslant 0$, вокруг оси Oy, т. е. оно имеет вид*

$$B = \{(x;y;z): \ a \leqslant \rho \leqslant b; \ 0 \leqslant y \leqslant g(\rho)\}, \quad \rho = \sqrt{x^2+z^2}.$$

Тогда B кубируемо и его объем

$$V(B) = 2\pi \int_a^b x \ g(x) \ dx. \tag{10}$$



Доказательство. Пусть $\{a_i\}_{i=0}^n$ — разбиение отрезка $[a;b]$. Рассмотрим объединения соосных цилиндрических слоев:

$$C_1 = \bigcup_{i=1}^n \left\{ \begin{array}{c} a_{i-1} \leqslant \rho \leqslant a_i \\ 0 \leqslant y \leqslant \inf\limits_{[a_{i-1};a_i]} g \end{array} \right\}, \ C_2 = \bigcup_{i=1}^n \left\{ \begin{array}{c} a_{i-1} \leqslant \rho \leqslant a_i \\ 0 \leqslant y \leqslant \sup\limits_{[a_{i-1};a_i]} g \end{array} \right\},$$

где $\rho = \sqrt{x^2+z^2}$. Тогда $C_1 \subset B \subset C_2$ и с учетом оценки

$$2a_{i-1}(a_i - a_{i-1}) \leqslant a_i^2 - a_{i-1}^2 \leqslant 2a_i(a_i - a_{i-1})$$

мы получим

$$V^*(B) \leqslant V(C_2) = \sum_{i=1}^n \pi \left(a_i^2 - a_{i-1}^2\right) \sup_{[a_{i-1};a_i]} g \leqslant 2\pi S^*_{\{a_i\}}(x\,g(x));$$

$$V_*(B) \geqslant V(C_1) = \sum_{i=1}^n \pi \left(a_i^2 - a_{i-1}^2\right) \inf_{[a_{i-1};a_i]} g \geqslant 2\pi \ {}_*S_{\{a_i\}}(x\,g(x)).$$

При $\operatorname{diam}\{a_i\} \to 0$ обе правые части стремятся к (10). $\square$

Пример 8.1.

Вычислим объем сектора Ω_θ^R, вырезаемого из шара радиуса R конусом с углом полураствора $\theta \leqslant \pi/2$ (рис. А). Он получается вращением кругового сектора

$$\left\{ \begin{array}{c} \rho \leqslant R \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \theta \end{array} \right\} = \left\{ 0 \leqslant y \leqslant R\sin\theta; \quad y\operatorname{ctg}\theta \leqslant x \leqslant \sqrt{R^2 - y^2} \right\}$$

вокруг оси Ox. Вычислим объем по формуле (10), поменяв ролями координаты x и y:

$$V(\Omega_\theta^R) = 2\pi \int\limits_0^{R\sin\theta} y\Big(\sqrt{R^2-y^2} - y\operatorname{ctg}\theta\Big)dy =$$

$$= 2\pi\left(-\frac{1}{3}(R^2-y^2)^{3/2} - \frac{y^3}{3}\operatorname{ctg}\theta\right)\Bigg|_0^{R\sin\theta} =$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left(-(R\cos\theta)^3 + R^3 - (R\sin\theta)^3\operatorname{ctg}\theta\right) =$$

$$= \frac{2\pi R^3}{3}(1-\cos\theta). \quad (11)$$

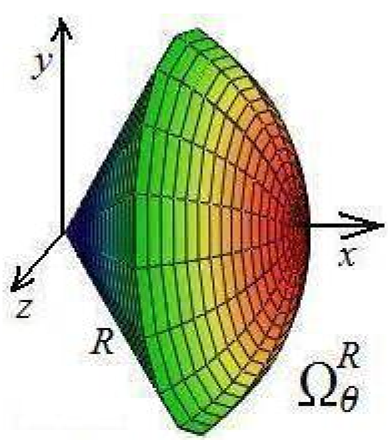


Рис. А

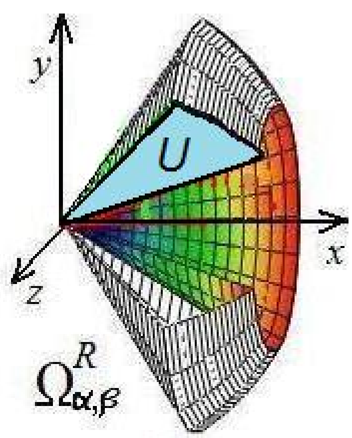


Рис. Б

Метод конических слоев

Нетрудно проверить, что формула (11) остается в силе и для $\theta = \pi/2$ (полушар), и для $\theta > \pi/2$ (невыпуклый шаровой сектор).

Пусть $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\psi = \arccos(x/r)$. Конический слой $\Omega_{\alpha;\beta}^R = \{\alpha \leqslant \psi \leqslant \beta;\ r \leqslant R\}$ получается вращением кругового сектора $U = \{\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta;\ \rho \leqslant R\}$ вокруг оси Ox (рис. Б). Его объем

$$V(\Omega_{\alpha;\beta}^R) = V(\Omega_\beta^R) - V(\Omega_\alpha^R) =$$

$$= \frac{2\pi R^3}{3}(\cos\alpha - \cos\beta) = \frac{2\pi R^3}{3}(\beta - \alpha)\sin\theta,$$

где $\theta \in (\alpha; \beta)$ существует по теореме Лагранжа.

Теорема 8.3. *Пусть $R(\psi)$ — непрерывная неотрицательная функция на отрезке $[\alpha;\beta] \subset [0;\pi]$. Тогда тело B, заданное условиями $\alpha \leqslant \psi \leqslant \beta$, $r \leqslant R(\psi)$, кубируемо, его объем*

$$V(B) = \frac{2\pi}{3} \int\limits_{\alpha}^{\beta} R^3(\psi) \sin\psi \; d\psi. \tag{12}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 8.2: по разбиению $\{a_i\}_{i=0}^n$ отрезка $[\alpha;\beta]$ строятся объединения конических слоев K_1 и K_2, такие, что $K_1 \subset B \subset K_2$:

$$K_1 = \bigcup_{i=1}^n \Omega_{a_{i-1};a_i}^{\inf\{R(\psi):\ a_{i-1} \leqslant \psi \leqslant a_i\}}; \qquad K_2 = \bigcup_{i=1}^n \Omega_{a_{i-1};a_i}^{\sup\{R(\psi):\ a_{i-1} \leqslant \psi \leqslant a_i\}};$$

их объемы оценим суммами Дарбу функции $\dfrac{2\pi}{3} R^3(\psi)\sin\psi$.

Пример 8.2.

Найдем объем тела, полученного вращением круга $x^2+(y-1)^2 < 1$ вокруг оси Ox. Это будет тор с дырой нулевого радиуса. Запишем уравнение круга в полярных координатах:

$$(\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi - 1)^2 = \rho^2 - 2\rho\sin\varphi < 0 \Longleftrightarrow \rho < 2\sin\varphi.$$

По формуле (12) получаем

$$V = \frac{2\pi}{3} \int\limits_{\alpha}^{\beta} (2\sin\varphi)^3 \sin\varphi \; d\varphi = \frac{2\pi}{3}\, 3\pi = 2\pi^2.$$

Задачи по теме лекции 8

Вычислить объемы тел, интегрируя площади горизонтальных сечений:

8.1. $\begin{cases} 0 < z < 1 - x^2, \\ 0 < y < 2 - z. \end{cases}$ **8.2.** $x^2 < y < z < 4$.

Вычислить объемы тел, полученных вращением следующих фигур:

8.3. $0 < y < \sin\dfrac{\pi x}{2}$, $0 < x < 2$ вокруг оси Oy.

8.4. $0 < y < x\sqrt{1-x}$ вокруг оси Ox (рис. А).

8.5. $\dfrac{2}{x-1} < y < 2 - x$ вокруг оси Ox (рис. Б).

8.6. Сегмент $(x-2)^2 + y^2 < 2$, $y > 1$ вокруг оси Oy.

8.7. $\rho < \sin 2\varphi$ $(y > 0)$ вокруг оси Ox.

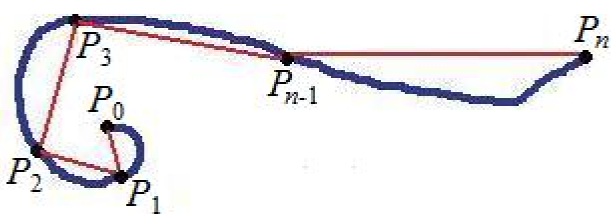
8.8. Кардиоида $\rho < 1 + \cos\varphi$ вокруг оси Ox.

Лекция № 9.
Длины кривых

Определение 9.1. **Кривой** в пространстве $\mathbb{R}^3$ (или на плоскости $\mathbb{R}^2$) называется множество вида
$$\ell = \{P(t) = (x(t); y(t); z(t)): \ t \in [\alpha; \beta]\}, \tag{13}$$
где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — непрерывные функции на $[\alpha; \beta]$.

Определение 9.2. Кривая называется **гладкой**, если существуют непрерывные $\dot{x} = x'(t)$, $\dot{y} = y'(t)$, $\dot{z} = z'(t)$, не обращающиеся в 0 одновременно (при $t = \alpha$ имеются в виду правые производные, при $t = \beta$ — левые).
Кривая называется **кусочно-гладкой**, если существуют такие t_j: $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = \beta$, что составляющие ее кривые $\{P(t): \ t \in [t_{j-1}; t_j]\}$ гладкие.

Определение 9.3. **Длина кривой** $L(\ell)$ есть супремум длин вписанных в нее ломаных $P_0P_1 \ldots P_n$, $P_i = P(t_i)$, т. е.
$$L(\ell) = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} |\overrightarrow{P_{i-1}P_i}|: \ \alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta\right\}.$$



Теорема 9.1. *Длина кусочно-гладкой кривой* (13)
$$L(\ell) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt = \mathcal{L}. \tag{14}$$

Доказательство. Поскольку при стыковке кривых длины складываются, достаточно доказать теорему для гладкой кривой. Пусть функции $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ непрерывны на $[\alpha; \beta]$. Тогда они равномерно непрерывны, поэтому $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$: если $s, t \in [\alpha; \beta]$, $|s - t| \leqslant \delta$, то
$$|\dot{x}(s) - \dot{x}(t)| + |\dot{y}(s) - \dot{y}(t)| + |\dot{z}(s) - \dot{z}(t)| < \varepsilon.$$
Возьмем разбиение $\{t_i\}_{i=0}^{n}$ отрезка $[\alpha; \beta]$ с диаметром $< \delta$ и построим ломаную $P_0P_1 \ldots P_n$ с концами в узлах разбиения. Оценим ее длину (обозначим $x_i = x(t_i)$

и т.д.). Имеем

$$L = L(P_0P_1\dots P_n) = \sum_{i=1}^{n} |\overrightarrow{P_{i-1}P_i}| =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 + (z_i - z_{i-1})^2}.$$

Применим теорему Лагранжа по отдельности к $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$; затем оценим L, применив неравенство

$$\left|\sqrt{a^2+b^2+c^2} - \sqrt{p^2+q^2+r^2}\right| \leqslant |a-p| + |b-q| + |c-r|.$$

$$L = \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})\sqrt{(\dot{x}(\xi_i))^2 + (\dot{y}(\eta_i))^2 + (\dot{z}(\zeta_i))^2} \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})\left(\sqrt{(\dot{x}(t_i))^2 + (\dot{y}(t_i))^2 + (\dot{z}(t_i))^2} - \varepsilon\right) =$$
$$= S_{\{t_i\}}^{\{t_i\}} - \varepsilon(\beta - \alpha),$$

где $S_{\{t_i\}}^{\{t_i\}}$ — интегральная сумма для интеграла (14), которая стремится к $\mathcal{L}$ при $\delta \to 0$. Следовательно, $L(\ell) \geqslant \mathcal{L}$. Аналогично доказывается, что

$$L(P_0P_1\dots P_n) \leqslant \mathcal{L} + \varepsilon \tag{15}$$

при достаточно малом $\operatorname{diam}\{t_i\}$. Но если $\operatorname{diam}\{t_i\}$ недостаточно мал, то в ломаную можно вписать ломаную из более мелких отрезков, длина которой не меньше исходной. Таким образом, оценка (15) верна для *любой* ломаной и *любого* $\varepsilon > 0$ $\Longrightarrow L(\ell) = \sup L(P_0P_1\dots P_n) \leqslant \mathcal{L}$. □

Следствие 9.1. *Если плоская кривая является графиком непрерывной функции $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, имеющей кусочно-непрерывную производную, то она кусочно-гладкая и ее длина*

$$L\{y = f(x), a \leqslant x \leqslant b\} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \tag{16}$$

Доказательство. Подставим в формулу (14) $x = t$, $y = = f(t)$, $z = 0$. □

Следствие 9.2. *Если плоская кривая ℓ задана в полярных координатах: $\rho = R(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, и функция $R(\varphi) \geqslant 0$ имеет кусочно-непрерывную производную, то она кусочно-гладкая и ее длина*

$$L(\ell) = \int_\alpha^\beta \sqrt{R^2(\varphi) + (R'(\varphi))^2}\, d\varphi. \tag{17}$$

Доказательство. Подставив в формулу (14) $\varphi = t$, получаем

$$\begin{cases} x = R(t)\cos t, \\ y = R(t)\sin t, \\ z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = \dot{R}\cos t - R\sin t, \\ \dot{y} = \dot{R}\sin t + R\cos t, \\ \dot{z} = 0, \end{cases}$$

откуда $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{R^2 + \dot{R}^2}$. □

Пример 9.1.

Найти длину участка графика $y = e^x$ от $x = 0$ до $x = 1$. По формуле (16) получаем

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}}dx = \left[\begin{array}{c} x = \ln y \\ dx = dy/y \end{array} \right] = \int_1^e \frac{\sqrt{1+y^2}}{y}dy =$$

$$= \int_1^e \frac{1+y^2}{y\sqrt{1+y^2}}dy = \int_1^e \frac{dy}{y\sqrt{1+y^2}} + \int_1^e \frac{y\ dy}{\sqrt{1+y^2}} =$$

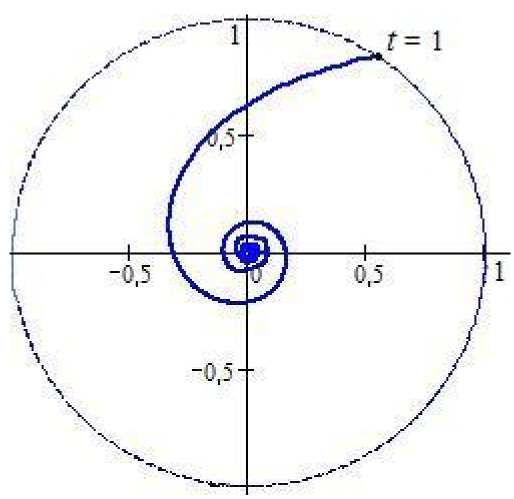
[в первом интеграле замена $t = 1/y$, во втором $z = 1 + y^2$]

$$= -\int_1^{1/e} \frac{dt}{t^2\,t^{-1}\sqrt{1+t^{-2}}} + \int_2^{1+e^2} \frac{dz}{2\sqrt{z}} = \int_{1/e}^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} + \sqrt{z}\Big|_2^{1+e^2} =$$

$$= \ln(1+\sqrt{2}) - \ln(e^{-1} + \sqrt{1+e^{-2}}) + \sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} \approx 2{,}003.$$

Пример 9.2.

Найти длину части гиперболической спирали $\{\rho = \varphi^{-1}\}$, лежащую в круге $\{\rho \leqslant 1\}$. Условию $\rho \leqslant 1$ отвечает φ из $[1; +\infty)$.



Рассмотрим участок с $\varphi \in [1;T]$. По формуле (17)

$$L = \int\limits_1^T \sqrt{\varphi^{-2} + \varphi^{-4}} d\varphi = \int\limits_1^T \frac{\sqrt{\varphi^2+1}}{\varphi^2} d\varphi =$$

$$= \int\limits_1^T \frac{d\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} + \int\limits_1^T \frac{d\varphi}{\varphi^2\sqrt{1+\varphi^2}} =$$

[во втором интеграле делаем замену $t = 1/\varphi$]

$$= \ln(T + \sqrt{T^2+1}) - \int\limits_1^{1/T} \frac{tdt}{\sqrt{t^2+1}} =$$

$$= \ln(T + \sqrt{T^2+1}) - \sqrt{T^{-2}+1} + \sqrt{2}.$$

При $T \to +\infty$ эта длина неограниченно растет.

Ответ: длина спирали бесконечна.

Задачи по теме лекции 9

Вычислить длины кривых:

9.1. Дуга параболы $y = (x-1)(3-x) \geqslant 0$.

9.2. Виток логарифмической спирали $\rho = e^{\varphi/4}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

9.3. Кардиоида $\rho = 1 + \cos\varphi$.

9.4. Пространственная кривая $y = x^2$, $z = \dfrac{2x^3}{3}$, $0 \leqslant x \leqslant 2$.

9.5. Виток винтовой линии $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = kt$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

9.6. Доказать, что длина эллипса с полуосями 1 и $\sqrt{2}$ равна длине синусоиды $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

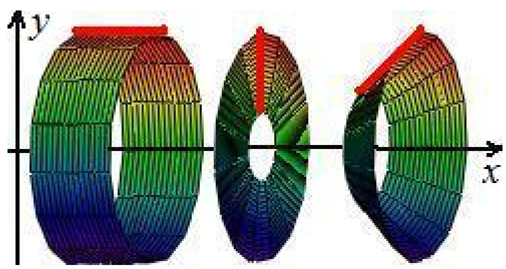
Лекция № 10.
Площади поверхностей вращения

Пусть поверхность Σ получена вращением вокруг оси Ox гладкой несамопересекающейся кривой
$$\ell = \{x = x(t), y = y(t), \alpha \leqslant t \leqslant \beta\},$$
расположенной в полуплоскости $\{(x; y) \ : \ y \geqslant 0\}$. Интуитивно понятно, что площадь Σ равна пределу площадей поверхностей $\Sigma_{\{t_i\}}$, полученных вращением ломаных
$$P_0P_1 \dots P_n, \quad P_i = (x(t_i); y(t_i)) = (x_i; y_i),$$
вокруг оси Ox:
$$S(\Sigma_{\{t_i\}}) \to S(\Sigma) \quad \text{при} \quad \operatorname{diam}\{t_i\} \to 0.$$
Найдем площадь поверхности Σ_{AB}, полученной вращением отрезка AB вокруг Ox. Она может иметь разный вид:

если $y_A = y_B$, то цилиндр, $S = 2\pi y_A\, |x_A - x_B|$;

если $y_A > y_B$, $x_A = x_B$, то круг (при $y_B > 0$ — с круглой дырой), $S = \pi(y_A^2 - y_B^2)$;

если $y_A > y_B$, $x_A \neq x_B$, то боковая поверхность конуса (при $y_B > 0$ — усеченного), $S = \pi(y_A + y_B)|\vec{AB}|$.



Во всех трех случаях верна формула
$$S(\Sigma_{AB}) = \pi(y_A + y_B)\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$
Следовательно, площадь поверхности $\Sigma_{\{t_i\}}$
$$S(\Sigma_{\{t_i\}}) = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} =$$
$$= 2\pi \sum_{i=1}^{n} y(\theta_i) \sqrt{(\dot{x}(\xi_i))^2 + (\dot{y}(\eta_i))^2}\ (t_i - t_{i-1}), \quad \theta_i, \xi_i, \eta_i \in (t_{i-1}; t_i)$$
при $\operatorname{diam}\{t_i\} \to 0$ стремится к
$$S(\Sigma) = 2\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\ dt. \tag{18}$$

Следствие 10.1. *Если плоская кривая является графиком непрерывной функции $y = f(x) \geqslant 0$, $a \leqslant x \leqslant b$, имеющей непрерывную производную, то площадь поверхности, полученной вращением ее вокруг оси Ox,*

$$S\{a\leqslant x\leqslant b;\ \sqrt{y^2+z^2}=f(x)\} = 2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Если (при $a \geqslant 0$) вращать ту же кривую вокруг оси Oy, то получим площадь

$$S\{a\leqslant\rho=\sqrt{x^2+z^2}\leqslant b;\ y=f(\rho)\} = 2\pi\int\limits_a^b x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Доказательство. Подставим в формулу (18) $x = t$, $y = = f(t)$. Только во втором случае x и y в ней поменяются ролями. □

Следствие 10.2. *Если плоская кривая задана в полярных координатах: $\rho = R(\varphi)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta \leqslant \pi$, и функция $R(\varphi) \geqslant 0$ имеет непрерывную производную, то площадь поверхности Σ, полученной вращением ее вокруг оси Ox,*

$$S(\Sigma) = 2\pi\int\limits_\alpha^\beta R(\varphi)\sin\varphi\sqrt{R^2(\varphi)+(R'(\varphi))^2}\ d\varphi.$$

Доказательство. Подставим в формулу (18) $\varphi = t$, тогда $x = R(t)\cos t$, $y = R(t)\sin t \geqslant 0$. □

Пример 10.1.

Длина дуги ℓ гиперболы $y = 1/x$, $1 \leqslant x \leqslant b$, выражается неберущимся интегралом $\int\limits_1^b \sqrt{1+x^{-4}}\,dx$.

Если же мы будем вычислять площадь поверхности Σ, полученной вращением ℓ вокруг оси Ox, то сможем выразить интеграл аналитически:

$$S(\Sigma) = 2\pi\int\limits_1^b \frac{1}{x}\sqrt{1+x^{-4}}\ dx =$$

$[u=\sqrt{1+x^{-4}} \Longrightarrow x=(u^2-1)^{-1/4};\ dx=-\dfrac{1}{2}(u^2-1)^{-5/4}udu]$

$$= -\pi\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+b^{-4}}} \frac{u^2du}{u^2-1} = \frac{\pi}{2}\left(2u+\ln\frac{u-1}{u+1}\right)\Bigg|_{\sqrt{1+b^{-4}}}^{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(2\sqrt{2}+\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} - 2\sqrt{1+b^{-4}} - \ln\frac{\sqrt{1+b^{-4}}-1}{\sqrt{1+b^{-4}}+1}\right).$$

Задачи по теме лекции 10

Вычислить площади поверхностей, полученных вращением следующих кривых:

10.1. Дуга параболы из задачи 9.1 вокруг оси Oy.

10.2. Кардиоида из задачи 9.3 вокруг оси Ox.

10.3. $y = \operatorname{tg} x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/3$, вокруг оси Ox.

10.4. Дуга циклоиды $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, вокруг оси Oy.

10.5. Сферу радиусом R пересекают две параллельные плоскости, расстояние между которыми D. Найти площадь части сферы, лежащей между плоскостями.

Лекция № 11.

Физические приложения определенных интегралов

При помощи определенного интеграла вычисляют полное значение аддитивной скалярной физической величины, если известна плотность ее распределения (линейная, поверхностная или объемная) и эта плотность зависит лишь от одной координаты. Примеры скалярных физических величин: масса, заряд, энергия (потенциальная, кинетическая, тепловая), статический момент, момент инерции, время движения, одна из компонент силы, действующей на тело (давление, притяжение) или вызываемой этим телом, момент такой силы.

1. Гладкая кривая. Пусть кривая задана в виде

$$\ell = \{(x(t); y(t); z(t)) : \ t \in [\alpha; \beta]\},$$

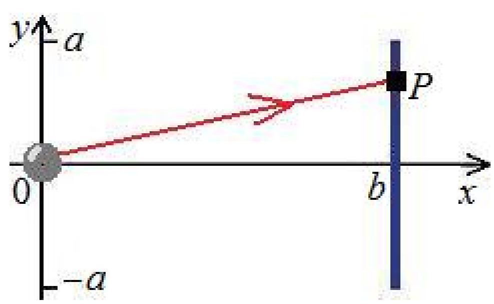
и на ней аддитивная величина M имеет линейную плотность распределения $\tau(t)$. Полное значение M и среднее значение τ (средняя линейная плотность) вычисляются так:

$$M(\ell) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \tau(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt;$$

$$\overline{\tau} = \frac{M(\ell)}{L(\ell)}.$$

Пример 11.1.

С какой силой $\vec{F}$ масса 1 кг в точке $O(0;0;0)$ притягивается стержнем $\{x = b;\ z = 0;\ |y| \leqslant a\}$ с постоянной линейной плотностью τ(кг/м)?



Из симметрии следует $F_y = F_z = 0$. Масса m в точке $P(x;y;z)$ притягивает точку O с силой $\dfrac{Gm}{|\vec{OP}|^3}\vec{OP}$. Следовательно, плотность распределения F_x равна

$\dfrac{G\tau b}{(b^2+y^2)^{3/2}}$. Таким образом,

$$F_x = G\tau b\int\limits_{-a}^{a}\frac{dy}{(b^2+y^2)^{3/2}} = \left[y = b\operatorname{tg} t;\ dy = \frac{b\ dt}{\cos^2 t}\right] =$$

$$= G\tau b\int\limits_{-\operatorname{arctg}(a/b)}^{\operatorname{arctg}(a/b)}\frac{\cos t\ dt}{b^2} = \frac{G\tau}{b}\,2\sin\operatorname{arctg}\frac{a}{b} = \frac{2a\ G\ \tau}{b\sqrt{b^2+a^2}}.$$

2. Плоская пластина. Если пластина Π имеет вид

$$\{a \leqslant x \leqslant y;\ f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\},$$

где $g(x) \geqslant f(x)$ кусочно-непрерывны, и величина M имеет поверхностную плотность распределения $\sigma(x)$, то полное значение M и среднее значение σ вычисляются так:

$$M(\Pi) = \int\limits_a^b (g(x)-f(x))\sigma(x)dx;\quad \overline{\sigma} = \frac{M(\Pi)}{S(\Pi)}. \tag{19}$$

3. Трехмерное тело. Пусть B — кубируемое тело, пусть $a = \min\limits_B x$, $b = \max\limits_B x$, B_x — сечения B плоскостями, параллельными Oyz; величина M имеет пространственную плотность распределения $\gamma(x)$. Тогда полное значение M и среднее значение γ вычисляются так:

$$M(B) = \int\limits_a^b S(B_x)\gamma(x)dx;\quad \overline{\gamma} = \frac{M(B)}{V(B)}. \tag{20}$$

Пример 11.2.

За какое время вода вытечет из конической воронки высотой H и радиусом R, если скорость вытекания $C\sqrt{z}$ (м^3/c); z — глубина, C — заданная константа? Представим воронку в виде

$$B = \left\{\sqrt{x^2+y^2} \leqslant \frac{Rz}{H};\ 0 \leqslant z \leqslant H\right\}.$$

Время вытекания воды T имеет пространственную плотность $\gamma = (C\sqrt{z})^{-1}$. По формуле (20) получаем

$$T = \int\limits_0^H \frac{S(B_z)}{C\sqrt{z}}dz = \int\limits_0^H \frac{\pi R^2 z^2}{H^2 C\sqrt{z}}dz = \frac{\pi R^2}{H^2 C}\int\limits_0^H z^{3/2}dz = \frac{2\pi R^2\sqrt{H}}{5C}.$$

Важные приложения кратных интегралов — вычисление **моментов и центров масс**. Если дана плотность распределения массы ϱ (линейная, поверхностная или объемная), то статические моменты и моменты инерции имеют соответствующие плотности распределения:

$$\begin{array}{llllll} M_x & \text{плотность} & x\,\varrho; & J_{Ox} & \text{плотность} & (y^2+z^2)\varrho; \\ M_y & \text{плотность} & y\,\varrho; & J_{Oy} & \text{плотность} & (x^2+z^2)\varrho; \\ M_z & \text{плотность} & z\,\varrho; & J_{Oz} & \text{плотность} & (x^2+y^2)\varrho. \end{array}$$

Если получается плотность, зависящая от одной координаты, то момент можно вычислить через интеграл. Центр масс имеет координаты $x_c = \dfrac{M_x}{M}$, $y_c = \dfrac{M_y}{M}$, $z_c = \dfrac{M_z}{M}$.

Пример 11.3.

Найти центр масс полушара постоянной плотности. Зададим полушар в виде

$$0 \leqslant x \leqslant R, \quad \sqrt{y^2+z^2} \leqslant \sqrt{R^2-x^2}.$$

Будем считать, что плотность $= 1$ (результат от нее не зависит). Из симметрии очевидно, что $y_c = z_c = 0$. Вычислим массу M и статический момент M_x:

$$M = \pi\int\limits_0^R (R^2-x^2)dx = \pi\Big(R^2x - \frac{x^3}{3}\Big)\Big|_0^R = \frac{2}{3}\pi R^3,$$

$$M_x = \pi\int\limits_0^R (R^2-x^2)x\;dx = \pi\Big(\frac{R^2x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\Big)\Big|_0^R = \frac{\pi R^4}{4},$$

отсюда $x_c = \dfrac{M_x}{M} = \dfrac{3}{8}R$.

Ответ: $C(3R/8;0;0)$.

Пример 11.4.

Найти момент инерции круглой пластины радиусом R и постоянной плотности 1кг/м^2 относительно ее диаметра. Представим пластину в виде $\{|y| \leqslant \sqrt{R^2-x^2}\}$ и выберем диаметр, лежащий на оси Oy. Плотность распределения J_{Oy} равна $x^2+z^2 = x^2$. По формуле (19)

$$J_{Oy} = \int\limits_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2-x^2}\;x^2dx = \quad [\text{подстановка } x = R\sin t]$$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} 2R^4\cos^2 t\sin^2 t\;dt = \frac{R^4}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2 2t\;dt = \frac{\pi R^4}{4}\ (\text{кг}\cdot\text{м}^2).$$

Следующие две *теоремы Гульдена* бывают полезны при вычислении объемов тел вращения и площадей поверхностей вращения.

Теорема 11.1. *Объем тела B, полученного вращением вокруг оси Oy квадрируемой фигуры Φ, расположенной в правой полуплоскости, равен $V(B) = 2\pi S(\Phi)x_c$, где C — центр масс Φ, если ее поверхностная плотность $\equiv 1$.*

Доказательство. Для $\Phi = \{a \leqslant x \leqslant b;\ f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\}$ получим

$$S(\Phi)x_c = M_x(\Phi) = \int_a^b x(g(x) - f(x))dx = \frac{V(B)}{2\pi}.$$

Если Φ склеена из нескольких фигур такого вида, то и статические моменты, и объемы сложатся. □

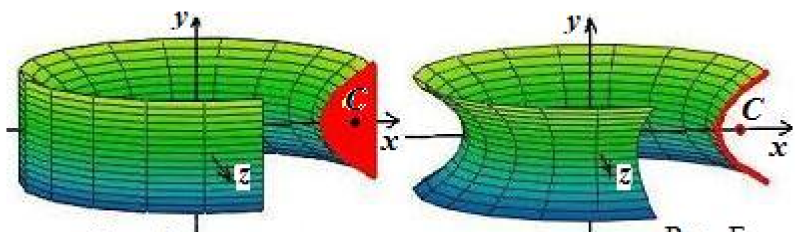


Рис. А Рис. Б

Теорема 11.2. *Площадь поверхности Σ, полученной вращением вокруг оси Oy кусочно-гладкой кривой ℓ, расположенной в правой полуплоскости, равна $S(\Sigma) = 2\pi L(\ell)x_c$, где C — центр масс ℓ, если ее линейная плотность $\equiv 1$.*

Доказательство. Пусть $\ell = \{(x(t); y(t)) \ :\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$. Линейная плотность распределения M_x равна x, поэтому $L(\ell)x_c = M_x(\ell) = \displaystyle\int_\alpha^\beta x(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt = \frac{S(\Sigma)}{2\pi}$. □

Пример 11.5.

Дан тор, полученный вращением окружности радиусом r с центром $C(R; 0)$, $R \geqslant r > 0$, вокруг оси Oy. Центры масс окружности и круга совпадают с C. Следовательно, объем и площадь поверхности тора

$$V = 2\pi \cdot \pi r^2 \cdot R = 2\pi^2 R r^2; \quad S = 2\pi \cdot 2\pi r \cdot R = 4\pi^2 R r.$$

Задачи по теме лекции 11

11.1. Какую работу надо совершить, чтобы выкачать жидкость плотностью ϱ из резервуара в форме конуса вершиной вниз с высотой H и радиусом основания R ?

11.2. Из конического резервуара вершиной вниз через отверстие в вершине вода вытекла за $T = 1$ ч. Через какое время после начала вытекания уровень воды понизился наполовину?

11.3. Два одноименно заряженных шарика находились на расстоянии 1 м и отталкивались с силой 1 Н. Какую работу надо совершить, чтобы придвинуть один шарик к другому на расстояние 0,1 м ?

11.4. Найти момент инерции пластины в форме равностороннего треугольника со стороной a и массой M относительно его медианы.

Найти центры масс следующих тел:

11.5. Конус с радиусом основания R и высотой H, плотность пропорциональна расстоянию от основания. Поместить начало координат в центр основания, вершина на оси Oz.

11.6. Усеченный конус с радиусами оснований $R > r$ и высотой h, плотность постоянна. Поместить начало координат в центр большого основания, ось конуса на оси Oz.

11.7. Проверить по теоремам Гульдена результаты задач 8.3 и 10.1.

Лекция № 12.
Несобственные интегралы

Обычный интеграл Римана применим только для *ограниченных* функций на *ограниченных* промежутках. Несобственные интегралы позволяют расширить возможности интегрирования: 1-го рода — на неограниченные промежутки, 2-го рода — на неограниченные функции.

Определение 12.1. *Пусть функция $f(x)$ интегрируема на каждом отрезке $[a;\beta]$, $\beta > a$.* **Несобственным интегралом 1-го рода** *по лучу $[a;+\infty)$ называется предел*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\beta\to+\infty}\int\limits_a^{\beta} f(x)dx.$$

Если этот предел существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл **сходится**, *если бесконечен или не существует, то —* **расходится**.

Аналогично определяется несобственный интеграл 1-го рода по лучу $(-\infty;b]$:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{\alpha\to-\infty}\int\limits_{\alpha}^{b} f(x)dx.$$

Будем называть *особыми точками* точки разрыва 2-го рода функции $f(x)$.

Определение 12.2. *Пусть функция $f(x)$ интегрируема на каждом отрезке $[a;\beta]$, $a < \beta < b$.* **Несобственным интегралом 2-го рода** *по отрезку $[a;b]$ с особой точкой b называется предел*

$$\int\limits_a^{b} f(x)dx = \lim_{\beta\to b-0}\int\limits_a^{\beta} f(x)dx.$$

Если этот предел существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл **сходится**, *если бесконечен или не существует, то —* **расходится**.

Аналогично определяется несобственный интеграл 2-го рода по отрезку $[a;b]$ с особой точкой a:

$$\int\limits_a^{b} f(x)dx = \lim_{\alpha\to a+0}\int\limits_{\alpha}^{b} f(x)dx.$$

Пример 12.1.

Интеграл степенной функции по $[1;+\infty)$:

$$\int\limits_1^{+\infty} x^{-1}\ dx = \lim_{\beta\to+\infty}\int\limits_1^{\beta} x^{-1}\ dx = \lim_{\beta\to+\infty}(\ln\beta - \ln 1) = +\infty;$$

$$\int\limits_1^{+\infty} x^p\ dx = \lim_{\beta\to+\infty}\int\limits_1^{\beta} x^p\ dx = \lim_{\beta\to+\infty}\frac{\beta^{p+1}-1}{p+1} =$$

$$= \begin{cases} |p+1|^{-1} & \text{при } p < -1 \\ +\infty & \text{при } p > -1. \end{cases}$$

Интеграл сходится при $p < -1$, расходится при $p \geqslant -1$.

Пример 12.2.

Исследуем на сходимость интеграл степенной функции по отрезку $[0;1]$. При $p < 0$ точка 0 — особая.

$$\int\limits_0^1 x^{-1}\ dx = \lim_{\alpha\to+0}\int\limits_\alpha^1 x^{-1}\ dx = \lim_{\alpha\to+0}(\ln 1 - \ln\alpha) = +\infty;$$

$$\int\limits_0^1 x^p\ dx = \lim_{\alpha\to+0}\int\limits_\alpha^1 x^p\ dx = \lim_{\alpha\to+0}\frac{1-\alpha^{p+1}}{p+1} =$$

$$= \begin{cases} (p+1)^{-1} & \text{при } p > -1 \\ +\infty & \text{при } p < -1. \end{cases}$$

Интеграл сходится при $p > -1$, расходится при $p \leqslant -1$.

Пример 12.3.

Интеграл убывающей экспоненты сходится: при $0 < A < < 1$ получим

$$\int\limits_0^{+\infty} A^x\ dx = \lim_{\beta\to+\infty}\int\limits_0^{\beta} A^x\ dx = \lim_{\beta\to+\infty}\frac{A^\beta-1}{\ln A} = \frac{-1}{\ln A}.$$

Но не всегда бывает возможно проверить сходимость интеграла непосредственно. Рассмотрим основные признаки сходимости. Для простоты формулировок ограничимся случаем несобственного интеграла 1-го рода по лучу $[a;+\infty)$: случаи $(-\infty;b]$ и 2-го рода аналогичны.

Лемма 12.1. Критерий Коши. *Несобственный интеграл сходится в том и только том случае, если*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N > a:\quad \forall\gamma > \beta \geqslant N\quad \left|\int\limits_\beta^\gamma f(x)dx\right| < \varepsilon. \tag{21}$$

Доказательство. Условие (21) равносильно критерию Коши существования конечного предела $\lim\limits_{\beta\to+\infty} F(\beta)$ для функции

$$F(\beta) = \int\limits_a^\beta f(x)dx.$$

$\square$

Из критерия Коши вытекает, что сходимость несобственного интеграла не зависит от поведения $f(x)$ на начальном отрезке $[a;A]$, какое бы $A>a$ мы ни зафиксировали.

Определение 12.3. Несобственный интеграл от функции $f(x)$ **сходится абсолютно**, если сходится такой же интеграл от функции $|f(x)|$.

Лемма 12.2. *Если несобственный интеграл от функции $f(x)$ сходится абсолютно, то он сходится.*

Доказательство. Если интеграл $\displaystyle\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ сходится, то по критерию Коши $\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,N>a:$

$$\forall\gamma>\beta\geqslant N\quad \varepsilon>\int_\beta^\gamma|f(x)|dx\geqslant\left|\int_\beta^\gamma f(x)dx\right|.$$

Таким образом, условие критерия Коши выполнено и для интеграла от $f(x)$. □

Определение 12.4. Несобственный интеграл от функции $f(x)$ **сходится условно**, если он сходится, но такой же интеграл от функции $|f(x)|$ расходится.

Лемма 12.3. Признак сравнения. *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на каждом $[a;\beta]$ и $g(x)\geqslant f(x)\geqslant 0$ на $[A;+\infty)$ при некотором $A>a$. Тогда*

$$\int_a^{+\infty}g(x)dx\ \text{сходится}\Longrightarrow\int_a^{+\infty}f(x)dx\ \text{сходится}.$$

Доказательство. Если условие критерия Коши выполнено для $g(x)$, то оно выполнено и для $f(x)$. □

Следствие 12.1. Предельный признак сравнения.
Пусть $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на каждом $[a;\beta]$,
$g(x)\geqslant 0$, $f(x)\geqslant 0$ и $f(x)\sim g(x)$ при $x\to+\infty$. Тогда

$$\int\limits_a^{+\infty}g(x)dx\ \text{сходится}\Longleftrightarrow\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx\ \text{сходится}.$$

Доказательство. $\exists N{>}a$: $\displaystyle\left|\frac{f(x)}{g(x)}-1\right|<\frac{1}{2}$ при $x\geqslant N$. Тогда можно применить лемму 12.3 к неравенствам
$f(x)<2g(x)$ и $g(x)<2f(x)$. □

Пример 12.4.

Проверим на сходимость интеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$. Интеграл неберущийся. Применим признак сравнения. При $x\geqslant 1$ имеем $e^{-x^2}\leqslant e^{-x}$;

$$\int\limits_0^{+\infty}e^{-x}dx\ \ \text{сходится}\Longrightarrow\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\ \ \text{сходится}.$$

Пример 12.5.

Исследуем интеграл
$$\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{2^x-4}}.$$
В окрестности особой точки 2 применим предельный признак сравнения, вспомнив эквивалентность $a^t - 1 \sim t\ln a$ при $t \to 0$. При $x \to 2$ имеем
$$2^x - 4 = 4(2^{x-2}-1) \sim 4\ln 2\,(x-1);$$
$$\frac{1}{2\sqrt{\ln 2}} \int\limits_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} \text{ сходится} \Longrightarrow \int\limits_2^5 \frac{dx}{\sqrt{2^x-4}} \text{ сходится.}$$

Пример 12.6.

Интеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ сходится условно.

Действительно, интеграл от модуля функции расходится:
$$\int\limits_0^{\pi N} \frac{|\sin x|}{x} dx \geqslant \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{\pi(n-1)}^{\pi n} \frac{|\sin x|}{\pi n} dx = \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{\pi n} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \int\limits_n^{n+1} \frac{dx}{x} = \frac{2}{\pi} \int\limits_1^{N+1} \frac{dx}{x} = \frac{2\ln(N+1)}{\pi} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$
Теперь при $\beta > \pi/2$ применим формулу интегрирования по частям:
$$\int\limits_{\pi/2}^{\beta} \frac{-d\cos x}{x} = \frac{-\cos x}{x}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\beta} + \int\limits_{\pi/2}^{\beta} \cos x \,\frac{-dx}{x^2} \underset{\beta\to+\infty}{\longrightarrow} 0 - \int\limits_{\pi/2}^{+\infty} \cos x\,\frac{dx}{x^2}.$$
Этот предел существует и конечен, поскольку несобственный интеграл $\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x\ dx}{x^2}$ абсолютно сходится по признаку сравнения: $\left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right| \leqslant x^{-2}$ (см. пример 12.1). На отрезке же $[0;\pi/2]$ функция $\sin x/x$ интегрируема.

Пример 12.7.

«Парадокс маляра». Пусть половина ветви гиперболы $\{y = 1/x,\ x \geqslant 1\}$ вращается вокруг своей асимптоты Ox (см. рис. на с. 63). Вычислим внутренний объем получающейся трубы:
$$V_* = \sup_{\beta>1} \int\limits_1^{\beta} \frac{\pi}{x^2} dx = \pi \lim_{\beta\to+\infty} \left(-\frac{1}{\beta} + \frac{1}{1}\right) = \pi < +\infty.$$

Вычислим площадь боковой поверхности:

$$S = 2\pi \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^b \frac{1}{x}\sqrt{1+x^{-4}}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} \lim_{b\to+\infty} \left(2\sqrt{1+x^{-4}} + \ln\frac{\sqrt{1+x^{-4}}-1}{\sqrt{1+x^{-4}}+1} \right)\Bigg|_b^1 = +\infty.$$

Доказать расходимость этого интеграла можно и без точного вычисления: при $x \to +\infty$ имеем $\dfrac{1}{x}\sqrt{1+x^{-4}} \sim \dfrac{1}{x}$ и применим предельный признак сравнения.

Перейдем к рассмотрению **составных несобственных интегралов**. Пусть I — замкнутый промежуток, а функция $f(x)$ имеет на I конечное множество особых точек. Составной несобственный интеграл функции f по I определяется следующим образом.

Разобьем I на отрезки $[a_{k-1}; a_k]$, каждый из которых содержит лишь одну особую точку, являющуюся его концом, а также лучи, если:

I не ограничен слева, то $(-\infty; a_0]$ без особых точек;

I не ограничен справа, то $[a_N; +\infty)$ без особых точек.

Рассмотрим несобственные интегралы 2-го рода по отрезкам и 1-го рода по лучам. Если все интегралы сходятся, то говорят, что $\int\limits_I f(x)dx$ сходится и равен их сумме (способ разбиения не влияет на результат: передвинуть неособую точку разбиения из a в b означает вычесть $\int\limits_a^b f(x)dx$ из одного слагаемого и прибавить столько же к другому). Если одно из слагаемых расходится, то $\int\limits_I f(x)dx$ расходится.

Пример 12.8.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+x^5}} = \left(\int\limits_{-\infty}^{-1} + \int\limits_{-1}^{0} + \int\limits_{0}^{1} + \int\limits_{1}^{+\infty} \right) \frac{dx}{\sqrt[3]{x+x^5}}.$$

Все четыре интеграла абсолютно сходятся по предельному признаку сравнения: при $x \to 0$ $\left|(x+x^5)^{-1/3}\right| \sim |x|^{-1/3}$, при $x \to \infty$ $\left|(x+x^5)^{-1/3}\right| \sim |x|^{-5/3}$. Подынтегральная функция нечетна, поэтому интеграл от $-\infty$ до $+\infty$ равен 0.

Задачи по теме лекции 12

Исследовать на сходимость несобственные интегралы. Если функция знакопеременная, выяснить, сходится интеграл абсолютно или условно.

Несобственные интегралы 1-го рода:

12.1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{x^2+5}dx.$ **12.2.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2(x+2)}.$

12.3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x^3+8}}\,dx$. **12.4**. $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{\ln x}\,dx$.

Несобственные интегралы 2-го рода:

12.5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2x-x^2}}$. **12.6**. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{x\ln x}$.

12.7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}$. **12.8**. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\ln\cos x}$.

Составные несобственные интегралы:

12.9. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x\ln^2 x}$. **12.10**. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

12.11. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$. **12.12**. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^3-1}$.

Ответы к задачам

1.1. $\dfrac{3}{10}(5x+1)^{2/3}+C$. **1.2.** $\dfrac{1}{9}(x+2)^9-\dfrac{1}{4}(x+2)^8+C$.
1.3. $C-e^{-x^2/2}$. **1.4.** $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$. **1.5.** $\dfrac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x+C$.
1.6. $\dfrac{1}{2}\Big(\ln(1+x^2)-\operatorname{arctg}^2 x\Big)+C$ (для двух слагаемых разные замены).
1.7. $\dfrac{1}{3}(2\ln x+1)^{3/2}+C$. **1.8.** $x\arcsin x+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}+C$.
1.9. $x\operatorname{arctg} x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$.
1.10. $\Big(-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{4}\Big)\cos 2x+\dfrac{x}{2}\sin 2x+C$.
1.11. $\big(x^3-3x^2+6x-6\big)e^x+C$. **1.12.** $\operatorname{tg} x\ln\sin x-x+C$.

2.1. $\dfrac{1}{2}\ln(x^2-2x+10)-\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{3}+C$.
2.2. $\ln|x+1|-\ln|x|-\dfrac{1}{x}+C$.
2.3. $-\dfrac{5}{4}\ln|x|+\dfrac{7}{8}\ln|x-2|+\dfrac{3}{8}\ln|x+2|+C$.
2.4. $\dfrac{1}{12}\ln|x-2|-\dfrac{1}{24}\ln(x^2+2x+4)-\dfrac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{\sqrt{3}}+C$.
2.5. $-\dfrac{x}{4}+\dfrac{3\ln|x|+13\ln|x+4|}{16}+C$.
2.6. $\dfrac{x^2}{2}+2x-\dfrac{1}{2}\ln(x^2-2x+5)-\dfrac{11}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{2}+C$.
2.7. $x+\ln\Big|\dfrac{x-1}{x+1}\Big|+C$.
2.8. $x+\dfrac{1}{x-1}-4\ln|x-1|+8\ln|x-2|+C$.
2.9. $\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{9x^2}{2}+\dfrac{81}{2}\ln(x^2+9)+C$.
2.10. $\dfrac{x^2}{2}+6x+\dfrac{1}{2}\ln|x-1|-16\ln|x-2|+\dfrac{81}{2}\ln|x-3|+C$.

3.1. $C-\cos x+\dfrac{2}{3}\cos^3 x-\dfrac{1}{5}\cos^5 x$. **3.2.** $\dfrac{1}{2}\cos^2 x-\ln|\cos x|+C$.
3.3. $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{\sin x}{2}+C$. **3.4.** $\dfrac{3x}{8}+\dfrac{\sin 2x}{4}+\dfrac{\sin 4x}{32}+C$.

3.5. $\dfrac{x}{8}-\dfrac{\sin 4x}{32}+C.$ **3.6.** $\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+\ln|\cos x|+C.$

3.7. $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg} x}{2}+C.$ **3.8.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{Arth}\dfrac{\operatorname{tg}(x/2)-2}{\sqrt{5}}+C.$

3.9. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{2}}+C.$ **3.10.** $\dfrac{1}{2}\cos x-\dfrac{1}{10}\cos 5x+C.$

4.1. $2\sqrt{x}-2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C.$ **4.2.** $\ln|x-1|+\ln\Bigl|\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\Bigr|+C.$
4.3. $(x+6)\sqrt{5+4x-x^2}+C.$
4.4. $(x-1)\sqrt{x^2-4}+4\ln\bigl|x+\sqrt{x^2-4}\bigr|+C.$
4.5. $\dfrac{1}{8}\Bigl((2x^3-x)\sqrt{x^2-1}-\ln\bigl|x+\sqrt{x^2-1}\bigr|\Bigr)+C.$
4.6. $\dfrac{1}{8}\Bigl((2x^3+5x)\sqrt{x^2+1}+3\ln\bigl|x+\sqrt{x^2+1}\bigr|\Bigr)+C.$
4.7. $\arcsin(x-1)+\dfrac{-1+\sqrt{2x-x^2}}{x-1}+C.$
4.8. $\sqrt{x^2+4x}-x+2\ln\bigl|x+2+\sqrt{x^2+4x}\bigr|+C.$
4.9. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{1+x^{-4}}+1}{\sqrt{1+x^{-4}}-1}-\sqrt{1+x^{-4}}+C.$
4.10. $\dfrac{1}{28}(4x^6+x^3-3)\sqrt[3]{x^3+1}+C.$

5.1. ${}_*S=\dfrac{n-1}{2n}$, $S^*=\dfrac{n+1}{2n}.$ **5.2.** ${}_*S=\dfrac{255}{2}$, $S^*=255.$
5.3. Применим критерий Дарбу: $I_*=0\neq I^*=1.$
5.4. Применим критерий Дарбу: $I_*=I^*=0.$
5.5. Разность $S^*-{}_*S=\dfrac{1}{n}\bigl(f(b)-f(a)\bigr)$ можно сделать сколь угодно малой.

6.1. 21. **6.2.** 14,5. **6.3.** $\ln 10.$ **6.4.** 125.
6.5. $1/5.$ **6.6.** $3/8.$ **6.7.** $1/3.$

7.1. $\dfrac{5}{2}\Bigl(\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{5}}-\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5}}\Bigr)-\ln 4.$ **7.2.** $\dfrac{343}{6}.$
7.3. $2\pi\Bigl(\sqrt{3}-\dfrac{4}{3}\Bigr).$ **7.4.** $8\pi^3.$ **7.5.** $\dfrac{3}{4}\pi-\sqrt{3}.$
7.6. $\pi/2.$ **7.7.** $5\pi/32.$

8.1. $32/15.$ **8.2.** $256/15.$ **8.3.** 8. **8.4.** $\pi/12.$
8.5. $\pi/3.$ **8.6.** $2\pi(\pi-2).$ **8.7.** $32\pi/105.$ **8.8.** $8\pi/3.$

9.1. $\sqrt{5}+\dfrac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5}).$ **9.2.** $\sqrt{17}\bigl(e^{\pi/2}-1\bigr).$ **9.3.** 8.

9.4. 22/3. **9.5.** $2\pi\sqrt{1+k^2}$. **9.6.** Обе кривые имеют длину $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos^2 t}\,dt$ (интеграл неберущийся).

10.1. $2\pi\bigl(2\sqrt{5}+\ln(2+\sqrt{5})\bigr)$. **10.2.** $32\pi/5$.
10.3. $\pi\Bigl(\sqrt{17}-\sqrt{2}+\ln\dfrac{4(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{17}+1}\Bigr)$. **10.4.** $2\pi\sqrt{2}\Bigl(\dfrac{10}{3}-\pi\Bigr)$.
10.5. $2\pi RD$.

11.1. $A=\varrho g H^2\pi R^2/12$. **11.2.** $\bigl(1-(1/2)^{5/2}\bigr)\approx 49$ мин.
11.3. $A=9$ Дж. **11.4.** $J=Ma^2/24$. **11.5.** $C(0;0;2H/5)$.
11.6. $C\Bigl(0;0;\dfrac{R^2+2Rr+3r^2}{4(R^2+Rr+r^2)}\Bigr)$.

12.1. Расходится. **12.2.** Сходится.
12.3. Сходится абсолютно. **12.4.** Сходится условно.
12.5. Сходится. **12.6.** Расходится.
12.7. Сходится абсолютно. **12.8.** Расходится.
12.9. Расходится на правом конце. **12.10.** Сходится.
12.11. Сходится. **12.12.** Расходится на левом конце.