МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ (ФН, 2 семестр)

Вопросы для подготовки к контролю по модулям и к экзамену

Модуль 1. Интегралы

1. Первообразная. Теорема о множестве первообразных для непрерывной функции.
2. Неопределённый интеграл. Основные свойства неопределённого интеграла: линейность, интегрирование по частям. Замена переменной в неопределённом интеграле.
3. Методы интегрирования рациональных, иррациональных и тригонометрических функций. Неберущиеся интегралы.
4. Определённый интеграл (интеграл Римана). Интегральные суммы. Верхняя и нижняя суммы Дарбу, их свойства.
5. Критерий Дарбу интегрируемости функции по Риману.
6. Необходимое условие интегрируемости. Интегрируемость монотонной и кусочно-непрерывной функции.
7. Основные свойства определённого интеграла: линейность, аддитивность, монотонность, теорема о среднем, оценка по модулю.
8. Интеграл с переменным верхним пределом. Теорема о производной от интеграла по его верхнему пределу. Формула Ньютона—Лейбница для определённого интеграла.
9. Площади плоских фигур, ограниченных кривыми, заданными в декартовой и в полярной системе координат.
10. Площади плоских фигур с границами, заданных параметрически. Площадь петли самопересекающейся кривой на плоскости.
11. Объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox или вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y=f(x)$ и прямыми $x=a, x=b, y=0$.
12. Объём тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейного сектора $\{\alpha<\varphi<\beta,\ \rho<f(\varphi)\}$.
13. Длина гладкой кривой. Длины плоской кривой, заданной в декартовой системе координат, параметрически, в полярной системе координат.
14. Длина пространственной кривой, заданной параметрически.
15. Площадь поверхности, образованной вращением плоской кривой, заданной в декартовой системе координат, в полярной системе координат или параметрически.
16. Вычисление массы, моментов, центра масс.
17. Несобственный интеграл от непрерывной функции на бесконечном промежутке (I рода).
18. Несобственный интеграл от неограниченной функции на конечном промежутке (II рода).
19. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов.
20. Признаки сходимости и расходимости несобственных интегралов I и II рода.

<u>Модуль 2. Функции нескольких переменных</u>

1. Окрестности, открытые и замкнутые множества, функции в n-мерном пространстве.
2. Предел и непрерывность скалярной и векторной функции векторного аргумента.
3. Связные множества в n-мерном пространстве. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции на связном множестве.
4. Свойства непрерывной функции на компакте.
5. Теорема о связи пределов векторной функции векторного аргумента и её координатных функций. Теорема о пределе сложной функции.
6. Частные производные. Дифференцируемость скалярных функций векторного аргумента. Связь дифференцируемости и непрерывности. Необходимые условия дифференцируемости.
7. Достаточные условия дифференцируемости. Производная по направлению скалярной функции векторного аргумента.
8. Достаточные условия существования производной по всем направлениям. Градиент функции и его свойства.
9. Связь дифференцируемости векторной функции векторного аргумента и её координатных функций. Матрица Якоби.
10. Теорема о дифференцируемости сложной функции многих переменных, перемножение матриц Якоби. Полный дифференциал скалярной функции нескольких переменных, свойство инвариантности.
11. Многократное дифференцирование и частные производные высших порядков скалярной функции векторного аргумента. Независимость смешанных производных от порядка дифференцирования.
12. Дифференциал n-го порядка скалярной функции многих переменных. Матричная форма записи дифференциала 2 порядка (матрица Гессе).
13. Формула Тейлора для ФНП с остаточным членом в форме Лагранжа и Пеано.
14. Необходимое и достаточное условие того, чтобы векторное поле было градиентом скалярной функции на двух- и трёхмерной области (необходимость доказать).
15. Теорема о существовании неявно заданной функции (скалярной и векторной), формулы для производных от неявно заданной функции (без доказательств).
16. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением $F(x,y,z)=0$ и к кривой, заданной системой двух уравнений.
17. Гладкие поверхности, заданные параметрически и неявно; их касательные и нормальные плоскости (без доказательств).
18. Экстремум скалярной функции векторного аргумента. Теорема о необходимом условии существования экстремума.
19. Теорема о достаточном условии экстремума для дважды дифференцируемой функции.
20. Условный экстремум скалярной функции векторного аргумента. Теорема о необходимом условии существования условного экстремума. Функция Лагранжа.
21. Теорема о достаточном условии существования условного экстремума для дважды дифференцируемой функции.
22. Определённые интегралы, зависящие от параметра. Непрерывность и дифференцирование по параметру.
23. Равномерная сходимость несобственных интегралов. Непрерывность и дифференцируемость несобственных интегралов по параметру.