

# Лекции\* по рядам и кратным интегралам ФН, II курс, 3 семестр

Пугачёв О.В.

осень 2016

## РЯДЫ

1. Сходимость числовых рядов
2. Признаки сходимости знакоположительных рядов
3. Признаки сходимости знакпеременных рядов
4. Функциональные ряды
5. Степенные ряды
6. Разложение функций в степенные ряды
7. Применение степенных рядов
8. Евклидовы пространства и ряды Фурье
9. Среднеквадратичная сходимость рядов Фурье
10. Поточечная сходимость рядов Фурье и свойства коэффициентов
11. Свёртка периодических функций (*дополнительная лекция*)

## КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ТЕОРИЯ ПОЛЯ

1. Кратные интегралы
2. Способы вычисления кратных интегралов
3. Приложения двойных и тройных интегралов
4. Криволинейные интегралы I и II рода
5. Площадь поверхности
6. Поверхностные интегралы I и II рода
7. Циркуляция и формула Грина
8. Дивергенция. Теорема Остроградского–Гаусса
9. Ротор и теорема Стокса
10. Теория поля (*итоговая лекция*)
11. Несобственные кратные интегралы
12. Гамма-функция и бета-функция (*дополнительная лекция*)

---

\*Запрещено печатать форматом мельче А5 или фотографировать.

# 1 Сходимость числовых рядов

**Рядом** называется выражение  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ,  $a_n \in \mathbb{R}$ . (Если пишут  $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ ,  $m > 0$ , то подразумевается, что  $a_j = 0$  при  $0 \leq j < m$ ). **Частичными суммами** ряда называются суммы  $S_N = \sum_{n=0}^N a_n$ ,  $N \in \mathbb{N}$ .

**Определение 1.1.** Говорят, что ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  **сходится**, если его частичные суммы имеют конечный предел  $S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N \in \mathbb{R}$ ; в этом случае число  $S$  называют **суммой** ряда и пишут

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Если же предел частичных сумм бесконечен или не существует, то говорят, что ряд **расходится**.

Если ряд сходится, то **остаток** ряда  $r_N = S - S_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ .

**Пример 1.1.** Рассмотрим ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ , где  $|q| < 1$ . Вычислим его частичные суммы:

$$S_N = 1 + q + \dots + q^N = \frac{1 + q + \dots + q^N - q - q^2 - \dots - q^{N+1}}{1 - q} = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}.$$

При  $N \rightarrow \infty$  имеем  $S_N \rightarrow \frac{1}{1 - q}$ . Итак, ряд сходится, и его сумма  $S = \frac{1}{1 - q}$ .

**Критерий Коши:** ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  сходится в том и только том случае, когда  $\forall \varepsilon > 0$

$\exists K \in \mathbb{N}$  : при  $\forall N > M \geq K$  имеем  $\left| \sum_{n=M+1}^N a_n \right| < \varepsilon$ .

*Доказательство.* Применим критерий Коши существования конечного предела к последовательности частичных сумм  $\{S_N\}_{N=0}^{\infty}$ , поскольку  $\sum_{n=M+1}^N a_n = S_N - S_M$ .  $\square$

## Свойства сходящихся рядов

**Необходимый признак сходимости.** Для того, чтобы ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  сходиллся, необходимо условие  $a_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

*Доказательство.* Пусть ряд сходится. При  $n \rightarrow \infty$  имеем  $S_n \rightarrow S$  и  $S_{n-1} \rightarrow S$ , где  $S \in \mathbb{R}$ . Тогда  $a_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S - S = 0$ .  $\square$

При помощи этого признака можно доказывать расходимость, но доказать через него сходимость нельзя!

Пример: ряд  $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  расходится, так как  $\pm 1 \not\rightarrow 0$ .

Контрпример: ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  удовлетворяет необходимому признаку, но расходится,

поскольку  $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{N}{\sqrt{N}} = \sqrt{N} \rightarrow \infty$ .

**Независимость от первых  $K$  слагаемых.** Сходимость ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  равносильна сходимости ряда  $\sum_{n=K}^{\infty} a_n$ .

Это следует из того, что при всех  $N \geq K$   $\sum_{n=0}^N a_n - \sum_{n=K}^N a_n = \text{const}$ .

**Линейность.** Если сходятся ряды  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ , то  $\forall c, k \in \mathbb{R}$  ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} (c a_n + k b_n)$  сходится, и его сумма равна  $c \sum_{n=0}^{\infty} a_n + k \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ .

Утверждение вытекает из того, что при каждом  $N \in \mathbb{N}$  выполнено соотношение  $\sum_{n=0}^N (c a_n + k b_n) = c \sum_{n=0}^N a_n + k \sum_{n=0}^N b_n$ .

**Определение 1.2.** Ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  **абсолютно сходится**, если сходится ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ .

**Теорема 1.1.** Если ряд абсолютно сходится, то он сходится, причём

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|; \quad |r_M| \leq \sum_{n=M+1}^{\infty} |a_n|. \quad (1)$$

*Доказательство.* Если  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$  сходится, то по критерию Коши  $\forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} : \forall$

$N > M \geq K$  имеем  $\sum_{n=M+1}^N |a_n| < \varepsilon$ . Тогда  $\forall N > M \geq K$  получаем

$$\left| \sum_{n=M+1}^N a_n \right| \leq \sum_{n=M+1}^N |a_n| < \varepsilon,$$

откуда по критерию Коши вытекает сходимость ряда из  $a_n$ -ых. Второе утверждение получается переходом к пределу при  $N \rightarrow \infty$  в неравенстве  $\left| \sum_{n=0}^N a_n \right| \leq \sum_{n=0}^N |a_n|$  или

$$\left| \sum_{n=M+1}^N a_n \right| \leq \sum_{n=M+1}^N |a_n|, \text{ выполненном при всех } N \in \mathbb{N}. \quad \square$$

Ряд из неотрицательных слагаемых называют **знакоположительным**.

**Лемма 1.1.** Если ряд знакоположительный, то его сумма  $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  равна супремуму (конечному или бесконечному) сумм

$$\sum_{i=0}^k a_{n_i}, \quad \text{где } 0 \leq n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_k, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

*Доказательство.* Поскольку слагаемые ряда неотрицательны, его частичные суммы не убывают; если при этом они ограничены сверху, то имеют конечный предел  $S$ , а если неограничены, то  $S = +\infty$ . Супремум частичных сумм также равен  $S$ , а поскольку частичные суммы входят во множество сумм (2) (взяв  $n_i = i$ ), то  $S \leq \sup \sum_{i=0}^k a_{n_i}$ .

С другой стороны,  $\sum_{i=0}^k a_{n_i} \leq \sum_{n=0}^{n_k} a_n \leq S \implies \sup \sum_{i=0}^k a_{n_i} \leq S$ .  $\square$

Поскольку множество всех конечных сумм (2) не меняются при перестановках слагаемых, мы получаем такое важное следствие:

**Теорема 1.2.** Сумма знакоположительного ряда не меняется при перестановке слагаемых. Т.е., если  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ , и  $\sigma : \mathbb{N}_0 \mapsto \mathbb{N}_0$  – биекция, то  $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ .

То же верно и для знакопеременного абсолютно сходящегося ряда, поскольку его можно представить как разность двух сходящихся знакоположительных рядов:  $a_n = a_n^+ - a_n^-$ , где  $a_n^+ = \max\{a_n; 0\}$ ,  $a_n^- = \max\{-a_n; 0\}$ .

**Определение 1.3.** Ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  **условно сходится**, если он сходится, но ряд из модулей  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$  расходится.

**Пример 1.2.** Ряд  $0 + 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \dots$  сходится, и его сумма  $= 0$ , поскольку  $S_{2n} = 0$ ,  $S_{2n-1} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Но сходиться абсолютно он не будет: для его ряда из модулей имеем

$$S_{2n} = 2 \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{2}{k} > 2 \sum_{k=1}^n \ln \frac{k+1}{k} = 2 \ln(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

Если ряд сходится условно, то при перестановке слагаемых его сумма может измениться. Более того, верна следующая удивительная теорема<sup>1</sup>

**Теорема 1.3.** Если ряд сходится условно, то  $\forall C \in [-\infty; +\infty]$  существует биекция  $\sigma : \mathbb{N}_0 \mapsto \mathbb{N}_0$ , такая, что  $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} = C$ . Кроме того, существует биекция  $\sigma : \mathbb{N}_0 \mapsto \mathbb{N}_0$ , такая, что  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_{\sigma(n)}$  не существует.

<sup>1</sup>доказательство – см. Е.А.Власова, „Ряды”

**Пример 1.3.** Переставим слагаемые ряда из примера (1.2) следующим образом:

$$\underbrace{1-1}_{2 \text{ слаг.}} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}}_{4 \text{ слагаемых}} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7}}_{8 \text{ слагаемых}} + \underbrace{\dots}_{16 \text{ слаг.}} + \dots$$

Если взять частичную сумму, остановившись в конце блока, то получим 0. Если же остановиться в середине  $k$ -го блока, то получим частичную сумму  $= \frac{1}{2^{k-1}} + \dots + \frac{1}{2^k - 1} > 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}$ . Таким образом, частичные суммы  $\infty$  раз принимают значения 0 и значения  $> 1/2 \implies$  предел не существует, т.е. ряд расходится.

Теперь переставим тот же ряд по-другому:

$$\underbrace{1-1}_{2^0+1 \text{ слаг.}} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}}_{2^1+1 \text{ слаг.}} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{3}}_{2^2+1 \text{ слагаемых}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{15} - \frac{1}{4}}_{2^3+1 \text{ слагаемых}} + \dots$$

Сумма слагаемых в  $k$ -ом блоке превышает  $2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k - 1} - \frac{1}{k} > \frac{1}{2} - \frac{1}{k} \geq \frac{1}{4}$  при  $k \geq 4$ . Следовательно, и те частичные суммы, где суммирование остановилось перед отрицательным слагаемым, и те, где остановилось сразу после такого, будут стремиться к  $+\infty$ . Остальные частичные суммы оцениваются сверху и снизу через них. Итак, ряд расходится к  $S = +\infty$ .

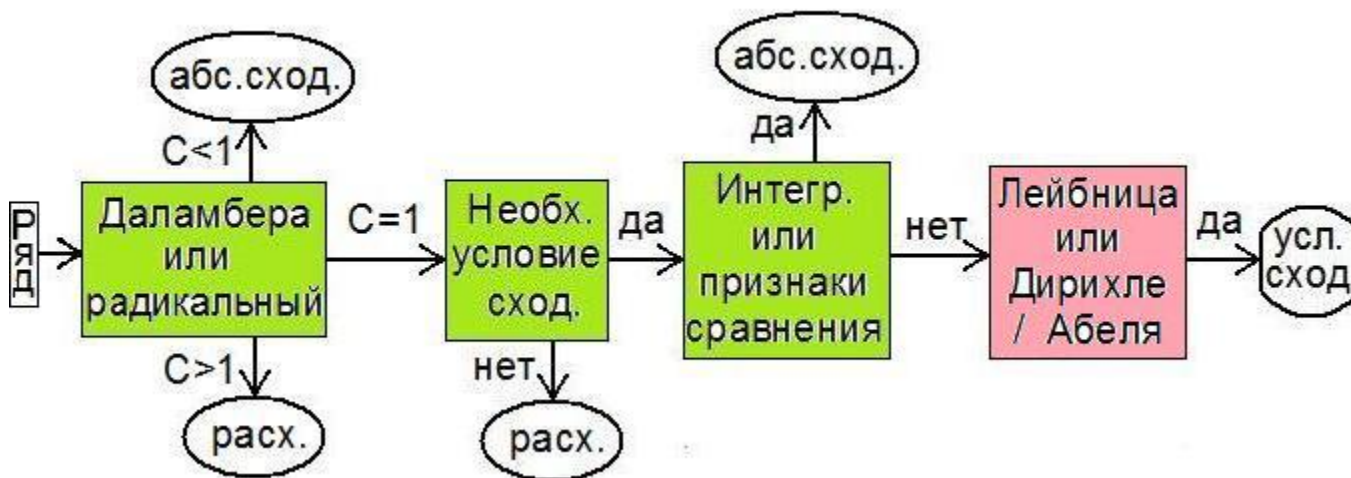
В примере 1.3 мы сначала переставляли слагаемые в блоках растущей длины, а затем – вне каких-либо блоков. Однако, если слагаемые сходящегося ряда переставлять внутри блоков ограниченной длины, то сумма ряда меняться не будет. Это вытекает из того, что  $a_n \rightarrow 0$ , и из следующей леммы.

**Лемма 1.2.** Пусть ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  сходится, его сумма равна  $S$ , и пусть  $0 \leq n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ . Обозначим  $A_0 = \sum_{i=0}^{n_0} a_i$ ;  $A_k = \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} a_i$  при  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$  тоже сходится, и его сумма также равна  $S$ .

Это следует из того, что  $\sum_{k=0}^m A_k = \sum_{n=0}^{n_m} a_n \rightarrow S$  при  $m \rightarrow \infty$ .

## 2 Признаки сходимости знакоположительных рядов

При исследовании знакопеременного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  на сходимость всегда надо начинать с исследования *ряда из модулей*  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$  (на схеме – зелёные блоки): если он сойдётся, то исходный ряд сходится абсолютно, и *только если* ряд из модулей разойдётся, то потребуется проверять сходимость знакопеременного ряда (розовый блок). Поэтому знакоположительным рядам уделим особое внимание.



Выведем наиболее употребляемые признаки сходимости знакоположительных рядов.

**1. Интегральный признак Коши.** Пусть неотрицательная функция  $f$  на  $[m; +\infty)$  непрерывна и не возрастает, и пусть  $a_n = f(n)$  при всех  $n \geq m$ . Тогда сходимость ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  равносильна сходимости несобственного интеграла I рода  $\int_m^{+\infty} f(x)dx$ .

*Доказательство.* Поскольку сходимость ряда не зависит от первых  $m$  слагаемых, рассмотрим ряд  $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ . Сравним его частичные суммы с интегралом функции  $f(x)$  по соответствующим отрезкам:

$$\int_m^N f(x)dx = \sum_{n=m}^{N-1} \int_n^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{n=m}^{N-1} \int_n^{n+1} f(n)dx = \sum_{n=m}^{N-1} a_n,$$

откуда видно при  $N \rightarrow \infty$ , что если сходится ряд, то сходится и интеграл;

$$\int_m^N f(x)dx = \sum_{n=m+1}^N \int_{n-1}^n f(x)dx \geq \sum_{n=m+1}^N \int_{n-1}^n f(n)dx = \sum_{n=m+1}^N a_n,$$

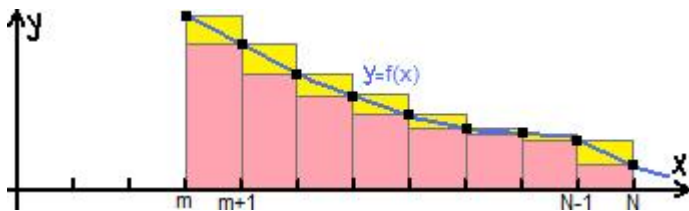
откуда видно, что если сходится интеграл, то сходится и ряд. Если в неравенствах

$$\sum_{n=m+1}^N a_n \leq \int_m^N f(x)dx \leq \sum_{n=m}^{N-1} a_n$$

перейти к пределу при  $N \rightarrow \infty$ , то получим оценки

$$r_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \leq \int_m^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=m}^{\infty} a_n = r_{m-1},$$

благодаря которым можно оценивать остаток ряда через интеграл. □



**Ряд Дирихле.** Исследуем на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ .

Необходимый признак выполнен только при  $p > 0$ . Теперь применим интегральный признак. Данному ряду соответствует невозрастающая функция  $f(x) = x^{-p}$ . Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_1^N \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{N^{1-p}-1}{1-p} = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & \text{при } p > 1; \\ +\infty & \text{при } p < 1; \end{cases} \\ \lim_{N \rightarrow +\infty} \ln N = +\infty & \text{при } p = 1. \end{cases}$$

Итак, ряд Дирихле сходится при  $p > 1$ . Этот факт нужно помнить, так как ряд Дирихле часто применяется в признаках сравнения.

**Пример 2.1.** Сколько слагаемых ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$  надо взять, чтобы вычислить его сумму с погрешностью  $< 0,001$  ?

Поскольку  $a_n = n^{-3}$ , возьмём функцию  $f(x) = x^{-3}$ . Оценим остаток:

$$r_m \leq \int_m^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = \left. \frac{-1}{2x^2} \right|_m^{+\infty} = \frac{1}{2m^2}.$$

Получаем  $|r_m| < 0,001$  при  $m = 23$ . *Ответ:*  $S \approx \sum_{n=1}^{23} n^{-3} \approx 1,201$ .

**2. Простой признак сравнения.** Пусть  $b_n \geq a_n \geq 0$  при всех  $n \geq n_0$ . Тогда:

- (а) если ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  сходится, то ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  сходится;
- (б) если ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  расходится, то ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  расходится.

*Доказательство.* На самом деле оба пункта утверждают одно и то же. Докажем напрямую (а), и тем самым докажем от противного (б). Пусть ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  сходится.

Тогда его частичные суммы ограничены сверху некоторой величиной  $M \in (0; +\infty)$ . Из этого следует, что

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \sum_{n=n_0}^N a_n \leq \sum_{n=n_0}^N b_n \leq M \implies \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=n_0}^N a_n \leq M < +\infty,$$

следовательно, ряд  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ , а значит, и ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  сходится.  $\square$

**Пример 2.2.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\ln n)^5}$ .

Сравним данный ряд с рядом Дирихле. Как известно, логарифм растёт медленнее любой степени, поэтому  $\sqrt{n}(\ln n)^5 \ll n$ . Чтобы доказательство было строгим, применим правило Лопиталья–Бернулли:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}(\ln x)^5}{x} = \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[10]{x}} \right)^5 = \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n^{-1}}{0,1 n^{-0,9}} \right)^5 = 0.$$

Поэтому  $\exists N$  такое, что  $\frac{1}{\sqrt{n}(\ln n)^5} > \frac{1}{n}$  при всех  $n > N$ . По простому признаку сравнения ряд *расходится*, так как расходится ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ .

**3. Предельный признак сравнения.** Пусть  $b_n > 0$ ,  $a_n > 0$  при всех  $n \geq n_0$ , и существует предел

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n}, \quad 0 < C < +\infty.$$

Тогда ряды  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  или оба сходятся, или оба расходятся.

*Доказательство.* Существует такое  $m \geq n_0$ , что

$$\forall n \geq m \quad \left| \frac{b_n}{a_n} - C \right| < \frac{C}{2} \implies \frac{C}{2} a_n < b_n < \frac{3C}{2} a_n.$$

Применим линейность и простой признак сравнения:

- 1) если сходится  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ , то сходится  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3C}{2} a_n \implies$  сходится  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ ;
- 2) если расходится  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ , то расходится  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C}{2} a_n \implies$  расходится  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ .  $\square$

**4. Радикальный<sup>2</sup> признак Коши.** Пусть  $a_n \geq 0$ ; обозначим

$$C = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k=n}^{\infty} \sqrt[k]{a_k}.$$

Тогда, если  $C < 1$ , то ряд сходится; если  $C > 1$ , то ряд расходится.

---

<sup>2</sup>radical – корень.



*Доказательство.* 1) Пусть  $0 \leq C < 1$ . Найдётся такое  $m$ , что

$$\sup_{k=m}^{\infty} \sqrt[k]{a_k} \leq q = \frac{1+C}{2} \implies \forall k \geq m \quad a_k \leq q^m \implies \sum_{k=m}^{\infty} a_k \text{ сходитс}я$$

по признаку сравнения (с геометрической прогрессией — см. пример 1.1).

2) Пусть  $1 < C \leq +\infty$ . При всяком  $n \in \mathbb{N}$  имеем  $\sup_{k=n}^{\infty} \sqrt[k]{a_k} \geq C > 1$ , следовательно, существует бесконечно много слагаемых  $a_{k_j}$ , таких, что  $\sqrt[k_j]{a_{k_j}} > 1 \implies a_{k_j} > 1$ , и необходимое условие сходимости нарушено.  $\square$

**5. Признак Даламбера.** Пусть  $a_n \geq 0$ ; предположим, что существует предел

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Тогда, если  $C < 1$ , то ряд сходится; если  $C > 1$ , то ряд расходится.

Покажем, что признак Даламбера является частным случаем радикального признака Коши: если существует указанный предел  $C$ , то существует и предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = C$ .

Для этого нам достаточно применить к последовательности  $x_n = \ln a_n$  следующую лемму:

**Лемма 2.1.** Если  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_{n-1}) = A$ ,  $-\infty \leq A \leq +\infty$ , то  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = A$ .

*Доказательство.* Зададим произвольные  $A_*$ ,  $A^*$ , такие, что

$$\begin{cases} A^* > A, & \text{если } A < +\infty, \\ A^* = A, & \text{если } A = +\infty; \end{cases} \quad \begin{cases} A_* < A, & \text{если } A > -\infty, \\ A_* = A, & \text{если } A = -\infty. \end{cases}$$

Найдётся  $m$ :  $\forall n \geq m \quad A_* \leq x_n - x_{n-1} \leq A^*$ . Тогда при  $n > m$

$$\frac{x_n}{n} = \frac{x_m}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=m}^{n-1} (x_k - x_{k-1}) \begin{cases} \leq o(1) + \frac{n-m}{n} A^* \rightarrow A^* \\ \geq o(1) + \frac{n-m}{n} A_* \rightarrow A_* \end{cases}$$

Следовательно,  $A_* \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} \leq A^*$ . В силу произвольности  $A_*$  и  $A^*$

получаем  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = A$ .  $\square$

Хотя признак Даламбера не даёт новых результатов по сравнению с радикальным признаком Коши, его применяют чаще из-за меньшей трудоёмкости вычислений.

Если ряд сходится по признаку Даламбера, то его остаток можно оценить, используя сравнение с геометрической прогрессией.

**Лемма 2.2.** Пусть для ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  при некотором  $N \in \mathbb{N}$  выполнено

$$\forall n \geq N \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q, \quad q < 1. \quad \text{Тогда} \quad |r_N| \leq |a_N| \frac{q}{1-q}.$$

*Доказательство.* Рассмотрим геометрическую прогрессию  $b_n = a_N q^{n-N}$ . Тогда при всех  $n \geq N$  выполнено  $|a_n| \leq b_n$ . Следовательно, по (1)

$$|r_N| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n = \sum_{k=1}^{\infty} |a_N| q^k = \frac{|a_N| q}{1-q},$$

здесь мы взяли новый индекс суммирования  $k = n - N$ . □

**Пример 2.3.** Рассмотрим ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n! 4^n}$ . Для него получаем отношение

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1} n! 4^n}{(n+1)! 4^{n+1} n^n} = \frac{(n+1)^n}{4 n^n} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{e}{4} < 1,$$

следовательно, по признаку Даламбера ряд сходится.

Теперь вычислим его сумму с погрешностью  $< 0,01$ . При всяком  $n \in \mathbb{N}$  имеем

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{e}{4} < 0,7.$$

По лемме 2.2 получаем  $|r_N| \leq |a_N| \frac{0,7}{1-0,7} = \frac{7 N^N}{3 N! 4^N} < 0,01$  при  $N = 9$ .

Ответ:  $S \approx \sum_{n=0}^9 \frac{n^n}{n! 4^n} \approx 1,55.$

### 3 Признаки сходимости знакопеременных рядов

При исследовании знакопеременного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  на сходимость всегда надо начинать с исследования ряда из модулей  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ : если он сойдётся, то исходный ряд сойдётся абсолютно, и только если ряд из модулей разойдётся, то придётся применять признаки сходимости знакопеременных рядов, о которых и пойдёт речь.

**1. Необходимый признак.** Если ряд из модулей разошёлся по необходимому признаку, то  $a_n \not\rightarrow 0$ , и знакопеременный ряд также разойдётся.

**2. Признак Лейбница.**

**Определение 3.1.** Ряд  $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$  называется рядом Лейбница, если:

- 1)  $a_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ;
- 2)  $\forall n \geq m \quad |a_n| \geq |a_{n+1}|$ ;
- 3) знаки слагаемых чередуются, т.е.  $a_n a_{n+1} < 0 \quad \forall n \geq m$ .

**Теорема 3.1.** Ряд Лейбница сходится. При этом его остаток не превышает по модулю первое отброшенное слагаемое, т.е.  $|r_N| \leq |a_{N+1}|$ .

*Доказательство.* Пусть, например,  $a_m > 0$ . Тогда  $\forall k \in \mathbb{N}$  имеем  $a_{m+2k} > 0$ ,  $a_{m+2k-1} < 0$ . Поскольку модули слагаемых не возрастают, выполнено  $\forall n \geq m$  либо  $\text{sign}(a_n + a_{n+1}) = \text{sign} a_n$ , либо  $a_n + a_{n+1} = 0$ . Получаем монотонные последовательности частичных сумм:

$$\begin{array}{ccccccc} S_m & \geq & S_{m+2} & \geq & S_{m+4} & \geq & S_{m+6} & \geq & \dots \\ \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \\ S_{m+1} & \leq & S_{m+3} & \leq & S_{m+5} & \leq & S_{m+7} & \leq & \dots \end{array}$$

Таким образом, суммы  $S_{m+2k}$  образуют невозрастающую последовательность, ограниченную снизу, а суммы  $S_{m+2k-1}$  – неубывающую последовательность, ограниченную сверху. Отсюда следует, что обе последовательности имеют конечные пределы. Эти пределы равны, поскольку

$$|S_{m+2k} - S_{m+2k-1}| = |a_{2k}| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty,$$

а значит, все частичные суммы стремятся к одному пределу  $S \in \mathbb{R}$ , и ряд сходится. Поскольку при каждом  $k \in \mathbb{N}$  верны неравенства

$$S_{m+2k-1} \leq S \leq S_{m+2k} \quad \text{и} \quad S_{m+2k} \geq S \geq S_{m+2k+1},$$

мы получаем, соответственно,

$$|r_{m+2k-1}| = |S - S_{m+2k-1}| \leq |a_{m+2k}|; \quad |r_{m+2k}| = |S - S_{m+2k}| \leq |a_{m+2k+1}|.$$

□

**Пример 3.1.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  не сходится абсолютно (его ряд из модулей  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  – расходящийся ряд Дирихле). Но он является рядом Лейбница, и потому сходится. *Ответ:* ряд сходится условно.

Рассмотрим другой ряд:  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right)$ . Имеем  $\frac{b_n}{a_n} \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ . Однако, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  расходится, ведь если бы он сходил, то по свойству линейности сходил бы и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , а это не так. Вывод: к знакопеременным рядам признаки сравнения неприменимы.

**Пример 3.2.** Проверим на сходимость ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2}$ .

Применив формулу Стирлинга

$$n! \sim \frac{n^n}{e^n} \sqrt{2\pi n} \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

получаем эквивалентность

$$|a_n| \sim \frac{2^{2n} n^{2n} \sqrt{4\pi n} e^{2n}}{4^n e^{2n} n^{2n} (\sqrt{2\pi n})^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \rightarrow 0.$$

По предельному признаку сравнения видим, что абсолютной сходимости нет. Но необходимый признак сходимости, он же – условие 1) признака Лейбница, выполнен. Условие 3), очевидно, тоже выполнено. Но мы не можем на основании эквивалентности утверждать, что выполняется 2): к знакопеременным рядам признаки сравнения неприменимы. Поэтому придётся проверять условие 2) для самого ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ :

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(2n+2)!}{4^{n+1} ((n+1)!)^2} \cdot \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{4(n+1)^2} = \frac{(2n+1)}{2(n+1)} < 1,$$

следовательно,  $|a_n| > |a_{n+1}|$ . Это ряд Лейбница  $\implies$  он сходится (условно).

**Пример 3.3.** Сколько слагаемых ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{3^n}$  надо взять, чтобы получить его сумму с погрешностью  $< 0,01$ ?

Ряд абсолютно сходится по признаку Даламбера  $\left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1/3 \right)$ . Однако, признак Лейбница пригодится нам для более точной оценки остатка. Данный ряд является рядом Лейбница начиная с 3-го слагаемого. Имеем  $|a_{10}| = \frac{1000}{59049} > 0,01$ ;  $|a_{11}| = \frac{1331}{177147} < 0,01$ . Следовательно,  $|r_{10}| \leq |a_{11}| < 0,01$ . *Ответ:* 10 слагаемых.

**3. Признак Дирихле.** Пусть  $u_m \geq u_{m+1} \geq u_{m+2} \geq \dots$ ;  $u_n \rightarrow 0$ . Пусть  $v_n$  таковы, что множество сумм  $W_n = \sum_{k=0}^n v_k$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ограничено. Тогда ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$  сходится.

Признак Лейбница является частным случаем признака Дирихле: возьмём  $u_n = |a_n|$ ,  $v_n = (-1)^n$  или  $v_n = (-1)^{n+1}$ .

**4. Признак Абеля.** Пусть последовательность  $\{u_n\}_{n=m}^{\infty}$  монотонна и ограничена. Пусть ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$  сходится (т.е.  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} W_n \in \mathbb{R}$ ). Тогда ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$  сходится.

Признаки Дирихле и Абеля очень похожи, только признак Дирихле накладывает более жёсткие условия на  $u_n$  и менее жёсткие на  $v_n$ , а признак Абеля – наоборот. Оба признака доказываются по одной схеме.

*Доказательство.* В обоих случаях имеем  $C = \sup |W_n| < \infty$ , а также  $U = \sup |u_n| < \infty$ . Воспользуемся критерием Коши. Пусть  $N > M \geq m$ .

$$\sum_{n=M+1}^N u_n v_n = \sum_{n=M+1}^N u_n (W_n - W_{n-1}) = \sum_{n=M+1}^N u_n W_n - \sum_{n=M+1}^N u_n W_{n-1} =$$

[в первой сумме положим  $k = n$ , а во второй  $k = n - 1$ ]

$$= \sum_{k=M+1}^N u_k W_k - \sum_{k=M}^{N-1} u_{k+1} W_k = \underbrace{u_N W_N - u_{M+1} W_M}_A + \underbrace{\sum_{k=M+1}^{N-1} (u_k - u_{k+1}) W_k}_B.$$

В случае признака Дирихле получаем

$$|A| \leq C(|u_N| + |u_{M+1}|) \xrightarrow{N > M \rightarrow \infty} 0,$$

а в признаке Абеля сходится не только последовательность  $u_n$ , но и  $W_n$ , так что  $|A| \leq |u_N(W_N - W_M)| + |(u_N - u_{M+1})W_M| \leq U|W_N - W_M| + C|u_N - u_{M+1}| \xrightarrow{N > M \rightarrow \infty} 0$ .

Сумма  $B$  в обоих случаях, в силу монотонности  $\{u_n\}$ , оценивается так:

$$|B| \leq C \sum_{k=M+1}^{N-1} |u_k - u_{k+1}| = C|u_M - u_{N-1}| \xrightarrow{N > M \rightarrow \infty} 0.$$

□

**Пример 3.4.** Пусть  $0 < \alpha < \pi$ ;  $p > 0$ . Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^p}$  сходится по признаку

*Дирихле.* Действительно, сомножители  $u_n = 1/n^p$  и  $v_n = \sin n\alpha$  удовлетворяют условиям теоремы:  $u_n \searrow 0$ ; суммы  $v_n$ -ых не превышают константу:

$$\left| \sum_{n=1}^N \sin n\alpha \right| = \left| \frac{1}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \sum_{n=1}^N \left( \cos \left( n\alpha - \frac{\alpha}{2} \right) - \cos \left( n\alpha + \frac{\alpha}{2} \right) \right) \right| = \left| \frac{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \left( N\alpha + \frac{\alpha}{2} \right)}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

## 4 Функциональные ряды

**Определение 4.1.** Функциональным рядом называется ряд, зависящий от параметра  $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x), \quad x \in D = \bigcap_{n=0}^{\infty} D(f_n).$$

**Область сходимости** этого ряда  $C = \left\{ x \in D : \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \text{ сходится} \right\}$ . На  $C$

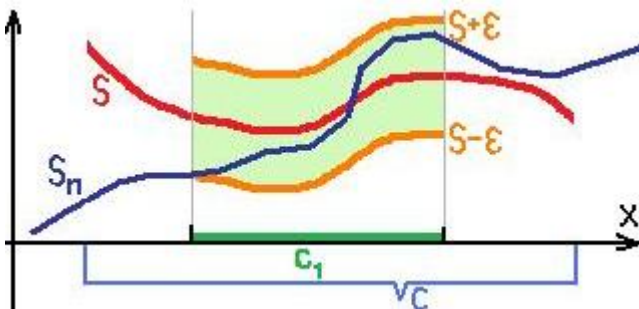
определена функция  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ , называемая **суммой** функционального ряда, и частичные суммы  $S_N(x) = \sum_{n=0}^N f_n(x)$ .

**Определение 4.2.** Ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  сходится **равномерно** на множестве  $C_1 \subset C$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M = M(\varepsilon) : \forall N > M \forall x \in C_1 |S_N(x) - S(x)| < \varepsilon,$$

т.е. число  $M(\varepsilon)$  не зависит от точки  $x \in C_1$ . Обозначение:  $S_N(x) \xrightarrow{C_1} S(x)$ .

Геометрически это означает, что графики частичных сумм  $S_n(x)$ , начиная с  $n = M + 1$ , проходят через „коридор”  $\{x \in C_1, |y - S(x)| < \varepsilon\}$ .



**Пример 4.1.** Для ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  имеем  $D = \mathbb{R}$ ;  $C = (-1; 1)$ : при  $|x| \geq 1$  нарушен необходимый признак сходимости, а при  $|x| < 1$  ряд сходится, его сумма равна  $S(x) = \frac{1}{1-x}$ , а частичные суммы  $S_N(x) = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$  (см. пример 1.1). Однако, на всём интервале  $(-1; 1)$  нет равномерной сходимости, т.е.

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall M \exists N > M, \exists x \in C_1 : |S_N(x) - S(x)| \geq \varepsilon.$$

Например, для  $\varepsilon = 1$  возьмём любое  $N > M$  и  $x = \sqrt[N+1]{1/2}$ . Тогда

$$S(x) - S_N(x) = \frac{x^{N+1}}{1-x} \geq \frac{1/2}{1-1/2} = 1.$$

Если же взять любой меньший отрезок  $[-r; r] \subset (-1; 1)$ , то на нём ряд сходится **равномерно** по признаку Вейерштрасса (см. ниже).

**Критерий Коши равномерной сходимости.** Ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  сходится равномерно на  $C_1$ , если и только если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K : \forall N > M \geq K, \forall x \in C_1 \quad \left| \underbrace{\sum_{n=M+1}^N f_n(x)}_{S_N(x) - S_M(x)} \right| < \varepsilon.$$

Необходимость этого условия следует из оценки

$$|S_N(x) - S_M(x)| \leq |S_N(x) - S(x)| + |S_M(x) - S(x)|,$$

а достаточность — из оценки  $|S_M(x) - S(x)| \leq \sup_{N > M} |S_N(x) - S_M(x)|$ .

**Признак Вейерштрасса.** Пусть существует сходящийся знакоположительный ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  (*мажоранта*), такой, что  $\forall n |f_n(x)| \leq a_n$  на  $C_1$ . Тогда ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  сходится равномерно и абсолютно на  $C_1$ .

*Доказательство.* Из сходимости мажоранты при всех  $x \in C_1$  получаем оценку

$$\left| \sum_{n=M+1}^N f_n(x) \right| \leq \sum_{n=M+1}^N |f_n(x)| \leq \sum_{n=M+1}^N a_n \xrightarrow{N > M \rightarrow \infty} 0,$$

из которой видно по критерию Коши равномерной сходимости, что ряды  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  и  $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$  сходятся равномерно на  $C_1$ .  $\square$

**Пример 4.1** (продолжение). Для ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  на отрезке  $[-r; r]$ ,  $0 < r < 1$ , мажорантой является сходящийся ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ .

**Пример 4.2.** Доказать равномерную сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$  на отрезке  $[0; 1]$ .

Доказать по признаку Вейерштрасса не получится, поскольку при  $x = 1$  ряд сходится условно. Докажем равномерную сходимость непосредственно, пользуясь тем, что при всех  $x \in (0; 1]$  данный ряд является рядом Лейбница:

$$|S_N(x) - S(x)| \leq \left| \frac{(-1)^{N+1}}{N+1} x^{N+1} \right| \leq \frac{1}{N+1} \stackrel{(0;1]}{\Rightarrow} 0 \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

**Теорема 4.1. (о непрерывности суммы).** Пусть ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  сходится равномерно на промежутке  $I \subset \mathbb{R}$ , и все функции  $f_n(x)$  непрерывны на  $I$ . Тогда сумма ряда  $S(x)$  также непрерывна на  $I$ .

*Доказательство.* Возьмём точку  $x \in I$  и зададим  $\varepsilon > 0$ . В силу равномерной сходимости,  $\exists N: |S_N(y) - S(y)| < \varepsilon/3$  при всех  $y \in I$ . Частичная сумма  $S_N$  непрерывна в точке  $x$ , поэтому  $\exists \delta > 0: |S_N(y) - S_N(x)| < \varepsilon/3 \quad \forall y \in U_\delta(x) \cap I$ . Тогда для всех точек  $y \in U_\delta(x) \cap I$  получаем оценку

$$|S(y) - S(x)| \leq |S(y) - S_N(y)| + |S_N(y) - S_N(x)| + |S_N(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}. \quad \square$$

Следующий пример показывает, что, если ряд из непрерывных функций сходится неравномерно, то его сумма может оказаться разрывной.

**Пример 4.3.** Рассмотрим ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  на отрезке  $[0; 1]$ , где

$$f_n(x) = \begin{cases} x & \text{при } n = 0 \\ x^{n+1} - x^n & \text{при } n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Тогда частичные суммы равны  $S_N(x) = x^{N+1}$ . На отрезке  $[0; 1]$  ряд сходится к разрывной функции:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} x^{N+1} = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{при } x = 1. \end{cases}$$

**Теорема 4.2. (о почленном интегрировании).** Пусть ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  сходится равномерно на отрезке  $[a; b]$ , и все функции  $f_n(x)$  непрерывны на  $[a; b]$ . Тогда сумма ряда  $S(x)$  интегрируема на  $[a; b]$ , причём

$$\int_a^b S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx. \quad (3)$$

*Доказательство.* Интегрируемость  $S(x)$  следует из её непрерывности. При каждом  $N \in \mathbb{N}$  из линейности интеграла следует равенство

$$\int_a^b S_N(x) dx = \sum_{n=0}^N \int_a^b f_n(x) dx. \quad (4)$$

Будем переходить к пределу по  $N$ . Правая часть (4) имеет конечный предел при  $N \rightarrow \infty$ , это проверяется по критерию Коши для числового ряда:

$$\left| \sum_{n=M+1}^N \int_a^b f_n(x) dx \right| = \left| \int_a^b (S_N(x) - S_M(x)) dx \right| \leq (b-a) \sup_I |S_N - S_M| \xrightarrow{N > M \rightarrow \infty} 0$$

в силу равномерной сходимости. Таким образом, правая часть (4) сходится к правой части (3). Для левых частей имеем соответствующую сходимость:

$$\left| \int_a^b S_N(x) dx - \int_a^b S(x) dx \right| \leq (b-a) \sup_I |S_N(x) - S(x)| \xrightarrow{N > M \rightarrow \infty} 0. \quad \square$$



**Пример 4.4.** Ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$  сходится равномерно на  $[-r; r]$   $\forall r < 1$ . Поэтому его сумму можно почленно интегрировать по любому отрезку  $[0; x]$  или  $[x; 0]$  при  $|x| < 1$ , получится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n u^n du = \int_0^x S(u) du = \int_0^x \frac{1}{1+u} du = \ln(1+x).$$

А поскольку ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$  сходится равномерно на отрезке  $[0; 1]$  (см. пример 4.2), то его сумма непрерывна на  $[0; 1]$ , и равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \ln(1+x) \quad \forall x \in (-1; 1)$$

продолжается по непрерывности и в точку  $x = 1$ .

**Теорема 4.3. (о почленном дифференцировании).** Пусть ряд  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  сходится на промежутке  $I \subset \mathbb{R}$ ; все функции  $f_n(x)$  имеют непрерывные производные<sup>3</sup> на  $I$ . Пусть ряд

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)$$

сходится равномерно на всяком отрезке  $[\alpha; \beta] \subset I$ . Тогда сумма ряда  $S(x)$  дифференцируема на  $I$ , причём  $S'(x) = T(x)$ .

*Доказательство.* Зафиксируем точку  $a \in I$ . Функция  $T(x)$  непрерывна  $\implies$  интегрируема на всяком отрезке в  $I$ . Тогда для каждого  $x \in I$  имеем

$$\int_a^x T(u) du = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x f'_n(u) du = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n(x) - f_n(a)) = S(x) - S(a).$$

Следовательно,  $S(x)$  является первообразной для  $T(x)$  на  $I$ . □

**Пример 4.5.** Продифференцировав почленно  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$  при  $x \in (-1; 1)$ , получаем ряд

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1) x^k$$

на том же интервале  $(-1; 1)$ . Итак,

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1) x^k = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + \dots$$

<sup>3</sup>если  $x$  – левый конец  $I$ , то имеется в виду правая производная; если правый конец, то – левая.

## 5 Степенные ряды

Степенным рядом называется ряд 
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_o)^n, \quad (5)$$

$c_n \in \mathbb{R}$ . Точка  $x_o$  называется центром. Область определения  $D = \mathbb{R}$ . Выясним, как может выглядеть область сходимости.

**Теорема 5.1. (Абель).** Пусть степенной ряд (5) сходится в точке  $x \neq x_o$ . Тогда

- 1) если  $|y - x_o| < |x - x_o|$ , то ряд абсолютно сходится в точке  $y$ ;
- 2) если  $r < |x - x_o|$ , то ряд сходится равномерно на  $[x_o - r; x_o + r]$ .

*Доказательство.* Если ряд сходится в точке  $x$ , то выполнено необходимое условие сходимости:  $|c_n| \cdot |x - x_o|^n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , следовательно,  $\sup_{n=0}^{\infty} (|c_n| \cdot |x - x_o|^n) = A < +\infty$ . Тогда, взяв  $r < |x - x_o|$ , получаем для всякого  $y \in [x_o - r; x_o + r]$ :

$$|c_n| \cdot |y - x_o|^n = |c_n| \cdot |x - x_o|^n \left( \frac{|y - x_o|}{|x - x_o|} \right)^n \leq A \left( \frac{r}{|x - x_o|} \right)^n.$$

Таким образом, на отрезке  $[x_o - r; x_o + r]$  мажорантой для ряда (5) является сходящийся ряд  $A \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r}{|x - x_o|} \right)^n$ , и ряд (5) сходится на таком отрезке равномерно и абсолютно.  $\square$

**Следствие 5.1.** Для степенного ряда определён **радиус сходимости** – такое число  $R \in [0; +\infty]$ , что при  $|x - x_o| < R$  ряд абсолютно сходится в  $x$ , а при  $|x - x_o| > R$  ряд расходится в  $x$ .

Интервал  $(x_o - R; x_o + R)$  называется **интервалом сходимости**. Если  $0 < R < +\infty$ , то на концах интервала сходимости  $x = x_o \pm R$  возможна и расходимость, и сходимост (абсолютная или условная).

Формулу радиуса сходимости выведем из радикального признака Коши:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n| \cdot |x - x_o|^n} = |x - x_o| \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} < 1 \implies R = \left( \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \right)^{-1}.$$

**Пример 5.1.** Исследовать на сходимост степенной ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$ . Вычислим радиус сходимости, представив  $n!$  по формуле Стирлинга:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}}} = e.$$

Интервал сходимости:  $(-e^{-1}; e^{-1})$ . Осталось исследовать сходимост на концах. На обоих концах модули слагаемых  $\left| \frac{n^n}{n!} x^n \right| = \frac{n^n}{n! e^n} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ , но ряд  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  расходится  $\implies$  нет абсолютной сходимости. При  $x = e^{-1}$  ряд знакоположительный, расходится. При  $x = -e^{-1}$  ряд сходится по признаку Лейбница:  $\frac{n^n}{n!} \left( -\frac{1}{e} \right)^n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi n}} \rightarrow 0$ ;

знаки чередуются;

$$\left| \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \left(-\frac{1}{e}\right)^{n+1} \right| / \left| \frac{n^n}{n!} \left(-\frac{1}{e}\right)^n \right| = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)n^n e} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n / e < 1$$

$\implies$  слагаемые убывают по модулю. *Ответ:* область сходимости  $C = [-e^{-1}; e^{-1}]$ ; в интервале  $(-e^{-1}; e^{-1})$  сходимость абсолютная; в точке  $-e^{-1}$  – условная.

### Почленное дифференцирование и интегрирование

**Теорема 5.2.** Пусть ряд  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_o)^n$  имеет радиус сходимости  $R$ . Тогда  $\forall x \in (x_o - R; x_o + R)$  верны разложения

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n(x - x_o)^{n-1}, \quad \int_{x_o}^x S(y) dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (x - x_o)^{n+1},$$

причём оба новых ряда имеют такой же радиус сходимости  $R$ .

*Доказательство.* Вычислим радиусы сходимости:

$$\frac{1}{R_1} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n|c_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[n]{|c_n|} \right)^{\frac{n}{n-1}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n-1]{n} = \frac{1}{R} 1;$$

$$\frac{1}{R_2} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{\frac{|c_n|}{n+1}} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[n]{|c_n|} \right)^{\frac{n}{n+1}} / \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{n+1} = \frac{1}{R} / 1.$$

Итак,  $R_1 = R_2 = R$ . Поскольку ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_o)^n \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (c_n(x - x_o)^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n(x - x_o)^{n-1}$$

сходятся равномерно на каждом отрезке  $[a; b] \subset (x_o - R; x_o + R)$ , применяем теоремы о почленном дифференцировании и интегрировании.  $\square$

Применив теорему (5.2)  $k$  раз, получаем разложение  $k$ -ой производной в степенной ряд:

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n+1-k)(x - x_o)^{n-k} \quad \forall x \in (x_o - R; x_o + R),$$

а подставив  $x = x_o$ , мы получим соотношение  $S^{(k)}(x_o) = k! c_k$ , и тогда можно записать степенной ряд в виде **ряда Тейлора** для функции  $S(x)$ :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(x_o)}{n!} (x - x_o)^n. \quad (6)$$

Ряд Тейлора можно составить для любой бесконечно дифференцируемой функции  $f(x)$ , но сумма этого ряда не всегда совпадает с  $f(x)$ .

**Пример 5.2.** Пусть  $f(x) = \begin{cases} e^{-1/|x|} & \text{при } x \neq 0 \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$ ;  $x_0 = 0$ . При  $x \neq 0$  существуют все производные. При  $x = 0$  вычисляем:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/|x|}}{x} = 0, \quad f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sign } x \cdot x^{-2} e^{-1/|x|}}{x} = 0, \quad \text{и т. д.}$$

Ряд Тейлора с центром 0 состоит из нулевых слагаемых, но  $f(x) = 0$  только при  $x = 0$ .

**Определение 5.1.** Функция  $f(x)$  – **аналитическая** в интервале  $(a; b)$ ,  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ , если  $\forall x_0 \in (a; b) \exists R > 0$ : в окрестности  $(x_0 - R; x_0 + R)$  функция  $f(x)$  равна сумме некоторого степенного ряда с центром  $x_0$ .

Аналитическая функция бесконечно дифференцируема на  $(a; b)$  и в силу (6) в окрестности любой точки  $x_0 \in (a; b)$  равна сумме своего ряда Тейлора.

Пусть дана функция  $f(x)$ , бесконечно дифференцируемая в окрестности точки  $x_0$ ; точка  $x$  лежит в этой окрестности. Выпишем формулу Тейлора с остаточным членом:

$$f(x) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + r_m(x) = S_m(x) + r_m(x).$$

Тогда  $f(x) = S(x) \iff \lim_{m \rightarrow \infty} (f(x) - S_m(x)) = 0 \iff \lim_{m \rightarrow \infty} r_m(x) = 0$  – таково необходимое и достаточное условие совпадения значения функции с суммой её ряда Тейлора.

Следующая лемма даёт простое достаточное условие сходимости ряда Тейлора к самой функции.

**Лемма 5.1.** Если функция  $f(x)$  бесконечно дифференцируема в интервале  $(x_0 - R; x_0 + R)$ , и для её производных выполнена оценка

$$\forall n \quad |f^{(n)}(x)| \leq C \quad \text{при } |x - x_0| < R,$$

то  $f(x)$  равна сумме своего ряда Тейлора в  $(x_0 - R; x_0 + R)$ .

*Доказательство.* Представим остаточный член в форме Лагранжа:

$$r_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} (x - x_0)^{m+1},$$

где  $\xi$  – некоторая точка, лежащая между  $x_0$  и  $x$ . Получаем оценку:

$$|r_m(x)| \leq \frac{C}{(m+1)!} |x - x_0|^{m+1} \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty. \quad \square$$

Условиям леммы 5.1 для любой точки  $x_0$  и  $\forall R > 0$  удовлетворяют функции  $\sin x$ ,  $\cos x$  (для них  $C = 1$ ) и  $e^x$  (для неё  $C = e^{x_0+R}$ ). Следовательно, какую бы точку  $x_0 \in \mathbb{R}$  мы ни взяли, эти три функции совпадут с суммами своих рядов Тейлора на всей числовой оси.

Ряд Тейлора с центром  $x_0 = 0$  называют рядом Маклорена. Выпишем ряды Маклорена для функций  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ . Как мы уже знаем, эти ряды сходятся к самим функциям при всех  $x \in \mathbb{R}$ . Значения  $e^x$  и её производных в 0 все равны 1. Подставим их в формулу ряда Тейлора:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Значения синуса и его производных в 0 равны, соответственно, 0, 1, 0,  $-1$ , и т. д. с периодом 4. Останутся лишь слагаемые с нечётными степенями  $n = 2k + 1$ :

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Ряд для косинуса можно получить почленным дифференцированием (8):

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

Сумма следующего ряда Маклорена была вычислена непосредственно:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad \forall x \in (-1; 1). \quad (10)$$

Следующий ряд был получен из (10) почленным интегрированием, в точку  $x = 1$  равенство продолжено по непрерывности суммы:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad \forall x \in (-1; 1]. \quad (11)$$

Выпишем ряд Маклорена для функции  $(1+x)^a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , дифференцируя её в нуле бесконечно много раз. При  $a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  мы получим формулу бинома Ньютона с конечным числом слагаемых, и вопрос о сходимости не стоит. Если же показатель  $a$  отрицательный или дробный, то ряд Маклорена выглядит так<sup>4</sup>:

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a-1)\dots(a+1-n)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^n (a+1-k)}{n!} x^n \quad \text{при } |x| < 1. \quad (12)$$

Для этого ряда не удаётся доказать  $r_N(x) \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ , оценивая остаточный член в форме Лагранжа. Применим другое доказательство.

---

<sup>4</sup>Произведение 0 сомножителей считается = 1.

## 6 Разложение функций в степенные ряды

Радиус сходимости ряда  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^n (a+1-k)}{n!} x^n$  равен 1, что проверяется по признаку Даламбера. Следовательно, при  $|x| < 1$  можно продифференцировать ряд  $S(x)$  почленно. Затем домножим на  $(1+x)$  и раскроем скобки:

$$(1+x)S' = (1+x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^n (a+1-k)}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^n (a+1-k)}{(n-1)!} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^n (a+1-k)}{(n-1)!} x^n =$$

[в первой сумме положим  $m = n-1$  и первое слагаемое выпишем отдельно; во второй сумме положим  $m = n$ ]

$$= a + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{\prod_{k=1}^m (a+1-k)(a-m)}{m!} + \frac{\prod_{k=1}^m (a+1-k)}{m!/m} \right) x^m = a S(x).$$

Следовательно,  $S(x)$  является на  $(-1; 1)$  решением задачи Коши

$$S'(x) = \frac{a}{1+x} S(x), \quad S(0) = 1, \quad \text{откуда } S(x) = (1+x)^a.$$

Формула (10) является частным случаем формулы (12) при  $a = -1$ .

Запомнив разложения (7)–(12), можно получать разложения в ряды Тейлора многих сложных функций и даже неберущихся интегралов, применяя следующие четыре приёма (объясним их на примерах):

**I. Подстановка одночлена.** Разложим по степеням  $x$  функции:

$$\frac{1}{1+x^2} = (1+y)^{-1} \Big|_{y=x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n},$$

ряд сходится к функции при  $|y| < 1$ , т.е. при  $|x| < 1$ . Аналогично

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= (1+y)^{-1/2} \Big|_{y=-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} - k\right)}{n!} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^n (2k-1)}{2^n n!} x^{2n} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^8 + \dots, \end{aligned}$$

где для  $n \in \mathbb{N}$  символом  $n!!$  обозначен „полуфакториал” – произведение натуральных чисел до  $n$  одинаковой с  $n$  чётности. Ряд сходится к функции при  $|y| < 1 \iff |x| < 1$ . Ещё один пример:

$$e^{-x^2/2} = e^y \Big|_{y=-\frac{x^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^{2n} \quad \forall y \in \mathbb{R} \implies \forall x \in \mathbb{R}.$$

**II. Почленное интегрирование.** Один пример уже был:  $\ln(1+x)$ . Теперь проинтегрируем три ряда, полученные только что:

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dy}{1+y^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x y^{2n} dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad \text{при } |x| < 1;$$

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} x^{2n+1} \quad \text{при } |x| < 1;$$

неберущийся интеграл  $\int_0^x e^{-y^2/2} dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n(2n+1)n!} x^{2n+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

**III. Домножение на многочлен** с раскрытием скобок и приведением подобных слагаемых. Например, разложим по степеням  $y = (x-1)$  функцию

$$xe^x = (y+1)e \cdot e^y = e \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^{m+1}}{m!} + e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} =$$

[в первой сумме положим  $n = m+1$  и добавим 0-е слагаемое, равное 0]

$$= e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ny^n}{n!} + e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} (x-1)^n \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**IV. Разложение рациональной функции в сумму простейших дробей.**

Например, разложим по степеням  $t = (x+1)$  функцию

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{6x}{x^3-8} = \frac{1}{x-2} - \frac{x-2}{3+(x+1)^2} = \frac{-1/3}{1-t/3} - \left(\frac{t}{3}-1\right) \frac{1}{1+t^2/3} = \\ &= -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{3}\right)^n - \left(\frac{t}{3}-1\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-t^2}{3}\right)^n = \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} (x+1)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (x+1)^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} (x+1)^{2n} = \end{aligned}$$

[осталось привести подобные слагаемые]

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^n}{3^n} - \frac{1}{3^{2n+1}} \right) (x+1)^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} + \frac{1}{3^{2n+2}} \right) (x+1)^{2n+1}.$$

Ряд сходится к функции  $f(x)$  при одновременном выполнении условий  $|t/3| < 1$  и  $|t^2/3| < 1$ , т.е. при  $|x+1| < \sqrt{3}$ .

### Нахождение явного вида функции, заданной рядом

**Пример 6.1.**  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ . Попробуем свести к известному ряду  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ . От множителей  $n$  будем избавляться интегрированием:

$$\frac{f(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} \implies g(x) := \int_0^x \frac{f(y)}{y} dy = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n;$$

$$\frac{g(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \implies \int_0^x \frac{g(y)}{y} dy = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1$$

при  $|x| < 1$ . Следовательно, на этом интервале получится

$$g(x) = x \left( \frac{1}{1-x} - 1 \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}; \quad f(x) = x g'(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

**Пример 6.2.**  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n x^{4n}}{(4n)!}$ . Радиус сходимости  $= \infty$ . Легко проверить, что  $f''''(x) + 4f(x) = 0$ . Характеристическое уравнение  $k^4 + 4 = 0$  имеет корни  $\pm 1 \pm i$ , следовательно, общий вид решения

$$y(x) = e^x (A \cos x + B \sin x) + e^{-x} (C \cos x + D \sin x).$$

Из начальных условий  $f(0) = 1, f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$  находим  $A = C = 1/2, B = D = 0$ . Ответ:  $f(x) = \operatorname{ch} x \cos x, x \in \mathbb{R}$ .

**Пример 6.3.**  $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 - 1}$ . Разложим дробь

$$\frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right).$$

Тогда

$$f(x) = \frac{1}{2} \left( \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \right) = \frac{1}{2} (F(x) - G(x)),$$

где

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k} = x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -x \ln(1-x), \quad |x| < 1;$$

$$G(x) = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k} = \frac{1}{x} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} - x - \frac{x^2}{2} \right) = -\frac{1}{x} \ln(1-x) - 1 - \frac{x}{2}, \quad |x| < 1.$$

Получаем  $f(x) = \frac{1-x^2}{2x} \ln(1-x) + \frac{1}{2} + \frac{x}{4}$  при  $|x| < 1$ .

Ещё можно непосредственно вычислить  $f(1) = 3/4, f(-1) = 1/4$ .



## 7 Применение степенных рядов

### Приближённые вычисления

Если для некоторой функции  $f(x)$  (элементарной функции, или неберущегося интеграла, или частного решения дифференциального уравнения) известно разложение в степенной ряд с центром  $x_0 \neq x$ , причём точка  $x$  попадает в интервал сходимости (желательно ближе к центру), то значение  $f(x)$  можно приближать частичными суммами этого степенного ряда.

**Пример 7.1.** Вычислить  $\sqrt[3]{2}$  с погрешностью  $< 0,0001$ . Выпишем ряд Тейлора для функции  $x^{1/3}$  с центром 1, применив разложение (12) при  $a = 1/3$  :

$$x^{1/3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^n \left(\frac{4}{3} - k\right)}{n!} (x-1)^n \quad \text{при } |x-1| < 1.$$

Но  $x = 2$  не попадает в интервал! Тогда разложим  $x^{1/3}$  в ряд Тейлора с центром в рациональном числе  $125/64 = (5/4)^3$ , близком к 2:

$$x^{1/3} = \left(\frac{125}{64} + y\right)^{1/3} = \frac{5}{4} \left(1 + \frac{64y}{125}\right)^{1/3} = \frac{5}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^n \left(\frac{4}{3} - k\right)}{n!} \left(\frac{64y}{125}\right)^n.$$

Это разложение верно при  $\left|\frac{64y}{125}\right| < 1$ . У нас  $x = 2 \implies y = 3/64$  расположен ближе к центру, чем к концу интервала сходимости, поэтому ряд сойдётся быстро:

$$2^{1/3} = \frac{5}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^n \left(\frac{4}{3} - k\right)}{n!} \left(\frac{3}{125}\right)^n = \frac{5}{4} \left(1 + \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{125} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2!} \left(\frac{3}{125}\right)^2 + \dots}_{\text{ряд Лейбница}}\right)$$

Имеем  $|r_1| \leq \left|\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{9} \left(\frac{3}{125}\right)^2\right| < 0,0001$ . Ответ:  $\sqrt[3]{2} \approx \frac{5}{4} \left(1 + \frac{1}{125}\right) = 1,2600$ .

**Пример 7.2.** Вычислить  $\ln 2$  с погрешностью  $< 0,0001$ . Подставив  $x = 1$  в ряд Маклорена (11), мы получим сходящийся ряд Лейбница

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

Но чтобы получить погрешность  $|r_N| \leq |a_{N+1}| < 0,0001$ , нам придётся взять  $N = 10000$  : точка на конце интервала сходимости! Чтобы взять точку ближе к центру, воспользуемся тем, что  $\ln 2 = -\ln(1/2)$  :

$$\ln 2 = -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n}.$$

Это знакоположительный ряд. Оценим остаток через сумму геометрической прогрессии:

$$r_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} < \frac{1}{(N+1) 2^{N+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{(N+1) 2^N} < 0,0001$$

при  $N = 10$ . *Ответ:*  $\ln 2 \approx \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n 2^n} \approx 0,6931$ .

### Решение линейных дифференциальных уравнений

Пусть дана задача Коши

$$\begin{cases} P_k y^{(k)} + P_{k-1} y^{(k-1)} + \dots + P_1 y' + P_0 y = f(x) \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(k-1)}(x_0) = y_{k-1}, \end{cases}$$

где  $P_0(x), P_1(x), \dots, P_k(x)$  – многочлены; функция  $f(x)$  аналитична в окрестности  $x_0$ . Будем искать решение  $y(x)$  в виде степенного ряда

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n.$$

Первые  $k$  коэффициентов находим из начальных условий:  $c_n = \frac{y_n}{n!}$  при  $0 \leq n \leq k-1$ . Продифференцировав ряд  $k$  раз, подставим в левую часть уравнения. Представим в виде ряда и правую часть

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n.$$

Получаем равенство сумм двух степенных рядов на некоторой окрестности точки  $x_0$ . Из этого следуют равенства коэффициентов при одинаковых степенях  $(x - x_0)$ .

**Пример 7.3.** Разложить в ряд Маклорена решение задачи Коши

$$\begin{cases} (1+x^2)y' + 2xy = \frac{1}{1+x^2} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Представим  $y(x)$  в виде ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$  ( $c_0 = 0$  по начальному условию), тогда левая часть уравнения запишется в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n+1} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n+1} =$$

[чтобы привести подобные слагаемые, приведём номера слагаемых в соответствие со степенями  $x$ : в первой сумме положим  $m = n - 1$ , в двух последних  $m = n + 1$ ]

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) c_{m+1} x^m + \sum_{m=2}^{\infty} (m-1) c_{m-1} x^m + \sum_{m=2}^{\infty} 2 c_{m-1} x^m =$$

$$= c_1 + 2c_2x + \sum_{m=2}^{\infty} (m+1)(c_{m+1} + c_{m-1})x^m.$$

В правой части имеем

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}, \quad \text{т.е.} \quad b_n = \begin{cases} (-1)^{n/2}, & n \text{ чётно} \\ 0 & n \text{ нечётно} \end{cases}$$

Сопоставив коэффициенты при  $x^0, x^1, x^2, \dots$ , получаем бесконечную систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 = 1 \\ 2c_2 = 0 \\ 3(c_3 + c_1) = -1 \\ 4(c_4 + c_2) = 0 \\ 5(c_5 + c_3) = 1, \quad \text{и т. д.} \end{array} \right. \implies \begin{array}{l} \forall k = 0, 1, 2, \dots \\ c_{2k} = 0; \\ c_{2k+1} = (-1)^k \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2k+1}\right). \end{array}$$

Ответ:  $y(x) = x - \left(1 + \frac{1}{3}\right)x^3 + \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)x^5 - \dots$ , ряд сходится при  $|x| < 1$ .

Таким образом, решение  $y(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$  задаётся этим рядом не на всей своей области определения.

### Решение нелинейных дифференциальных уравнений

Для произвольных дифференциальных уравнений, разрешённых относительно старшей производной  $y^{(k)}(x)$ , решение задачи Коши  $y(x)$  ищут так: по заданным значениям  $y(x_0), \dots, y^{(k-1)}(x_0)$  находят  $y^{(k)}(x_0)$ , затем, продифференцировав уравнение, находят  $y^{(k+1)}(x_0)$ , и т. д. В результате представляют решение через ряд Тейлора:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n. \quad \text{Этот метод более широко применим и менее трудоёмок,}$$

но необходимо помнить о его недостатке: как правило, не удаётся вывести явную формулу для коэффициентов  $c_n$  и определить интервал сходимости полученного ряда.

**Пример 7.4.** Решить уравнение колебаний маятника  $y'' = -\sin y$  с начальными условиями  $y(0) = \pi/2, y'(0) = 0$ , выписав слагаемые до шестой степени  $x$ . Вычисляем производные:

$$\begin{array}{ll} y'' = -\sin y & y''(0) = -1 \\ y''' = -\cos y \cdot y' & y'''(0) = 0 \\ y^{(4)} = \sin y \cdot (y')^2 - \cos y \cdot y'' & y^{(4)}(0) = 0 \\ y^{(5)} = \cos y (y')^3 + 3 \sin y \cdot y' y'' - \cos y \cdot y''' & y^{(5)}(0) = 0 \\ y^{(6)} = -\sin y (y')^4 + 6 \cos y (y')^2 y'' + & y^{(6)}(0) = 3 \\ + 3 \sin y (y'')^2 + 4 \sin y \cdot y' y''' - \cos y \cdot y^{(4)} & \end{array}$$

Ответ:  $y(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{720}x^6 + o(x^6)$ .

## 8 Евклидовы пространства и ряды Фурье

**Определение 8.1.** *Линейное пространство  $E$  называется евклидовым, если на нём определено скалярное произведение, т.е. функция  $(\cdot, \cdot) : E \times E \mapsto \mathbb{R}$ , обладающая такими свойствами:*

1. Коммутативность:  $\forall x, y \in E$  выполнено  $(x, y) = (y, x)$ ;
2. Билинейность:  $\forall x, y, z \in E, a, b \in \mathbb{R}$  имеем  $(ax + by, z) = a(x, z) + b(y, z)$ ;
3. Положительная определённость:  $\forall x \in E$  имеем  $(x, x) \geq 0$ , причём  $(x, x) = 0$  только при  $x = 0$ .

**Норма** в евклидовом пространстве задаётся формулой

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}. \quad (13)$$

**Лемма 8.1.** *Для любых векторов  $x, y \in E$  верно неравенство  $|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ , причём равенство достигается в точности тогда, когда  $x$  и  $y$  линейно зависимы (коллинеарны).*

*Доказательство.* Рассмотрим вектора вида  $x + ty, t \in \mathbb{R}$ . При всяком  $t$  выполнено  $(x + ty, x + ty) = \|x + ty\|^2 \geq 0$ . В силу билинейности,

$$(x + ty, x + ty) = t^2\|y\|^2 + 2t(x, y) + \|x\|^2.$$

Это квадратный трёхчлен от  $t$ , он не принимает отрицательных значений  $\implies$  его дискриминант неположителен:

$$D = 4(x, y)^2 - 4\|y\|^2\|x\|^2 \leq 0 \implies |(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|;$$

неравенство будет строгим в том и только том случае, когда  $x$  и  $y$  не коллинеарны, поскольку в этом случае вектор  $x + ty$  не может быть нулевым.  $\square$

Проверим, что (13) действительно даёт норму.

- 1)  $\|0\| = 0$ , а  $\forall x \neq 0$  имеем  $\|x\| = \sqrt{(x, x)} > 0$ .
- 2)  $\forall c \in \mathbb{R} \quad \|cx\| = \sqrt{(cx, cx)} = \sqrt{c^2(x, x)} = |c| \cdot \|x\|$ .
- 3) неравенство треугольника  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  проверяется так:

$$\begin{aligned} (\|x\| + \|y\|)^2 - \|x + y\|^2 &= (\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\|) - (\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x, y)) = \\ &= 2(\|x\| \cdot \|y\| - (x, y)) \geq 0. \end{aligned}$$

**„Теорема Пифагора“.** Если  $(x, y) = 0$ , то  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ .

### Примеры евклидовых пространств

1. Пространство  $\mathbb{R}^n$  с обычным скалярным произведением  $(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ .

Норма, соответственно, равна  $\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ .

2. Пространство  $C[0; 1]$  непрерывных функций на отрезке  $[0; 1]$  со скалярным произведением  $(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ . Здесь положительная определённость нормы неочевидна: надо проверить, что если  $f \neq 0$ , то  $(f, f) > 0$ . Это следует из свойства интеграла:  $f \neq 0 \implies \exists t_o \in [0; 1] : f^2(t_o) > 0$  и при этом  $\forall t f^2(t) \geq 0$ , и поскольку  $f$  непрерывна, получаем  $\int_0^1 f^2(t)dt > 0$ . Норма в  $C[0; 1]$  равна  $\|f\| = \sqrt{\int_0^1 f^2(t)dt}$ . Пространство  $C[0; 1]$  бесконечномерно, т.е. в нём можно найти сколь угодно много линейно независимых векторов: например, при всяком  $N$  набор функций  $1, t, t^2, \dots, t^N$  линейно независим.

3. Опишем то пространство функций, с которым нам предстоит работать.

**Определение 8.2.** Пространство  $E_o[-\pi; \pi]$  состоит из функций  $f$  на отрезке  $[-\pi; \pi]$ , имеющих лишь конечное множество точек разрыва, и только I рода, причём

$$f(-\pi) = f(\pi) = \frac{f(\pi - 0) + f(-\pi + 0)}{2},$$

а в каждой точке разрыва  $a \in (-\pi; \pi)$  выполнено

$$f(a) = \frac{f(a - 0) + f(a + 0)}{2}.$$

Скалярное произведение в  $E_o[-\pi; \pi]$  задаётся формулой

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt.$$

Проверим положительную определённость этого скалярного произведения. Пусть  $f \neq 0$ , т.е.  $\exists t_o \in [-\pi; \pi] : f(t_o) \neq 0$ . Если  $f$  непрерывна в  $t_o$ , то доказательство такое же, как в предыдущем примере. Если  $t_o$  – точка разрыва I рода или  $t_o = \pm\pi$ , то имеем либо  $f(t_o + 0) \neq 0$ , либо  $f(t_o - 0) \neq 0$ . Пусть, например,  $f(t_o + 0) = 2\varepsilon > 0$ . Тогда  $\exists \delta > 0 : f(t) > \varepsilon$  при всех  $t \in (t_o; t_o + \delta)$ , и тогда  $(f, f) = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)dt > \delta\varepsilon^2$ .

Норма в пространстве  $E_o[-\pi; \pi]$  равна  $\|f\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)dt}$ .

**Определение 8.3.** Конечное или бесконечное множество векторов  $e_0, e_1, e_2, \dots$  называется ортонормированной системой (ОНС), если

$$\|e_i\| = 1 \quad \forall i; \quad (e_i, e_j) = 0 \quad \forall j \neq i.$$

Если евклидово пространство  $E$  имеет конечную размерность  $d$ , то любая ОНС, состоящая из  $d$  векторов, является базисом. В бесконечномерном пространстве ситуация сложнее.

**Определение 8.4.** Пусть  $e_0, e_1, e_2, \dots$  — ОНС в бесконечномерном евклидовом пространстве  $E$ , состоящем из функций; пусть  $f \in E$ . Коэффициентами Фурье функции

$f(t)$  называются числа  $c_i = (f, e_i)$ . **Ряд Фурье** для функции  $f(t)$  – функциональный ряд

$$S(t) = \sum_{i=0}^{\infty} (f, e_i) e_i(t).$$

Аналогично определяются частичные суммы ряда Фурье.

В пространстве  $E_o[-\pi; \pi]$  мы будем рассматривать **тригонометрическую ОНС**

$$e_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}; \quad e_{2k}(t) = \frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}}, \quad e_{2k-1}(t) = \frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (14)$$

Легко проверить, что  $\forall n \ \|e_n\| = 1$ . Проверим ортогональность:

$$(e_0, e_{2k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \, dt = 0; \quad (e_0, e_{2k-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kt \, dt = 0;$$

$$(e_{2k}, e_{2l-1}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \sin lt \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin((l+k)t) + \sin((l-k)t) \, dt = 0;$$

наконец, при  $k \neq l$  получаем

$$(e_{2k}, e_{2l}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \cos lt \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((l-k)t) + \cos((l+k)t) \, dt = 0$$

и аналогично  $(e_{2k-1}, e_{2l-1}) = 0$ .

Коэффициенты Фурье для функции  $f \in E_o[-\pi; \pi]$  вычисляются по формулам:

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt; \quad c_{2k} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt; \quad c_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt.$$

Следовательно, ряд Фурье функции  $f(t)$  по нашей ОНС выглядит так:

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt}{\pi} \cos kx + \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt}{\pi} \sin kx \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \end{aligned}$$

где коэффициенты  $a_k, b_k$  (это не коэффициенты Фурье!) вычисляются так:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt; \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt; \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt.$$

**Определение 8.5.** Пусть  $L$  – линейное подпространство евклидова пространства  $E$ . **Ортогональной проекцией** вектора  $y \in E$  на  $L$  называется такой вектор  $z \in L$ , что

$$y - z \perp L, \quad \text{т.е.} \quad \forall x \in L \quad (x, y - z) = 0.$$

Обозначение:  $z = P_L y$ .

**Лемма 8.2.** Пусть  $L$  – линейное подпространство евклидова пространства  $E$ . Тогда вектор  $z = P_L y$  – это единственный вектор, на котором достигается минимум  $\min_{x \in L} \|x - y\|$ .

*Доказательство.* Пусть  $z = P_L y$ , и пусть  $x \in L$ ,  $x \neq z$ . Тогда

$$(x - z, z - y) = 0 \implies \|x - y\|^2 = \|x - z\|^2 + \|z - y\|^2 > \|z - y\|^2.$$

□

В случае конечномерного  $L$  существование ортогональной проекции и формулу для её нахождения даёт следующая теорема.

**Теорема 8.1.** Пусть  $e_0, e_1, e_2, \dots$  – ОНС в евклидовом пространстве  $E$ , и подпространство  $L \subset E$  – линейная оболочка  $e_0, \dots, e_n$  (обозначение:  $L = \text{span}\{e_0, \dots, e_n\}$ ). Тогда для всякого вектора  $y \in E$  ортогональная проекция на  $L$  равна

$$P_L y = \sum_{i=0}^n (y, e_i) e_i.$$

*Доказательство.* Будем искать вектор  $z = P_L y$ . Разложим  $z$  по базису  $L$ :  $z = \sum_{i=0}^n c_i e_i$ .

Для векторов  $e_j \in L$ ,  $j = 0, \dots, n$ , выполняется

$$0 = (e_j, y - z) = (e_j, y) - \sum_{i=0}^n c_i (e_j, e_i) = (e_j, y) - c_j \implies c_j = (y, e_j).$$

Это необходимо и достаточно для того, чтобы  $\forall x \in L \quad (x, y - z) = 0$ .

□

Поскольку  $y - P_L y \perp P_L y$ , верна формула

$$\|y\|^2 = \|P_L y\|^2 + \|y - P_L y\|^2 = \sum_{i=0}^n (y, e_i)^2 + \|y - P_L y\|^2,$$

следовательно, расстояние от вектора  $y$  до  $L = \text{span}\{e_0, \dots, e_n\}$  (линейной оболочки конечной ОНС) вычисляется по формуле

$$\text{dist}(y, L) = \|y - P_L y\| = \sqrt{\|y\|^2 - \sum_{i=0}^n (y, e_i)^2}.$$

## 9 Среднеквадратичная сходимость рядов Фурье

Говорят, что функции  $y_n \in E$  сходятся к  $y$  в **среднеквадратичном**, если они сходятся по норме:  $\|y_n - y\| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Всюду далее будем использовать обозначение  $L_n = \text{span} \{e_0, \dots, e_n\}$ .

**Теорема 9.1. (Неравенство Бесселя).** Пусть  $\{e_i\}_{i=0}^{\infty}$  – ОНС в евклидовом пространстве  $E$ ; пусть вектор  $y \in E$ . Тогда

$$\sum_{i=0}^{\infty} (y, e_i)^2 \leq \|y\|^2. \quad (15)$$

*Доказательство.* Суммы  $Q_n = \sum_{i=0}^n (y, e_i)^2$  возрастают по  $n$ . При каждом  $n \in \mathbb{N}$  квадрат расстояния от вектора  $y$  до  $L_n$  составляет

$$\text{dist}^2(y, L_n) = \|y\|^2 - \sum_{i=0}^n (y, e_i)^2 \geq 0,$$

следовательно,  $Q_n \leq \|y\|^2$ , откуда следует, что  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n \leq \|y\|^2$ .  $\square$

**Определение 9.1.** ОНС  $\{e_i\}_{i=0}^{\infty}$  в евклидовом пространстве  $E$  называется **полной**, если для вектора  $y \in E$

$$\text{из } \forall i = 0, 1, 2, \dots \quad (y, e_i) = 0 \quad \text{следует } y = 0,$$

т.е. вектор однозначно определяется своими коэффициентами Фурье.

**Определение 9.2.** ОНС  $\{e_i\}_{i=0}^{\infty}$  в евклидовом  $E$  называется **замкнутой**, если для всякого вектора  $y \in E$

$$\text{dist}(y, L_n) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

т.е. вектор  $y$  можно приблизить конечными линейными комбинациями векторов из ОНС с **любой точностью по норме**.

**Теорема 9.2.** Если ОНС  $\{e_i\}_{i=0}^{\infty}$  в евклидовом пространстве  $E$  замкнута, то она полна.

*Доказательство.* Пусть  $y \in E$  – вектор, для которого  $\forall i = 0, 1, 2, \dots \quad (y, e_i) = 0$ . При каждом  $n \in \mathbb{N}$  его норму оценим так:

$$\|y\|^2 = \sum_{i=0}^n \underbrace{(y, e_i)^2}_{=0} + \text{dist}^2(y, L_n) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Следовательно,  $\|y\| = 0$ , а значит,  $y = 0$ .  $\square$

Если ОНС замкнута, то для всякого  $y \in E$  ряд Фурье среднеквадратично сходится к самому  $y$ :

$$\|y - S_N\| = \left\| y - \sum_{i=0}^n (y, e_i) e_i \right\| = \text{dist}(y, L_n) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$



**Теорема 9.3. (Равенство Парсеваля).** Пусть  $\{e_i\}_{i=0}^{\infty}$  – замкнутая ОНС в евклидовом пространстве  $E$ ; пусть вектор  $y \in E$ . Тогда

$$\|y\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} (y, e_i)^2. \quad (16)$$

*Доказательство.* Ряд в правой части сходится, поскольку частичные суммы возрастают и не превышают  $\|y\|^2$ . При этом

$$\|y\|^2 - \sum_{i=0}^{\infty} (y, e_i)^2 = \|y\|^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n (y, e_i)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}^2(y, L_n) = 0. \quad \square$$

**Теорема 9.4.** В евклидовом пространстве  $E_0[-\pi; \pi]$  ОНС (14) является замкнутой.

*Доказательство.* При доказательстве нам понадобится

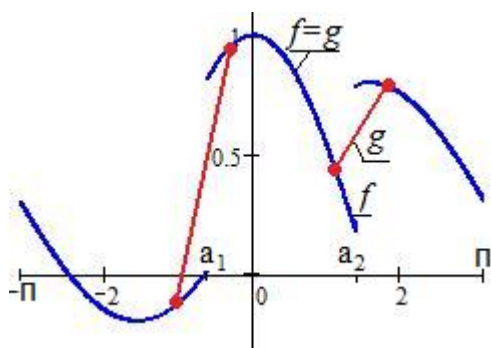
**Теорема Вейерштрасса**<sup>5</sup>. Если функция  $f(t)$   $2\pi$ -периодична и непрерывна, то для  $\forall \varepsilon > 0$  существует тригонометрический многочлен, т.е. функция вида

$$P(t) = c + \sum_{k=1}^N (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

такой, что  $|P(t) - f(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in \mathbb{R}$ . Другими словами: непрерывную  $2\pi$ -периодичную функцию можно с любой точностью равномерно приблизить тригонометрическим многочленом.

Пусть теперь  $f \in E_0[-\pi; \pi]$ . Положим  $M = \sup |f|$ . Пусть  $-\pi = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = \pi$ , где  $a_1, \dots, a_{n-1}$  – точки разрыва  $f$ . Выберем  $\delta > 0$ , чтобы  $\delta < \frac{1}{2} \min_{i=1}^n (a_i - a_{i-1})$ , и построим непрерывную функцию  $g$  по формуле

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{при } t = a_i, \quad i = 0, \dots, n \\ f(t) & \text{при } t \in [-\pi; \pi] \setminus \bigcup_{i=0}^n (a_i - \delta; a_i + \delta) \\ \text{линейна} & \text{на } [a_i - \delta; a_i], \quad i = 1, \dots, n \\ \text{линейна} & \text{на } [a_i; a_i + \delta], \quad i = 0, \dots, n-1 \end{cases}$$



<sup>5</sup>Доказательство оставим на последнюю лекцию

Продолжим  $g$  до  $2\pi$ -периодичной непрерывной функции. Тогда  $\sup |g| \leq M$ , на отрезке  $[-\pi; \pi]$   $g$  отличается от  $f$  на интервалах суммарной длины  $2n\delta$ , поэтому норма их разности оценивается через  $\delta$ :

$$\|g - f\|^2 \leq 2n\delta(\sup |g - f|)^2 \leq 2n\delta(2M)^2 = 8nM^2\delta.$$

Если нам задан  $\varepsilon > 0$ , мы возьмём  $\delta = \varepsilon^2/32nM^2$ , и тогда  $\|g - f\| \leq \varepsilon/2$ .

Применив теорему Вейерштрасса, найдём такой тригонометрический многочлен  $P$ , что  $\sup |P - g| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}}$ . Тогда  $\|P - g\| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Отсюда по неравенству треугольника  $\|P - f\| \leq \|P - g\| + \|g - f\| < \varepsilon$ . Поскольку  $\varepsilon > 0$  произвольно, замкнутость ОНС (14) доказана.  $\square$

**Пример 9.1.** Найти коэффициенты Фурье, выписать ряд Фурье и равенство Парсеваля для функции

$$f(t) = \begin{cases} t, & -\pi < t < \pi \\ 0, & t = \pm\pi. \end{cases}$$

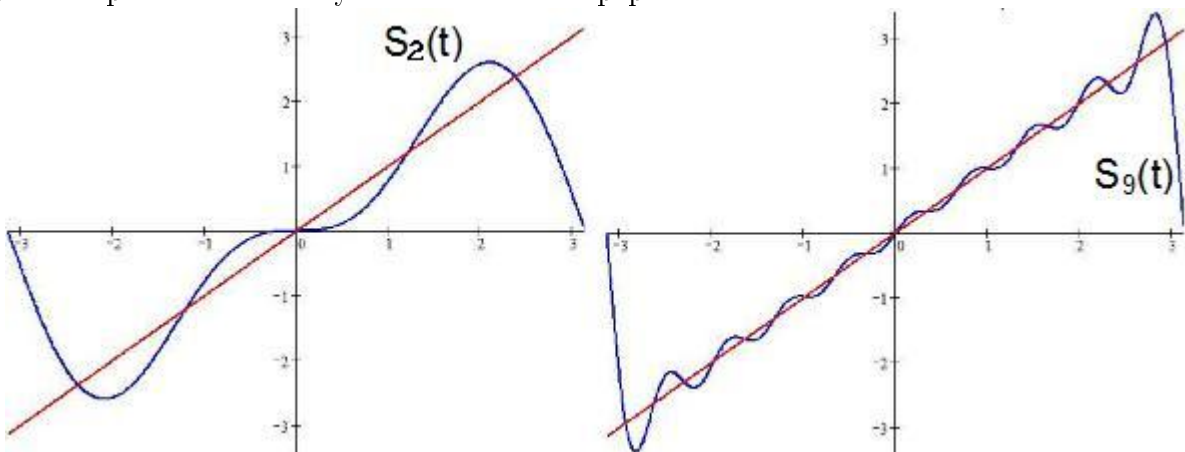
Функция  $f$  нечётна. При чётных  $n$  функции  $e_n$  являются чётными, поэтому  $(f, e_n) = 0$ . При нечётных  $n = 2k - 1$  имеем

$$\begin{aligned} (f, e_{2k-1}) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin kt \, dt = \frac{-1}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} t \, d \cos kt = \\ &= \frac{-1}{k\sqrt{\pi}} \left( t \cos kt - \frac{\sin kt}{k} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{-2\pi \cos(k\pi)}{k\sqrt{\pi}} = \frac{2\sqrt{\pi}(-1)^{k-1}}{k}. \end{aligned}$$

Следовательно, ряд Фурье для функции  $f$  имеет вид

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k-1}}{k} \sin kx = 2 \sin x - \frac{2}{2} \sin 2x + \frac{2}{3} \sin 3x - \frac{2}{4} \sin 4x + \dots$$

В каждой точке  $x$  ряд сходится к  $f(x)$  по признаку Дини или Дирихле (см. следующую лекцию). При  $0 \neq x \neq \pm\pi$  сходимость условная. И, конечно же, ряд сходится неравномерно: иначе его сумма была бы непрерывной.



Выпишем равенство Парсеваля для  $f$  :

$$\|f\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} (f, e_i)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_{2k-1})^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{2\sqrt{\pi}(-1)^{k-1}}{k} \right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\pi}{k^2}$$

В то же время

$$\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^3}{3}$$

Так неожиданно мы получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{2\pi^3}{3} / 4\pi = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,645.$$

Заметим, что поточечная сходимость ряда Фурье для функции  $f(t)$  даёт при  $t = \pi/2$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k-1}}{k} \sin \frac{k\pi}{2} = 2 \underbrace{\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots\right)}_{\text{тот же ряд, что для } \operatorname{arctg} 1} = \frac{\pi}{2},$$

Нас будет интересовать не только среднеквадратичная сходимость частичных сумм  $S_n(x)$  ряда Фурье к функции  $f \in E_0[-\pi; \pi]$ . Мы уже знаем три различных типа сходимости:

(Т) Поточечная сходимость:  $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x) \quad \forall x \in [-\pi; \pi]$ .

(Р) Равномерная сходимость:  $f_n \rightrightarrows f$ , т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{[-\pi; \pi]} |f_n(x) - f(x)| = 0$ .

(Н) Сходимость по норме (среднеквадратичная):  $\|f_n - f\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ .

Связь между этими типами сходимости такова:

$$\begin{array}{lll} \text{(Т)} \not\Rightarrow \text{(Р)} & \text{(Р)} \implies \text{(Т)} & \text{(Н)} \not\Rightarrow \text{(Т)} \\ \text{(Т)} \not\Rightarrow \text{(Н)} & \text{(Р)} \implies \text{(Н)} & \text{(Н)} \not\Rightarrow \text{(Р)} \end{array}$$

*Доказательство.* (Р)  $\implies$  (Т) – очевидно. (Т)  $\not\Rightarrow$  (Р) – контрпример: функции  $\sqrt{2n+1} \cos t$  неравномерно сходятся к разрывной функции  $\operatorname{sign} \cos t$ .

(Р)  $\implies$  (Н) – следует из оценки  $\|g - f\|^2 \leq 2\pi \sup_{[-\pi; \pi]} |g(x) - f(x)|^2$ .

(Т)  $\not\Rightarrow$  (Н) : приведём контрпример. Пусть

$$f(x) \equiv 0; \quad f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n} \sin(n\pi x) & \text{при } |x| \leq 1/n \\ 0 & \text{при } |x| \geq 1/n \end{cases}$$

Тогда  $f_n(x) \rightarrow 0 \quad \forall x \in [-\pi; \pi]$ , однако  $\|f_n - 0\| = \|f_n\| = 1 \not\rightarrow 0$ .

(Н)  $\not\Rightarrow$  (Т) : приведём другой контрпример. Пусть

$$f(x) \equiv 0; \quad f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{если } \exists k \in \mathbb{Z} : \ln n < x - 2\pi k < \ln(n+1) \\ 0 & \text{если } \nexists k \in \mathbb{Z} : \ln n \leq x - 2\pi k \leq \ln(n+1) \\ 1/2 & \text{в точках разрыва.} \end{cases}$$

Тогда  $f_n(x) \neq 0$  на одном-двух промежутках суммарной длины  $\ln \frac{n+1}{n} < 1/n \implies \|f_n - 0\| < 1/\sqrt{n} \rightarrow 0$ . Однако, ни при каком  $x \in [-\pi; \pi]$  не будет  $f_n(x) \rightarrow 0$ , поскольку при всяком  $x$  значение  $f_n(x) = 1$  будет встречаться при бесконечно многих  $n$ . И тем более (H)  $\not\Rightarrow$  (P).  $\square$

## 10 Поточечная сходимость рядов Фурье и свойства коэффициентов

В предыдущей лекции было доказано, что частичные суммы ряда Фурье функции  $f(x)$  сходятся к ней в среднеквадратичном:  $\|S_n - f\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Но будет ли поточечная сходимость? И если да, то будет ли она равномерной?

### Признаки поточечной сходимости

**Признак Дини.** Пусть  $f \in E_0[-\pi; \pi]$ , и пусть для некоторой точки  $x$  несобственный интеграл

$$\int_0^\pi \left| \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \right| dt$$

сходится. Тогда  $S_n(x) \rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Признак Дини является локальным: его выполнение в точке  $x$  не зависит от поведения функции  $f$  вне сколь угодно малой окрестности  $x$ .

**Частный случай**<sup>6</sup>. Пусть функция  $f \in E_0[-\pi; \pi]$  в некоторой точке  $x$  имеет конечные правую и левую производные, причём если  $x$  – точка разрыва I рода, то они определяются так:

$$f'(x+0) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(x+h) - f(x+0)}{h}; \quad f'(x-0) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(x+h) - f(x-0)}{h}$$

Тогда  $S_n(x) \rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Признак Дирихле.** Пусть  $f \in E_0[-\pi; \pi]$  кусочно монотонна, т.е. существуют точки  $-\pi = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = \pi$ , такие, что  $f$  монотонна на каждом интервале  $(a_{i-1}; a_i)$ . Тогда для каждого  $x \in [-\pi; \pi]$  имеем  $S_n(x) \rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Признаки Дини и Дирихле – самые часто применяемые признаки поточечной сходимости тригонометрических рядов Фурье. Оба они являются достаточными, но не являются необходимыми, как показывают следующие два примера.

**Пример 10.1.** Функция  $f(x) = \frac{1}{2 - \ln|x|}$  удовлетворяет признаку Дирихле, но не удовлетворяет признаку Дини в точке 0.

Функция  $g(x) = x^2 \cos(1/x)$  во всех точках дифференцируема  $\implies$  удовлетворяет признаку Дини, но не удовлетворяет признаку Дирихле.

### Зависимость коэффициентов Фурье от свойств функции

Пусть функция  $f(x)$  разложена в ряд Фурье, поточечно сходящийся к ней:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

<sup>6</sup>Будет доказан на последней лекции

где

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}; \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Коэффициенты тригонометрического ряда  $a_k, b_k$  связаны с коэффициентами Фурье соотношениями

$$a_0 = c_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}}; \quad a_k = \frac{c_{2k}}{\sqrt{\pi}}; \quad b_k = \frac{c_{2k-1}}{\sqrt{\pi}}.$$

С учётом этих соотношений можно переписать равенство Парсеваля в виде

$$\|f\|^2 = \frac{\pi}{2} a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

Поскольку этот ряд сходится, получаем  $a_k \rightarrow 0, b_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ .

### Чётность и нечётность. Неполные ряды Фурье

Если функция  $f \in E_o[-\pi; \pi]$  чётна, то  $b_k = 0 \forall k \in \mathbb{N}$ , и получится ряд Фурье из косинусов

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx.$$

Если же функция  $f \in E_o[-\pi; \pi]$  нечётна, то  $a_k = 0 \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , и получится ряд Фурье из синусов. Если функция задана только на полупериоде, мы можем считать её чётной или нечётной, соответственно разложить по косинусам или по синусам:

**Теорема 10.1.** Пусть функция  $f(x)$  на отрезке  $[0; \pi]$  имеет конечное множество точек разрыва и только I рода, и пусть в каждой точке разрыва  $a \in (0; \pi)$  выполнено

$$f(a) = \frac{f(a-0) + f(a+0)}{2}.$$

Пусть  $f$  кусочно-монотонна.

а) Если  $f$  непрерывна в 0 и  $\pi$ , то она раскладывается в ряд из косинусов

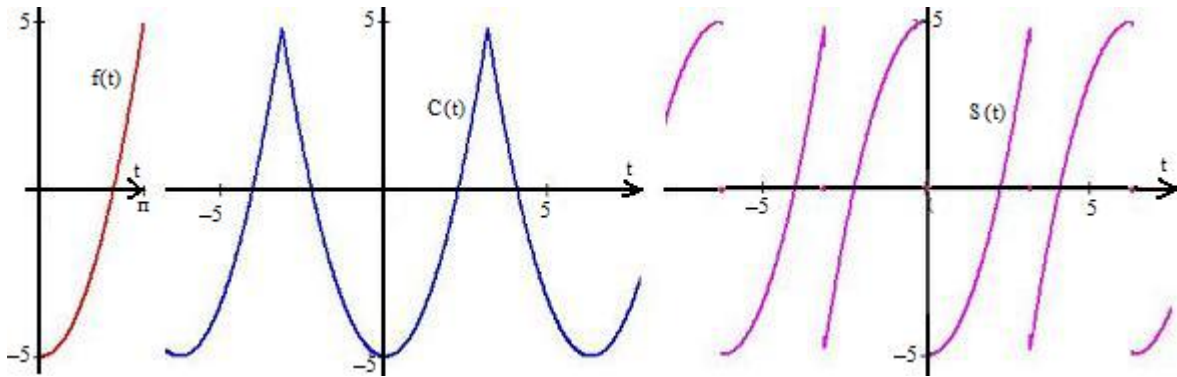
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \quad \text{где} \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos kt \, dt, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

б) Если  $f(0) = f(\pi) = 0$ , то она раскладывается в ряд из синусов

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \quad \text{где} \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin kt \, dt, \quad k \in \mathbb{N}.$$

*Доказательство.* В случае а) продолжим функцию  $f$  на отрезок  $[-\pi; \pi]$ , сделав её чётной:  $f(-x) = f(x) \forall x \in (0; \pi]$ . В случае б) продолжим  $f$  на отрезок  $[-\pi; \pi]$ , сделав её нечётной:  $f(-x) = -f(x) \forall x \in (0; \pi]$ . В обоих случаях мы получим функцию  $f \in E_0[-\pi; \pi]$ , удовлетворяющую условиям признака Дирихле поточечной сходимости. Для чётной функции получим  $b_k = 0$ , а интегралы для вычисления  $a_k$  сведутся к интегралам от 0 до  $\pi$ . Для нечётной функции – наоборот.  $\square$

**Пример 10.2.** Пусть на  $(0; \pi)$  дана функция  $f(t) = t^2 - 5$ . Если разложить её по косинусам (доопределив в точках 0 и  $\pi$  по непрерывности), то получится ряд, сумму которого мы обозначим  $C(t)$ . Если же разложить  $f(t)$  по синусам (доопределив  $f(0) = f(\pi) = 0$ ), то получится ряд, сумму которого мы обозначим  $S(t)$ . Графики этих функций выглядят так:



### Порядок малости коэффициентов

**Определение 10.1.** Функция  $f(x)$  с периодом  $2\pi$  называется  $m$  раз кусочно-непрерывно дифференцируемой, если

- 1) она имеет непрерывную  $(m - 1)$ -ю производную;
- 2) существуют точки  $-\pi = a_0 < a_1 < \dots < a_n = \pi$ , такие, что  $f^{(m-1)}$  непрерывно дифференцируема на интервалах  $(a_{i-1}; a_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;
- 3) существуют односторонние производные  $(f^{(m-1)})'(a_i \pm 0)$ .

Заметим, что по теореме Лагранжа ( $\tilde{x}$  между  $a_i$  и  $x$ ) существует

$$(f^{(m-1)})'(a_i \pm 0) = \lim_{x \rightarrow a_i \pm 0} \frac{f^{(m-1)}(x) - f^{(m-1)}(a_i)}{x - a_i} = \lim_{x \rightarrow a_i \pm 0} f^{(m)}(\tilde{x}) = \lim_{x \rightarrow a_i \pm 0} f^{(m)}(x).$$

**Лемма 10.1.** Пусть функция  $f \in E_0[-\pi; \pi]$  кусочно-непрерывно дифференцируема на  $[-\pi; \pi]$ . Тогда ряд Фурье для  $f$  сходится равномерно, а коэффициенты тригонометрического ряда  $\alpha_k, \beta_k$  для  $f'$  связаны с коэффициентами  $a_k, b_k$  для самой  $f$  такими соотношениями:

$$\alpha_0 = 0; \quad \alpha_k = k b_k; \quad \beta_k = -k a_k.$$

*Доказательство.* Именно такие соотношения должны получиться при почленном дифференцировании ряда. Но применить теорему 4.3 мы не можем: ряд Фурье для

$f'$  может сходиться неравномерно. Вычислим  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  непосредственно:  
 $\alpha_0 = \frac{1}{\pi}(f(\pi) - f(-\pi)) = 0$  по формуле Ньютона–Лейбница;

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kt f'(t) dt = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} \cos kt df(t) = && \text{по частям} \\ &= \frac{1}{\pi} \underbrace{\sum_{i=1}^n (\cos(ka_i) f(a_i) - \cos(ka_{i-1}) f(a_{i-1}))}_{=0} + \frac{1}{\pi} \underbrace{\sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(t) k \sin kt dt}_{k b_k}; \end{aligned}$$

аналогично получаем  $\beta_k = -k a_k$ . Равномерную сходимость ряда Фурье для  $f$  докажем по критерию Вейерштрасса, построив сходящуюся мажоранту

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\beta_k| + |\alpha_k|}{k} :$$

по неравенствам  $|AB| \leq \frac{A^2 + B^2}{2}$  и  $(|A| + |B|)^2 \leq 2(A^2 + B^2)$  получаем

$$\sum_{k=M+1}^N \frac{|\beta_k| + |\alpha_k|}{k} \leq \sum_{k=M+1}^N (\beta_k^2 + \alpha_k^2) + \sum_{k=M+1}^N \frac{1}{k^2} \xrightarrow{N > M \rightarrow \infty} 0,$$

поскольку ряды  $\sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k^2 + \alpha_k^2)$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}$  сходятся.  $\square$

**Следствие 10.1.** Пусть функция  $f \in E_0[-\pi; \pi]$  кусочно-непрерывно дифференцируема  $m$  раз. Тогда коэффициенты тригонометрического ряда для  $f$  являются малыми вида  $o(1/k^m)$  при  $k \rightarrow \infty$ .

*Доказательство.* Обозначим через  $\alpha_k, \beta_k$  коэффициенты тригонометрического ряда для  $f^{(m)}$ . Как мы знаем,  $\alpha_k \rightarrow 0, \beta_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Если  $m$  чётно, то  $|a_k| = |\alpha_k|/k^m, |b_k| = |\beta_k|/k^m$ ; при нечётном  $m$ , соответственно,  $|a_k| = |\beta_k|/k^m, |b_k| = |\alpha_k|/k^m$ .  $\square$

**Пример 10.3.** Разложить  $f(t) = t^2$  в тригонометрический ряд на  $[-\pi; \pi]$ .

Поточечная сходимость есть. Функция чётная  $\implies$  получится ряд из косинусов

$$t^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt.$$

Функция кусочно дифференцируема. Её производная равна  $f'(t) = 2t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k-1}}{k} \sin kx$  (см. пример 9.1). Следовательно,  $a_k = \frac{4(-1)^{k-1}}{-k^2}$ .

Только коэффициент  $a_0$  надо вычислить отдельно

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 dt = \frac{2}{\pi} \frac{t^3}{3} \Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}.$$



Получаем разложение на  $[-\pi; \pi]$ :  $t^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2} \cos kx$ . Составим равенство Парсеваля.

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= 2 \int_0^{\pi} t^4 dt = 2 \frac{t^5}{5} \Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^5}{5} = \frac{\pi}{2} a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \\ &= \frac{\pi}{2} \left( \frac{2\pi^2}{3} \right)^2 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{4(-1)^k}{k^2} \right)^2 = \frac{2\pi^5}{9} + 16\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}. \end{aligned}$$

Отсюда  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{1}{16\pi} \left( \frac{2}{5} - \frac{2}{9} \right) \pi^5 = \frac{\pi^4}{90} \approx 1,0823$ .

### Тригонометрические ряды с периодом $2L$

Пусть  $L > 0$ . Если  $f \in E_0[-L; L]$ , то её можно разложить в тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right),$$

сводя её к  $2\pi$ -периодичной функции заменой  $t = \frac{\pi x}{L}$ . Коэффициенты будут такими:

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}; \quad b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

## 11 Свёртка периодических функций (дополнительная лекция)

**Определение 11.1.** Пусть  $f$  и  $g$  – кусочно-непрерывные  $2\pi$ -периодические функции. Их свёрткой называется  $2\pi$ -периодическая функция

$$f * g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)dt.$$

Свёртка коммутативна: сделав замену  $u = x - t$ , мы получим

$$\begin{aligned} g * f(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)dt = \int_{x+\pi}^{x-\pi} f(u)g(x-u)(-du) = \\ &= \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(u)g(x-u)du = \int_{-\pi}^{\pi} f(u)g(x-u)du = f * g(x) \end{aligned}$$

в силу  $2\pi$ -периодичности.

**Лемма 11.1.** Если  $g$  – тригонометрический многочлен степени  $n$ , то  $f * g$  – тригонометрический многочлен степени не выше  $n$ .

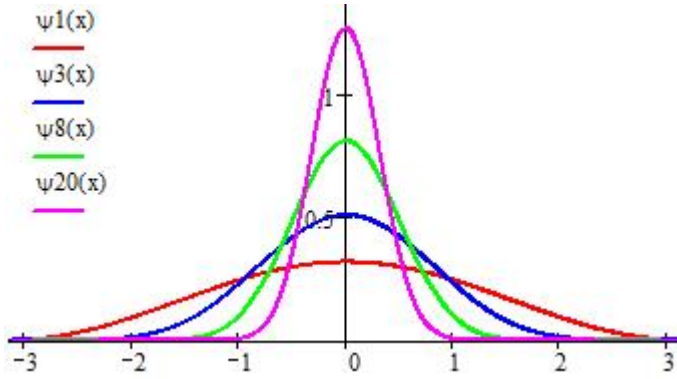
*Доказательство.* Пусть  $g(x) = C + \sum_{k=1}^n (A_k \cos kx + B_k \sin kx)$ . Тогда

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left( C + \sum_{k=1}^n (A_k (\cos kx \cos kt + \sin kx \sin kt) + \right. \\ &\quad \left. + B_k (\sin kx \cos kt - \cos kx \sin kt)) \right) dt = \\ &= C\pi a_0 + \sum_{k=1}^n \left( \pi(A_k a_k - B_k b_k) \cos kx + \pi(A_k b_k + B_k a_k) \sin kx \right). \end{aligned}$$

□

**Доказательство теоремы Вейерштрасса.** Пусть  $f$  – непрерывная  $2\pi$ -периодическая функция,  $M = \max |f|$ . Определим функции

$$\psi_n(x) = \left( \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos t)^n dt \right)^{-1} (1 + \cos x)^n.$$



Функция  $\psi_n$  является тригонометрическим многочленом степени  $n$ , ведь  $\cos kx$  является многочленом степени  $k$  от  $\cos x \implies \cos^n x$  выражается линейно через  $\cos x, \dots, \cos nx$ . По построению  $\psi_n \geq 0$  и  $\int_{-\pi}^{\pi} \psi_n(t) dt = 1$ . Кроме того,  $\forall \delta \in (0; \pi)$  получается

$$\gamma_n := \int_{-\pi}^{-\delta} \psi_n(t) dt = \int_{\delta}^{\pi} \psi_n(t) dt < \frac{\pi \max_{\delta \leq |x| \leq \pi} \psi_n(x)}{\delta \min_{|x| \leq \delta/2} \psi_n(x)} = \frac{\pi}{\delta} \left( \frac{1 + \cos \delta}{1 + \cos(\delta/2)} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Будем приближать  $f$  тригонометрическими многочленами  $f_n = f * \psi_n$ . Зададим  $\varepsilon > 0$  и в силу равномерной непрерывности  $f$  выберем  $\delta \in (0; 1)$  так, что  $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$  при  $|x - y| \leq \delta$ .

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} \psi_n(t) f(x-t) dt - \int_{-\pi}^{\pi} \psi_n(t) f(x) dt \right| \leq \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \psi_n(t) |f(x-t) - f(x)| dt \leq \int_{-\delta}^{\delta} \psi_n(t) |f(x-t) - f(x)| dt + \\ &\quad + 2M \left( \int_{-\pi}^{-\delta} \psi_n(t) dt + \int_{\delta}^{\pi} \psi_n(t) dt \right) \leq 2\delta\varepsilon + 2M 2\gamma_n < 3\varepsilon \end{aligned}$$

при достаточно большом  $n$ . Таким образом,  $\max |f_n - f| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , что и требовалось доказать.  $\square$

Представим частичную сумму ряда Фурье через свёртку.

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx) dt = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt = f * D_n(x), \end{aligned}$$

где ядром Дирихле называется функция

$$\begin{aligned}
 D_n(u) &= \frac{1}{2\pi} \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos ku \right) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \cos ku = \\
 &= \frac{1}{2\pi \sin \frac{u}{2}} \sum_{k=-n}^n \cos ku \sin \frac{u}{2} = \frac{1}{4\pi \sin \frac{u}{2}} \sum_{k=-n}^n \left( \sin \left( k + \frac{1}{2} \right) u - \sin \left( k - \frac{1}{2} \right) u \right) = \\
 &= \frac{1}{4\pi \sin \frac{u}{2}} \left( \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) u - \sin \left( -n - \frac{1}{2} \right) u \right) = \frac{\sin \left( n + \frac{1}{2} \right) u}{2\pi \sin \frac{u}{2}}.
 \end{aligned}$$

Функция  $D_n$  чётная. Поскольку  $1 * D_n \equiv 1$ , получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 1 \implies \int_{-\pi}^0 D_n(t) dt = \int_0^{\pi} D_n(t) dt = \frac{1}{2}.$$

**Доказательство признака Дини** в точке, где существуют односторонние производные

$$f'(a \pm 0) = \lim_{t \rightarrow \pm 0} \frac{f(a+t) - f(a \pm 0)}{t}.$$

$$\begin{aligned}
 S_{2n}(a) - f(a) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(a-t) D_n(t) dt - \left( \int_0^{\pi} f(a-0) D_n(t) dt + \int_{-\pi}^0 f(a+0) D_n(t) dt \right) = \\
 &= \int_0^{\pi} (f(a-t) - f(a-0)) D_n(t) dt + \int_{-\pi}^0 (f(a+t) - f(a+0)) D_n(t) dt = \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} F(a-t) \sin \left( \left( n + \frac{1}{2} \right) t \right) dt,
 \end{aligned}$$

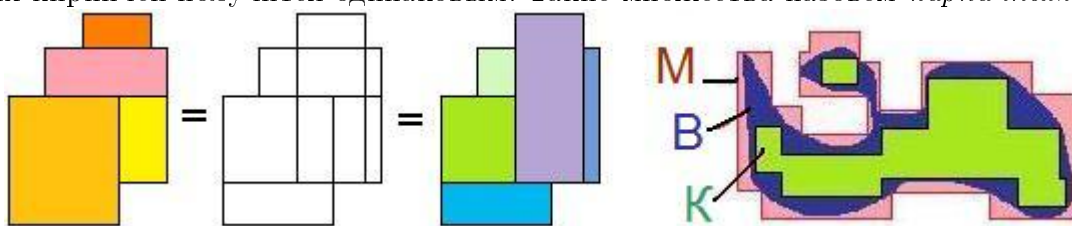
где  $F(a-t) = \frac{f(a-t) - f(a-0 \operatorname{sign} t)}{2\pi \sin \frac{t}{2}}$  – кусочно-непрерывная функция. Нетрудно

проверить, что система функций  $\left\{ g_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin \left( \left( n + \frac{1}{2} \right) t \right) \right\}_{n=1}^{\infty}$  является ортонормированной. Из неравенства Бесселя

$$\sum_{n=1}^{\infty} (F, g_n)^2 \leq \|F\|^2 < +\infty \implies S_{2n}(a) - f(a) = \sqrt{\pi} (F, g_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad \square$$

# 1 Кратные интегралы

Прежде чем дать определение  $n$ -кратного интеграла, т.е. интеграла по подмножеству пространства  $\mathbb{R}^n$ , нам нужно обобщить понятия квадратуемости и кубичности, определив  $n$ -мерные объёмы. Для  $n$ -мерного кирпича, т.е. прямоугольного параллелепипеда  $\Pi = [a_1; b_1] \times \dots \times [a_n; b_n]$ , объём  $V(\Pi) = (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n)$ . Нетрудно проверить, что если один кирпич составлен из нескольких (они могут иметь общие точки на гранях, но не должны иметь общих внутренних точек), то их объёмы складываются (аддитивность). Из этого следует, что если множество можно составить из конечного числа кирпичей разными способами, то его объём = сумма объёмов этих кирпичей получится одинаковым. Такие множества назовём *кирпичными*.



**Определение 1.1.** Пусть множество  $B \subset \mathbb{R}^n$ . Его внутренний и внешний  $n$ -мерный объём определяются так (здесь  $K, M$  – кирпичные множества) :

$$V_*(B) = \sup\{V(K) : K \subset B\}; \quad V^*(B) = \inf\{V(M) : M \supset B\}.$$

Если  $V_*(B) = V^*(B)$ , то говорят, что  $B$  **измеримо (по Жордану)**, и определён его  $n$ -мерный **объём**  $V(B) = V_*(B) = V^*(B)$ .

Если множество измеримо по Жордану, то оно ограничено. Если  $K$  и  $M$  – два кирпичных множества,  $K \subset B \subset M$  и  $V(K) > V(B) - \varepsilon/2$ ,  $V(M) < V(B) + \varepsilon/2$ , то граница множества  $B$  содержится во множестве  $[M \setminus K]$ , которое также является кирпичным и имеет объём  $< \varepsilon$ . Таким образом, если множество  $B \subset \mathbb{R}^n$  измеримо по Жордану, то его граница  $\partial B$  тоже измерима и  $V(\partial B) = 0$ .

Докажем аддитивность  $n$ -мерного объёма. Пусть  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  – два измеримых множества,  $A \cap B = \emptyset$ . Задав  $\varepsilon > 0$ , найдём такие кирпичные  $A_*, A^*, B_*, B^*$ , что

$$A_* \subset A \subset A^*, \quad V(A_*) > V(A) - \varepsilon, \quad V(A^*) < V(A) + \varepsilon,$$

$$B_* \subset B \subset B^*, \quad V(B_*) > V(B) - \varepsilon, \quad V(B^*) < V(B) + \varepsilon.$$

С учётом того, что  $A_* \cap B_* = \emptyset$ , мы получаем:

$$V_*(A \cup B) \geq V(A_* \cup B_*) = V(A_*) + V(B_*) > V(A) + V(B) - 2\varepsilon,$$

$$V^*(A \cup B) \leq V(A^* \cup B^*) \leq V(A^*) + V(B^*) < V(A) + V(B) + 2\varepsilon,$$

и поскольку  $\varepsilon$  можно взять сколь угодно малым, отсюда следует

$$V_*(A \cup B) = V^*(A \cup B) = V(A) + V(B) \implies V(A \cup B) = V(A) + V(B).$$

**Определение 1.2.** Пусть  $B \subset \mathbb{R}^n$  – измеримое множество. **Разбиением**  $B$  называется конечный набор измеримых множеств  $\{B_i\}_{i=1}^m$ , таких, что  $\bigcup_{i=1}^m B_i = B$ , и разные множества  $B_i$  не имеют общих внутренних точек. **Диаметром** разбиения называется величина

$$\text{diam}\{B_i\}_{i=1}^m = \max_{i=1}^m \text{diam } B_i, \quad \text{где } \text{diam } B_i = \sup\{|XY| : X, Y \in B_i\}.$$

**Определение 1.3.** Пусть  $\{B_i\}_{i=1}^m$  – разбиение множества  $B \subset \mathbb{R}^n$ , и пусть выбраны точки  $X_i \in B_i$ . **Интегральной суммой** функции  $f : B \mapsto \mathbb{R}$  по разбиению  $\{B_i\}$  с выбором точек  $\{X_i\}$  называется сумма  $S_{\{B_i\}}^{\{X_i\}}(f) = \sum_{i=1}^m V(B_i)f(X_i)$ . Аналогично определяются верхняя и нижняя суммы Дарбу:

$$S_{\{B_i\}}^*(f) = \sum_{i=1}^m V(B_i) \sup_{B_i} f; \quad *S_{\{B_i\}}(f) = \sum_{i=1}^m V(B_i) \inf_{B_i} f.$$

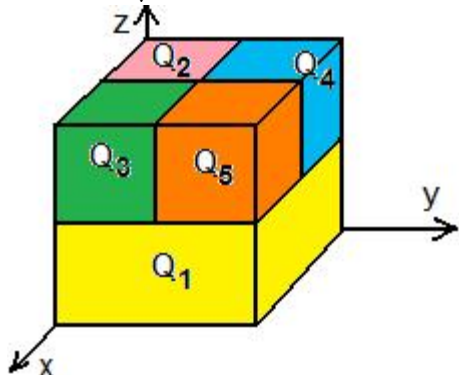
**Определение 1.4.** Пусть  $B \subset \mathbb{R}^n$  – измеримое множество. Говорят, что функция  $f : B \mapsto \mathbb{R}$  **интегрируема (по Риману)** на множестве  $B$ , если существует число  $I \in \mathbb{R}$ , такое, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \text{ если } \text{diam}\{B_i\} < \delta, \text{ то } \left| S_{\{B_i\}}^{\{X_i\}}(f) - I \right| < \varepsilon.$$

Это число  $I$  называется  **$n$ -кратным интегралом** от функции  $f$  по множеству  $B$  и обозначается

$$I = \int \cdots \int_B f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

**Пример 1.1.** Рассмотрим куб  $Q = [0; 1] \times [0; 1] \times [0; 1]$  и функцию  $f(x, y) = x + y + 2z$ . Возьмём разбиение  $\{Q_i\}_{i=1}^5$ , где  $Q_1$  – призма (внизу),  $Q_2, \dots, Q_5$  – кубы со стороной  $1/2$ .  $\text{diam}\{Q_i\} = \text{diam } Q_1 = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0,5^2} = 1,5$ .



Вычислим суммы Дарбу:

$$S_{\{Q_i\}}^* = 3 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 2 \left( 3,5 \cdot \frac{1}{8} \right) + 4 \cdot \frac{1}{8} = 3,25;$$

$$*S_{\{Q_i\}} = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \left( 1,5 \cdot \frac{1}{8} \right) + 2 \cdot \frac{1}{8} = 0,75;$$

точное значение интеграла

$$\iiint_Q x + y + 2z \, dx dy dz = 2.$$

**Определение 1.5.** Разбиение  $\{C_j\}_{j=1}^M$  множества  $B \subset \mathbb{R}^n$  называется **измельчением разбиения**  $\{B_i\}_{i=1}^m$ , если  $\forall j \in \{1, \dots, M\} \exists i \in \{1, \dots, m\} : C_j \subset B_i$ .

Следующие два утверждения доказываются так же, как в одномерном случае.

**Лемма 1.1.** Если разбиение  $\{C_j\}_{j=1}^M$  – измельчение разбиения  $\{B_i\}_{i=1}^m$ , то  $S_{\{C_j\}}^*(f) \leq S_{\{B_i\}}^*(f)$ ,  $*S_{\{C_j\}}(f) \geq *S_{\{B_i\}}(f)$ .

**Следствие 1.1.** Если  $\{B_i\}$  и  $\{C_k\}$  – два разбиения множества  $B \subset \mathbb{R}^n$ , то  $*S_{\{B_i\}}(f) \leq S_{\{C_k\}}^*(f)$ .

**Определение 1.6.** Пусть функция  $f$  ограничена на  $B \subset \mathbb{R}^n$ . **Верхним и нижним интегралами Дарбу**  $f$  по  $B$  называются величины

$$I_B^*(f) = \inf S_{\{B_i\}}^*(f), \quad I_B^*(f) = \sup *S_{\{B_i\}}(f),$$

где инфимум и супремум берутся по всем возможным разбиениям  $B$ .

Из следствия 1.1 получаем неравенство  $I_B^*(f) \geq I_B^*(f)$ .

**Теорема 1.1.** (Критерий Дарбу). Пусть функция  $f$  ограничена на измеримом множестве  $B \subset \mathbb{R}^n$ . Тогда  $f$  интегрируема по Риману на  $B$  в том и только том случае, если  $I_B^*(f) = I_B^*(f)$ , и в этом случае  $\int_B \dots \int_B f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = I_B^*(f) = I_B^*(f)$ .

### Свойства кратных интегралов

**0.** Константа интегрируема, и  $\int_B \dots \int_B c dx_1 \dots dx_n = cV(B)$ .

**1. Линейность.** Если  $f(x_1, \dots, x_n)$  и  $g(x_1, \dots, x_n)$  интегрируемы на множестве  $B \subset \mathbb{R}^n$ ;  $c, k \in \mathbb{R}$ , то функция  $cf + kg$  интегрируема, причём

$$\int_B \dots \int_B cf + kg dx_1 \dots dx_n = c \int_B \dots \int_B f dx_1 \dots dx_n + k \int_B \dots \int_B g dx_1 \dots dx_n.$$

*Доказательство.* Для любого разбиения  $\{B_i\}$  и любых выбранных точек  $X_i \in B_i$  справедливо соотношение  $S_{\{B_i\}}^{\{X_i\}}(cf + kg) = cS_{\{B_i\}}^{\{X_i\}}(f) + kS_{\{B_i\}}^{\{X_i\}}(g)$ .

Остаётся перейти к пределу при  $\text{diam}\{B_i\} \rightarrow 0$ . □

**2. Сужение.** Если  $f(x_1, \dots, x_n)$  интегрируема на множестве  $B \subset \mathbb{R}^n$ , и если  $C \subset B$  – измеримое множество, то  $f$  интегрируема на  $C$ .

*Доказательство.*  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  : если  $\text{diam}\{B_i\} < \delta$ , то  $S_{\{B_i\}}^*(f) - *S_{\{B_i\}}(f) < \varepsilon$ . Выберем разбиение  $\{B_i\}_{i=1}^m$  с диаметром  $< \delta$ , такое, что  $B_1 \cup \dots \cup B_k = C$ ,  $B_{k+1} \cup \dots \cup B_m = B \setminus C$ . Тогда  $S_{\{B_i\}_{i=1}^k}^*(f) - *S_{\{B_i\}_{i=1}^k}(f) < \varepsilon$ . В силу произвольности  $\varepsilon$  по критерию Дарбу  $f$  интегрируема на  $C$ . □

**3. Аддитивность.** Если  $f(x_1, \dots, x_n)$  интегрируема на измеримых множествах  $B, D \in \mathbb{R}^n$ , не имеющих общих внутренних точек, то она интегрируема и на множестве  $B \cup D$ , причём

$$\int_{B \cup D} \dots \int f \, dx_1 \dots dx_n = \int_B \dots \int f \, dx_1 \dots dx_n + \int_D \dots \int f \, dx_1 \dots dx_n.$$

*Доказательство.* Пусть  $\int_B \dots \int f \, dx_1 \dots dx_n = I, \int_D \dots \int f \, dx_1 \dots dx_n = J$ . Докажем для произвольного  $\varepsilon$ , что

$$I_{B \cup D}^*(f) < I + J + \varepsilon, \quad I_{B \cup D}_*(f) > I + J - \varepsilon$$

(и тогда по критерию Дарбу всё будет доказано). Для этого выберем разбиение  $\{B_i\}_{i=1}^m$  множества  $B$  и разбиение  $\{B_i\}_{i=m+1}^M$  множества  $D$ , такие, что

$$S_{\{B_i\}_{i=1}^m}^*(f) < I + \frac{\varepsilon}{2}, \quad *S_{\{B_i\}_{i=1}^m}(f) > I - \frac{\varepsilon}{2}, \quad S_{\{B_i\}_{i=m+1}^M}^*(f) < J + \frac{\varepsilon}{2}, \quad *S_{\{B_i\}_{i=m+1}^M}(f) > J - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Построим разбиение  $\{B_i\}_{i=1}^M$  множества  $B \cup D$ . Тогда получатся оценки

$$I_{B \cup D}^*(f) \leq S_{\{B_i\}_{i=1}^M}^*(f) < I + J + \varepsilon, \quad I_{B \cup D}_*(f) \geq *S_{\{B_i\}_{i=1}^M}(f) > I + J - \varepsilon. \quad \square$$

Из свойств аддитивности и сужения вытекает

**Следствие 1.2.** (лемма о „добавлении пустоты“). Пусть  $C \subset K$  – измеримые множества в  $\mathbb{R}^n$ , и пусть  $f : C \mapsto \mathbb{R}$ . Определим функцию

$$f_1(X) = \begin{cases} f(X) & \text{при } X \in C \\ 0 & \text{при } X \in K \setminus C. \end{cases}$$

Тогда интегрируемость  $f$  по  $C$  равносильна интегрируемости  $f_1$  по  $K$ , и если они интегрируемы, то их интегралы совпадают.

**4. Монотонность.** Пусть  $f$  и  $g$  интегрируемы на множестве  $B \subset \mathbb{R}^n$ ;  $g \geq f$  на  $B$ . Тогда

$$\int_B \dots \int g \, dx_1 \dots dx_n \geq \int_B \dots \int f \, dx_1 \dots dx_n. \quad (17)$$

Это следует из того, что для любого разбиения и любых выбранных точек выполнено неравенство  $S_{\{B_i\}}^{\{X_i\}}(g) \geq S_{\{B_i\}}^{\{X_i\}}(f)$ .

**5. Оценка модуля.** Если  $f$  интегрируема на множестве  $B \subset \mathbb{R}^n$ , то  $|f|$  также интегрируема, причём  $\left| \int_B \dots \int f \, dx_1 \dots dx_n \right| \leq \int_B \dots \int |f| \, dx_1 \dots dx_n$ .

*Доказательство.* Интегрируемость  $|f|$  доказывается по критерию Дарбу, поскольку из неравенства  $||y| - |z|| \leq |y - z|$  вытекает  $S_{\{B_i\}}^*(|f|) - *S_{\{B_i\}}(|f|) \leq S_{\{B_i\}}^*(f) - *S_{\{B_i\}}(f)$ . По свойству монотонности из неравенств  $|f| \geq f \geq -|f|$  получаем

$$\int_B \dots \int |f| \, dx_1 \dots dx_n \geq \int_B \dots \int f \, dx_1 \dots dx_n \geq - \int_B \dots \int |f| \, dx_1 \dots dx_n. \quad \square$$



**6. Теорема о среднем.** Если  $f(x_1, \dots, x_n)$  интегрируема на  $B \subset \mathbb{R}^n$ , то существует число  $\mu \in [\inf_B f; \sup_B f]$ , называемое *средним значением*  $f$  на множестве  $B$ , такое, что

$$\int_B \dots \int_B f \, dx_1 \dots dx_n = \mu \cdot V(B).$$

Если при этом  $f$  непрерывна и  $B$  связно, то найдётся точка  $X \in B : \mu = f(X)$ .

*Доказательство.* Применим свойство (17) к неравенствам  $\inf_B f \leq f \leq \sup_B f$ . Результат разделим на объём множества  $B$ . На связном же множестве непрерывная функция принимает все промежуточные значения.  $\square$

**Теорема 1.2.** А) Если функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  интегрируема на множестве  $B \subset \mathbb{R}^n$ , то она ограничена на нём.

Б) Если функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  ограничена и непрерывна на  $B$ , то она интегрируема на нём.

*Доказательство.* А) Предположим, что функция  $f$  интегрируема на  $B$ , но не ограничена на нём. Для  $\varepsilon = 1$  найдём такое  $\delta > 0$ , что интегральные суммы по разбиениям с  $\text{diam} < \delta$  отличаются от интеграла менее, чем на 1. Возьмём одно такое разбиение  $\{B_i\}$ . Функция  $f$  неограничена хотя бы на одном  $B_k$ . Если зафиксировать точки  $X_i \in B_i$  при всех  $i \neq k$ , а точку  $X_k \in B_k$  варьировать, то мы получим неограниченное множество значений интегральных сумм – противоречие.

Б) Пусть сначала  $B$  – компакт. Поскольку функция  $f$  непрерывна на  $B$ , она равномерно непрерывна на нём, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \text{если } X, Y \in B, |\vec{X}\vec{Y}| < \delta, \text{ то } |f(X) - f(Y)| < \varepsilon.$$

Взяв для множества  $B$  разбиение  $\{B_i\}$  с диаметром меньше  $\delta$ , получим  $I_B^*(f) - I_B^*(f) \leq S_{\{B_i\}}^*(f) - *S_{\{B_i\}}(f) < \varepsilon V(B)$ . По критерию Дарбу  $f$  интегрируема на  $B$ .

Теперь рассмотрим произвольное измеримое  $B$ . Существует кирпичный компакт  $K \subset B$ , такой, что  $V(B \setminus K) < \frac{\varepsilon}{3 \sup_B |f|}$ . Построим разбиение  $\{B_i\}_{i=1}^k$  компакта  $K$ , такое, что

$$S_{\{B_i\}_{i=1}^k}^*(f) - *S_{\{B_i\}_{i=1}^k}(f) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Дополним его до разбиения  $\{B_i\}_{i=1}^m$  множества  $B$ . Тогда

$$\begin{aligned} I_B^*(f) - I_B^*(f) &\leq S_{\{B_i\}_{i=1}^m}^*(f) - *S_{\{B_i\}_{i=1}^m}(f) \leq \\ &\leq S_{\{B_i\}_{i=1}^k}^*(f) + \frac{\varepsilon}{3 \sup_B |f|} \sup_B |f| - \left( *S_{\{B_i\}_{i=1}^k}(f) - \frac{\varepsilon}{3 \sup_B |f|} \sup_B |f| \right) < \varepsilon. \end{aligned}$$

В силу произвольности  $\varepsilon$ , критерий Дарбу даёт нужный результат.  $\square$

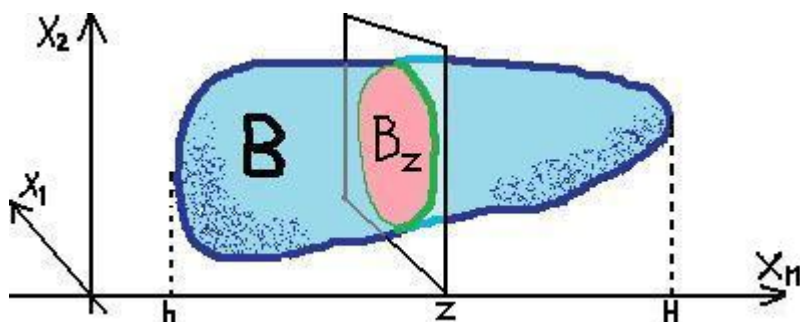
## 2 Способы вычисления кратных интегралов

**Теорема 2.1.** (о сведении кратного интеграла к повторному). Пусть  $f$  – ограниченная непрерывная функция на измеримом множестве  $B \subset \mathbb{R}^n$ . Пусть

$$B_z = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : (x_1, \dots, x_{n-1}, z) \in B\},$$

т.е.  $B_z$  – сечение  $B$   $(n-1)$ -мерной плоскостью  $\{x_n = z\}$ . Обозначим  $h = \inf_B x_n$ ,  $H = \sup_B x_n$ , и предположим, что при всех  $z \in [h; H]$  множества  $B_z$  измеримы. Тогда верна формула:

$$\underbrace{\int_B \dots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n}_J = \int_h^H \underbrace{\int_{B_z} \dots \int f(x_1, \dots, x_{n-1}, z) dx_1 \dots dx_{n-1}}_{I(z)} dz. \quad (18)$$



*Доказательство.* Непрерывность  $f$  как таковая нам не нужна. Нам важно только то, что  $f$  интегрируема по  $B$  и по каждому  $B_z$ . Нужно доказать, что функция  $I(z)$  интегрируема по отрезку  $[h; H]$  и её интеграл совпадает с  $J$ .

Сначала предположим, что  $B = [-R; R]^n$  –  $n$ -мерный куб. Тогда  $B_z = [-R; R]^{n-1}$  – одинаковые  $(n-1)$ -мерные кубы. Возьмём  $\varepsilon > 0$  и найдём такую  $\delta > 0$ , что для разбиений  $B$  с диаметром  $< \delta$  интегральные суммы заключены между  $J - \varepsilon$  и  $J + \varepsilon$ . Пусть  $N \in \mathbb{N}$  таково, что  $2R\sqrt{n}/N < \delta$ . Именно таким будет диаметр разбиения  $B$  на  $N^n$  равных кубиков

$$B_{i_1 \dots i_n} = [a_{i_1-1}; a_{i_1}] \times \dots \times [a_{i_n-1}; a_{i_n}], \quad \text{где } a_i = -R + \frac{2Ri}{N}, \quad 0 \leq i \leq N.$$

Оценим суммы Дарбу функции  $I(z)$  по разбиению  $[-R; R]$  точками  $a_0, a_1, \dots, a_N$ :

$$S_{\{a_i\}}^*(I(z)) = \sum_{i=1}^N \frac{2R}{N} \sup_{a_{i-1} \leq z \leq a_i} \underbrace{\int_{B_z} \dots \int f(x_1, \dots, x_{n-1}, z) dx_1 \dots dx_{n-1}}_{I(z)} \leq$$

[оценим  $I(z)$  через верхнюю сумму Дарбу по разбиению  $B_z$ ]

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{i=1}^N \frac{2R}{N} \sup_{a_{i-1} \leq z \leq a_i} \left( \sum_{i_1=1}^N \cdots \sum_{i_{n-1}=1}^N \left( \frac{2R}{N} \right)^{n-1} \sup_{B_{i_1, \dots, i_n} \cap \{x_n=z\}} f \right) \leq \\ &\leq \sum_{i_1=1}^N \cdots \sum_{i_n=1}^N \left( \frac{2R}{N} \right)^n \sup_{B_{i_1, \dots, i_n}} f = S_{\{B_{i_1, \dots, i_n}\}}^*(f) \leq J + \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно,  ${}_{-R}^R I^*(I(z)) \leq J + \varepsilon$ . Аналогично доказывается, что  ${}_{-R}^R I_*(I(z)) \geq J - \varepsilon$ . Поскольку  $\varepsilon$  произвольно мал, мы получаем  ${}_{-R}^R I^*(I(z)) = {}_{-R}^R I_*(I(z)) = J$ , что и требовалось доказать.

Теперь рассмотрим произвольное измеримое множество  $B$ . Оно ограничено  $\implies$  содержится в некотором кубе  $K = [-R; R]^n$ . Воспользуемся следствием 1.2, положив  $f_1 = f$  на  $B$ ,  $f_1 = 0$  на  $K \setminus B$ :

$$\begin{aligned} &\int_B \cdots \int f \, dx_1 \dots dx_n = \int_K \cdots \int f_1 \, dx_1 \dots dx_n = \\ &= \int_{-R}^R dz \int_{K_z} \cdots \int f_1(\dots, z) dx_1 \dots dx_{n-1} = \int_h^H dz \int_{B_z} \cdots \int f(\dots, z) dx_1 \dots dx_{n-1}, \end{aligned}$$

поскольку при  $z < h$  и  $z > H$  сечение  $B_z = \emptyset$ .  $\square$

Посмотрим, что даст нам эта теорема в двумерном случае. Пусть

$$D = \{(x, y) : h \leq x \leq H, u(x) \leq y \leq v(x)\}, \quad (19)$$

где функции  $u$  и  $v$  непрерывны на  $[h; H]$  и  $u(x) \leq v(x)$ . Тогда  $D_x = [u(x); v(x)]$ , и формула (18) примет вид

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_h^H dx \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) dy.$$

В трёхмерном случае теорему придётся применить дважды. Пусть

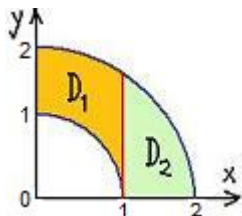
$$B = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}, \quad (20)$$

где фигура  $D$  имеет вид (19), функции  $\varphi$  и  $\psi$  непрерывны на  $D$  и  $\varphi \leq \psi$ . Тогда сечение  $B_x = \{(y, z) : u(x) \leq y \leq v(x), \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$ . Получаем:

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \int_h^H dx \iint_{B_x} f(x, y, z) dy dz = \int_h^H dx \int_{u(x)}^{v(x)} dy \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Если двумерное множество имеет более сложный вид, чем (19), или трёхмерное тело сложнее, чем (20), то его нужно разбить на несколько частей вида (19) (соотв. (20)) и воспользоваться аддитивностью кратного интеграла.

**Пример 2.1.** Пусть  $f(x, y) = x^2 y^2$ ,  $D = \{1 < x^2 + y^2 < 4, x > 0, y > 0\}$  – четверть плоского кольца. Чтобы свести двойной интеграл к повторному, нужно разбить  $D$  на две части:  $D_1 = \left\{ \begin{array}{l} 0 < x < 1 \\ \sqrt{1-x^2} < y < \sqrt{4-x^2} \end{array} \right\}$ ,  $D_2 = \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq x < 2 \\ 0 < y < \sqrt{4-x^2} \end{array} \right\}$ .



Вычислять интеграл пришлось бы так:

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 y^2 dx dy &= \int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} x^2 y^2 dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} x^2 y^2 dy = \\ &= \int_0^1 \left( \frac{x^2 y^3}{3} \Big|_{y=\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{4-x^2}} \right) dx + \int_1^2 \left( \frac{x^2 y^3}{3} \Big|_{y=0}^{y=\sqrt{4-x^2}} \right) dx = \\ &= \int_0^1 \frac{x^2}{3} ((4-x^2)^{3/2} - (1-x^2)^{3/2}) dx + \int_1^2 \frac{x^2}{3} (4-x^2)^{3/2} dx = \dots \end{aligned}$$

Но мы его вычислим другим способом чуть позже.

### Замена переменных в кратных интегралах

**Теорема 2.2.** (без доказательства). Пусть измеримое  $U \subset \mathbb{R}^n$  – область (т.е. связное открытое). Пусть отображение  $Y = (y_1, \dots, y_n) : U \mapsto \mathbb{R}^n$  инъективно и дифференцируемо, причём все частные производные  $\partial y_i / \partial u_j$  ограничены и непрерывны на  $U$ . Тогда множество  $W = Y(U)$  (образ  $U$  под действием  $Y$ ) измеримо, и для любой функции  $f$ , ограниченной и непрерывной на  $W$ , верна **формула замены переменных**:

$$\begin{aligned} \int \dots \int_W f(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n &= \\ &= \int \dots \int_U f(y_1(u_1, \dots, u_n), \dots, y_n(u_1, \dots, u_n)) \left| \det J_Y(u_1, \dots, u_n) \right| du_1 \dots du_n, \end{aligned} \quad (21)$$

где  $J_Y$  – матрица Якоби отображения  $Y$ :

$$J_Y(u_1, \dots, u_n) = \begin{bmatrix} \partial y_1 / \partial u_1 & \dots & \partial y_1 / \partial u_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial y_n / \partial u_1 & \dots & \partial y_n / \partial u_n \end{bmatrix}.$$

**Следствие 2.1.** Пусть выполнены условия теоремы 2.2. Подставив функцию  $f \equiv 1$ , мы получим, что  $n$ -мерный объём множества  $W = Y(U)$  равен

$$V(W) = \int \dots \int_U \left| \det J_Y(u_1, \dots, u_n) \right| du_1 \dots du_n.$$

Эта формула проясняет геометрический смысл **якобиана** (определителя матрицы Якоби): *коэффициент увеличения объёма* при отображении  $Y$ .

В двумерном случае самая часто употребляемая замена переменных – **полярные координаты** (обозначим  $y_1 = x$ ,  $y_2 = y$ ;  $u_1 = \rho$ ,  $u_2 = \varphi$ ):

$$Y(\rho, \varphi) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \end{bmatrix}; \quad Y : \left\{ (\rho, \varphi) : \begin{array}{l} \rho > 0 \\ -\pi < \varphi \leq \pi \end{array} \right\} \mapsto \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}.$$

Вычислим якобиан:

$$\det J_Y(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} \partial x / \partial \rho & \partial x / \partial \varphi \\ \partial y / \partial \rho & \partial y / \partial \varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

**Пример 2.1** (продолжение). Прообраз области  $D$  есть прямоугольник  $U = \{(\rho, \varphi) : 1 < \rho < 2, 0 < \varphi < \pi/2\}$ . Функция  $f(x(\rho, \varphi), y(\rho, \varphi))$  примет вид  $(\rho \cos \varphi)^2 (\rho \sin \varphi)^2 = \frac{\rho^4 \sin^2 2\varphi}{4}$ . По формуле (21) получаем

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 y^2 dx dy &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_1^2 \rho^4 \frac{\sin^2 2\varphi}{4} \rho d\rho = \int_0^{\pi/2} \left( \frac{\sin^2 2\varphi}{4} \frac{\rho^6}{6} \Big|_{\rho=1}^{\rho=2} \right) d\varphi = \\ &= \frac{21}{8} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2\varphi d\varphi = \frac{21}{16} \int_0^{\pi/2} 1 - \cos 4\varphi d\varphi = \frac{21\pi}{32}. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим замены переменных в трёхмерном случае.

**Цилиндрические координаты.**  $u_1 = \rho$  – расстояние от оси  $Oz$ ,  $u_2 = \varphi$  – азимут,  $u_3 = h$  – высота.

$$Y(\rho, \varphi, h) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ h \end{bmatrix}; \quad Y : \left\{ \begin{array}{l} \rho > 0 \\ -\pi < \varphi \leq \pi \\ h \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \mapsto \mathbb{R}^3 \setminus Oz;$$

якобиан равен

$$\det J_Y(\rho, \varphi, h) = \begin{vmatrix} \partial x / \partial \rho & \partial x / \partial \varphi & \partial x / \partial h \\ \partial y / \partial \rho & \partial y / \partial \varphi & \partial y / \partial h \\ \partial z / \partial \rho & \partial z / \partial \varphi & \partial z / \partial h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

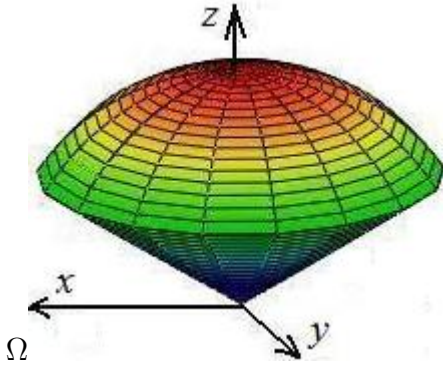
**Сферические координаты.**  $u_1 = r$  – расстояние от начала координат,  $u_2 = \varphi$  – долгота,  $u_3 = \psi$  – широта.

$$Y(r, \varphi, \psi) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \psi \cos \varphi \\ r \cos \psi \sin \varphi \\ r \sin \psi \end{bmatrix}; \quad Y : \left\{ \begin{array}{l} r > 0 \\ -\pi < \varphi \leq \pi \\ |\psi| < \pi/2 \end{array} \right\} \mapsto \mathbb{R}^3 \setminus Oz;$$

якобиан равен

$$\det J_Y(r, \varphi, \psi) = \begin{vmatrix} \cos \psi \cos \varphi & -r \cos \psi \sin \varphi & -r \sin \psi \cos \varphi \\ \cos \psi \sin \varphi & r \cos \psi \cos \varphi & -r \sin \psi \sin \varphi \\ \sin \psi & 0 & r \cos \psi \end{vmatrix} = r^2 \cos \psi.$$

**Пример 2.2.** Проинтегрируем функцию  $f(x, y, z) = x^2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  по шаровому сектору  $\Omega = \left\{ x^2 + y^2 + z^2 < 1, z > \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}} \right\} = \left\{ r < 1, \sin \psi > \frac{\cos \psi}{\sqrt{3}} \right\}$  (интервал  $0 < z < 1$  оси  $Oz$  придётся изъять, ведь там нарушается инъективность  $Y$  – нельзя однозначно определить долготу, но это неважно: его объём равен 0).



$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} x^2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx dy dz &= \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{\pi/6}^{\pi/2} d\psi \int_0^1 r^3 \cos^2 \varphi \cos^2 \psi r^2 \cos \psi \, dr = \\
 &= \frac{1}{6} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos^2 \varphi \cos^3 \psi \, d\psi = \frac{1}{6} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \varphi \cdot \frac{5}{24} d\varphi = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{5}{24}.
 \end{aligned}$$

### 3 Приложения двойных и тройных интегралов

#### ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Двойной интеграл от 1 по плоской фигуре даст площадь фигуры. Если свести двойной интеграл к повторному, то получатся формулы площадей в декартовых и полярных координатах, изученные в прошлом семестре.

Двойные интегралы применяются также для вычисления площадей поверхностей, об этом речь пойдёт на лекции 5.

Объём трёхмерного тела вычисляется через тройной интеграл от 1, и здесь уже наши возможности расширятся.

1. Пусть тело задано в декартовых координатах:

$$B = \{(x; y; z) : (x; y) \in D, g(x, y) \leq z \leq h(x, y)\},$$

где  $D \subset \mathbb{R}^2$  – квадратуемый компакт (проекция  $B$ ); функции  $g$  и  $h$  непрерывны на  $D$ ,  $h \geq g$  на  $D$ . Тогда тело  $B$  кубируемо, и его объём равен

$$V(B) = \iint_D (h(x, y) - g(x, y)) dx dy.$$

2. Пусть тело задано в цилиндрических координатах:

$$C = \{\alpha \leq \varphi \leq \beta; r(\varphi) \leq \rho \leq R(\varphi); u(\rho, \varphi) \leq h \leq v(\rho, \varphi)\},$$

где  $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$ ;  $0 \leq r \leq R$ , функции  $r$  и  $R$  непрерывны на  $[\alpha; \beta]$ ; функции  $u \leq v$  непрерывны на  $\{\alpha \leq \varphi \leq \beta; r(\varphi) \leq \rho \leq R(\varphi)\}$ . Тогда тело  $C$  кубируемо, и его объём равен

$$V(C) = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r(\varphi)}^{R(\varphi)} (v(\rho, \varphi) - u(\rho, \varphi)) \rho d\rho.$$

3. Пусть тело задано в сферических координатах:

$$\Omega = \{\alpha \leq \varphi \leq \beta; s(\varphi) \leq \psi \leq n(\varphi); r \leq R(\varphi, \psi)\},$$

где  $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$ ;  $-\pi/2 \leq s \leq n \leq \pi/2$ , функции  $s$  и  $n$  непрерывны на  $[\alpha; \beta]$ ; функция  $R \geq 0$  непрерывна на  $\{\alpha \leq \varphi \leq \beta; s(\varphi) \leq \psi \leq n(\varphi)\}$ . Тогда тело  $\Omega$  кубируемо, и его объём равен

$$V(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{s(\varphi)}^{n(\varphi)} d\psi \int_0^{R(\varphi, \psi)} \rho^2 \cos \psi d\rho = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{s(\varphi)}^{n(\varphi)} \frac{R^3(\varphi, \psi)}{3} \cos \psi d\psi.$$

## ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Кратный интеграл позволяет вычислить полное значение аддитивной скалярной физической величины<sup>7</sup>, если известна плотность её распределения (поверхностная или объёмная), и эта плотность зависит более чем от одной координаты.

Если  $\Pi$  – плоская пластина, и величина  $M$  имеет поверхностную плотность распределения  $\sigma(x, y)$ , то полное значение  $M$  и среднее значение  $\sigma$  вычисляются так:

$$M(\Pi) = \iint_{\Pi} \sigma(x, y) dx dy; \quad \bar{\sigma} = \frac{M(\Pi)}{S(\Pi)}. \quad (22)$$

Если  $B$  – трёхмерное тело, и величина  $M$  имеет пространственную плотность распределения  $\gamma(x, y, z)$ , то полное значение  $M$  и среднее значение  $\gamma$  вычисляются так:

$$M(B) = \iiint_B \gamma(x, y, z) dx; \quad \bar{\gamma} = \frac{M(B)}{V(B)}. \quad (23)$$

**Пример 3.1.** Найти среднюю плотность  $\bar{\gamma}$  шара, если плотность линейно изменяется от центра к поверхности от величины  $\gamma_o$  до  $\gamma_1$ .

Пусть  $R$  – радиус шара,  $O(0; 0; 0)$  – его центр. Тогда

$$M = \iiint_{\{x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}} \left( \gamma_o + \frac{\gamma_1 - \gamma_o}{R} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) dx dy dz.$$

Перейдём к сферическим координатам:

$$\begin{aligned} M &= \int_0^R dr \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \gamma_o + \frac{\gamma_1 - \gamma_o}{R} r \right) r^2 \cos \psi d\psi = \\ &= \int_0^R dr \int_{-\pi}^{\pi} \left( \gamma_o r^2 + \frac{\gamma_1 - \gamma_o}{R} r^3 \right) 2d\varphi = \int_0^R 4\pi \left( \gamma_o r^2 + \frac{\gamma_1 - \gamma_o}{R} r^3 \right) dr = \\ &= 4\pi \left( \frac{\gamma_o}{3} r^3 + \frac{\gamma_1 - \gamma_o}{4R} r^4 \right) \Big|_{r=0}^{r=R} = \frac{4\pi}{3} \left( \gamma_o + \frac{3}{4}(\gamma_1 - \gamma_o) \right) R^3 = V \frac{\gamma_o + 3\gamma_1}{4}. \end{aligned}$$

Ответ:  $\bar{\gamma} = \frac{\gamma_o + 3\gamma_1}{4}$ .

---

<sup>7</sup>Таковыми величинами являются: масса; заряд; энергия (потенциальная, кинетическая, тепловая); статический момент; момент инерции; одна из компонент силы, действующей на тело (давление, притяжение) или вызываемой этим телом; момент такой силы.



## Моменты и центр масс

Если известна плотность распределения массы  $\rho$  (поверхностная или объёмная), то статические моменты и моменты инерции имеют соответствующие плотности распределения:

$$\begin{array}{ll} \text{для } M_x \text{ плотность } x\rho & \text{для } J_{Ox} \text{ плотность } (y^2 + z^2)\rho \\ \text{для } M_y \text{ плотность } y\rho & \text{для } J_{Oy} \text{ плотность } (x^2 + z^2)\rho \\ \text{для } M_z \text{ плотность } z\rho & \text{для } J_{Oz} \text{ плотность } (x^2 + y^2)\rho \end{array}$$

Моменты вычисляются через интегралы по формулам (22) или (23). Центр масс имеет координаты  $x_c = M_x/M$ ,  $y_c = M_y/M$ ,  $z_c = M_z/M$ .

**Пример 3.2.** Найти центр масс квадратной пластины  $[0; 1] \times [0; 1]$  с плотностью  $\sigma(x, y) = e^{x+y}$ . Масса пластины равна

$$M = \int_0^1 dx \int_0^1 e^{x+y} dy = \int_0^1 (e^{x+1} - e^x) dx = (e - 1)^2.$$

Статический момент по  $x$ :

$$\begin{aligned} M_x &= \int_0^1 dx \int_0^1 x e^{x+y} dy = \int_0^1 x(e^{x+1} - e^x) dx = (e - 1) \int_0^1 x de^x = \\ &= (e - 1)(xe^x - e^x) \Big|_0^1 = e - 1. \end{aligned}$$

Следовательно,  $x_c = \frac{M_x}{M} = \frac{1}{e - 1}$ . Для  $y_c$  получится то же самое.

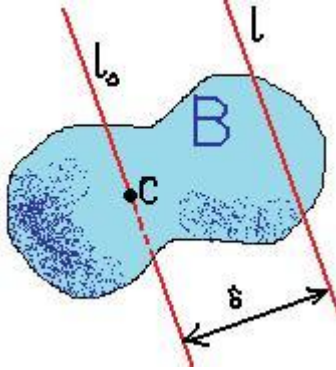
**Пример 3.3.** Найти момент инерции шара из примера 3.1 относительно оси  $Oz$ . Плотность распределения момента инерции равна  $\gamma(x, y, z) (x^2 + y^2)$ , следовательно, он вычисляется через интеграл

$$J_{Oz} = \iiint_{\{x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}} \left( \gamma_0 + \frac{\gamma_1 - \gamma_0}{R} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) (x^2 + y^2) dx dy dz.$$

Перейдём к сферическим координатам:

$$\begin{aligned}
J_{Oz} &= \int_0^R dr \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \gamma_o + \frac{\gamma_1 - \gamma_o}{R} r \right) \underbrace{r^2 \cos^2 \psi}_{x^2+y^2} r^2 \cos \psi d\psi = \\
&= \int_0^R dr \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \left( \gamma_o r^4 + \frac{\gamma_1 - \gamma_o}{R} r^5 \right) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2 \psi) d\sin \psi = \\
&= \int_0^R dr \int_{-\pi}^{\pi} \left( \gamma_o r^4 + \frac{\gamma_1 - \gamma_o}{R} r^5 \right) \left( s - \frac{s^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 d\varphi = \\
&= \int_0^R dr \int_{-\pi}^{\pi} \left( \gamma_o r^4 + \frac{\gamma_1 - \gamma_o}{R} r^5 \right) \frac{4}{3} d\varphi = \int_0^R \frac{8\pi}{3} \left( \gamma_o r^4 + \frac{\gamma_1 - \gamma_o}{R} r^5 \right) dr = \\
&= \frac{8\pi}{3} \left( \frac{\gamma_o}{5} r^5 + \frac{\gamma_1 - \gamma_o}{6R} r^6 \right) \Big|_{r=0}^{r=R} = \frac{4\pi}{3} \left( \frac{\gamma_o}{15} + \frac{\gamma_1}{3} \right) R^5.
\end{aligned}$$

Докажем одну известную теорему из механики.



**Теорема Штейнера.** Пусть  $\ell$  и  $\ell_o$  – две параллельные прямые в  $\mathbb{R}^3$ , расстояние между ними равно  $\delta$ , и центр масс тела  $B$  лежит на  $\ell_o$ . Тогда для тела  $B$  верна формула  $J_\ell = J_{\ell_o} + M(B) \delta^2$ .

*Доказательство.* Поместим начало координат в центр масс  $B$ , пусть  $Oz = \ell_o$ , и пусть прямая  $\ell$  проходит через точку  $(\delta; 0; 0)$ . Тогда

$$\begin{aligned}
J_\ell &= \iiint_B \gamma(x, y, z) ((x - \delta)^2 + y^2) dx dy dz = \\
&= \underbrace{\iiint_B \gamma(x^2 + y^2) dx dy dz}_{J_{\ell_o}} - 2\delta \underbrace{\iiint_B \gamma x dx dy dz}_{=0} + \delta^2 \underbrace{\iiint_B \gamma dx dy dz}_{M(B)}. \quad \square
\end{aligned}$$

## 4 Криволинейные интегралы

**Определение 4.1.** Кривая в пространстве  $\mathbb{R}^3$  – множество вида

$$\ell = \{X(t) = (x(t); y(t); z(t)) : t \in [\alpha; \beta]\}, \quad (24)$$

где  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  – непрерывные функции на  $[\alpha; \beta]$ .

Кривая называется **гладкой**, если существуют непрерывные  $\dot{x} = x'(t)$ ,  $\dot{y} = y'(t)$ ,  $\dot{z} = z'(t)$ , не обращающиеся в 0 одновременно (при  $t = \alpha$  имеются в виду правые производные, при  $t = \beta$  – левые).

Кривая называется **кусочно-гладкой**, если существуют такие  $t_j$  :  $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_N = \beta$ , что составляющие её кривые  $\{X(t) : t \in [t_{j-1}; t_j]\}$  гладкие.

**Определение 4.2.** Длина кривой  $L(\ell) = \sup$  длин вписанных в неё ломаных  $X_0 X_1 \dots X_n$ ,  $X_i = X(t_i)$ , т.е.

$$L(\ell) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^n |\overrightarrow{X_{i-1} X_i}| : \alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Как известно, длина кусочно-гладкой кривой (24) равна

$$L(\ell) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt.$$

Будем называть **разбиением** кривой (24) набор точек

$$\{P_i = (x(t_i), y(t_i), z(t_i)) : \alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_m = \beta\};$$

обозначим кусочки кривой  $\ell_i = \{(x(t), y(t), z(t)) : t \in [t_{i-1}; t_i]\}$ . Диаметр разбиения равен  $\text{diam}\{P_i\} = \max_{i=1}^m L(\ell_i)$ .

**Определение 4.3.** Функция  $f(x, y, z)$  интегрируема по кривой  $\ell$  вида (24), если  $\ell \subset D(f)$  и существует число  $J \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \text{если } \text{diam}\{P_i\} < \delta, \text{ то при любом выборе точек } X_i \in \ell_i \text{ имеем}$

$$S_{\{P_i\}}^{\{X_i\}}(f) = \sum_{i=1}^m L(\ell_i) f(X_i) \in (J - \varepsilon; J + \varepsilon).$$

Такое число  $J$  называется **криволинейным интегралом I рода** функции  $f$  по кривой  $\ell$  и обозначается

$$J = \int_{\ell} f(x, y, z) ds.$$

Здесь  $ds$  – единый символ. Однако,  $s$  имеет и самостоятельный смысл. Параметр  $s$ , заданный на кривой  $\ell = \{X(s) = (x(s); y(s); z(s)) : s \in [\alpha; \beta]\}$ , называется **натуральным**, если  $\forall t_1, t_2 \in [\alpha; \beta], t_1 < t_2$ , выполнено равенство

$$L\{X(s) : t_1 \leq s \leq t_2\} = t_2 - t_1.$$

**Теорема 4.1.** Пусть  $\ell$  – кусочно-гладкая кривая вида (24),  $\ell \subset D(f) \subset \mathbb{R}^3$ ;  $f(x, y, z)$  непрерывная скалярная функция. Тогда  $f$  интегрируема по  $\ell$ , и её криволинейный интеграл I рода равен

$$\int_{\ell} f(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt. \quad (25)$$

*Доказательство.* Интеграл в правой части (25) существует, поскольку функция кусочно непрерывна. Сделаем в интеграле замену переменной, введя натуральный параметр  $s = L(\{X(\tau) : \alpha \leq \tau \leq t\}) = \int_{\alpha}^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} du$ . Тогда интеграл примет вид

$$\int_0^{L(\ell)} f(x(s(t)), y(s(t)), z(s(t))) ds. \quad (26)$$

Для (26) все интегральные суммы и диаметры разбиений будут такими же, как для левой части (25).  $\square$

### Свойства криволинейного интеграла I рода

1. Линейность:

$$\int_{\ell} (cf + kg) ds = c \int_{\ell} f ds + k \int_{\ell} g ds.$$

2. Аддитивность: если конец кривой  $\ell_1$  совпадает с началом  $\ell_2$ , то

$$\int_{\ell_1 \cup \ell_2} f ds = \int_{\ell_1} f ds + \int_{\ell_2} f ds.$$

3. Оценка:  $L(\ell) \inf_{\ell} f \leq \int_{\ell} f ds \leq L(\ell) \sup_{\ell} f$ .

4. Независимость от ориентации кривой: если

$\ell = \{X(t) : t \in [\alpha; \beta]\} = \{Y(t) : t \in [a; b]\}$ , причём  $X(\alpha) = Y(b)$ ,  $X(\beta) = Y(a)$ , то значения интеграла получатся одинаковыми.

**Пример 4.1.** Проинтегрируем функцию  $f(x, y) = x$  по четверти окружности  $\ell = \{x^2 + y^2 = 1; x \geq 0; y \geq 0\}$ , параметризовав кривую двумя разными способами.

1)  $\ell = \{x = t, y = \sqrt{1-t^2}, z = 0; 0 \leq t \leq 1\}$ . Получаем:

$$\int_{\ell} x ds = \int_0^1 t \sqrt{1^2 + \left(\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\right)^2} dt = \int_0^1 t \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\sqrt{1-t^2} \Big|_0^1 = 1.$$

2)  $\ell = \{x = \cos s, y = \sin s, z = 0; 0 \leq s \leq \pi/2\}$ . Параметр  $s$  – натуральный. Тогда

$$\int_{\ell} x ds = \int_0^{\pi/2} \cos s ds = -\sin s \Big|_0^{\pi/2} = 1.$$

Очевидно, если  $s$  и  $u$  – два натуральных параметра на  $\ell$ , то либо  $u = s + \text{const}$ , либо  $u = \text{const} - s$ . В первом случае говорят, что  $s$  и  $u$  задают одинаковую **ориентацию**, во втором случае – противоположные ориентации. Если на кусочно-гладкой кривой задана ориентация, то в каждой её точке (кроме нескольких точек излома) задан единичный касательный вектор  $\vec{\tau}(X(s)) = \frac{d}{ds}X(s)$ . При смене ориентации кривой все вектора  $\vec{\tau}(X)$  умножаются на  $(-1)$ . Если на кривой задан параметр  $t$ , возрастающий в том же направлении, что и  $s$ , то вектор  $\vec{\tau}$  равен

$$\vec{\tau}(X(t)) = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}. \quad (27)$$

**Определение 4.4.** Пусть  $\ell \subset \mathbb{R}^3$  – кусочно-гладкая кривая, на которой выбрана ориентация, задаваемая натуральным параметром  $s$ . Пусть  $\vec{V}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$  – векторное поле,  $\ell \subset D(\vec{V})$ . Тогда **криволинейным интегралом II рода** векторного поля  $\vec{V}$  по кривой  $\ell$  называется интеграл

$$\int_{\ell} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int_{\ell} (\vec{V}(X), \vec{\tau}(X))ds.$$

Физический смысл криволинейного интеграла II рода – это работа силы  $\vec{V}$ , действующей на точку, движущуюся по кривой  $\ell$  в направлении возрастания  $s$ .

Выведем формулу для вычисления криволинейного интеграла II рода от непрерывного векторного поля по кусочно-гладкой кривой с произвольным параметром  $t$ , таким, что  $dt/ds > 0$ . Для этого в формулу (25) подставим выражение (27) для вектора  $\vec{\tau}$ :

$$\int_{\ell} (\vec{V}, \vec{\tau})ds = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{(\dot{x}; \dot{y}; \dot{z})}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} P\dot{x} + Q\dot{y} + R\dot{z} dt.$$

Эта формула мотивирует традиционное обозначение криволинейного интеграла II рода.

## Свойства криволинейного интеграла II рода

1. **Линейность:** 
$$\int_{\ell} (c\vec{V} + k\vec{W}, \vec{\tau}) ds = c \int_{\ell} (\vec{V}, \vec{\tau}) ds + k \int_{\ell} (\vec{W}, \vec{\tau}) ds.$$

2. **Аддитивность:** если конец кривой  $\ell_1$  совпадает с началом  $\ell_2$  и ориентация кривых  $\ell_1$  и  $\ell_2$  совпадает с ориентацией кривой  $\ell = \ell_1 \cup \ell_2$ , то

$$\int_{\ell} (\vec{V}, \vec{\tau}) ds = \int_{\ell_1} (\vec{V}, \vec{\tau}) ds + \int_{\ell_2} (\vec{V}, \vec{\tau}) ds.$$

3. **Оценка:** 
$$\left| \int_{\ell} (\vec{V}, \vec{\tau}) ds \right| \leq L(\ell) \sup_{\ell} |\vec{V}|.$$

4. Если поменять ориентацию кривой, то криволинейный интеграл II рода меняет знак.

**Пример 4.2.** Проинтегрируем векторное поле  $\vec{V}(x, y) = y\vec{i} + 2x\vec{j}$  по кривой  $\ell = \{x^2 + y^2 = 1; x \geq 0; y \geq 0\}$ , опять двумя способами.

1)  $\ell = \{x = t, y = \sqrt{1-t^2}, z = 0; 0 \leq t \leq 1\}$ . Соответственно,  $dx = dt, dy = -tdt/\sqrt{1-t^2}$ . Получаем:

$$\int_{\ell} ydx + 2xdy = \int_0^1 \sqrt{1-t^2} + 2t \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{3t\sqrt{1-t^2} - \arcsin t}{2} \Big|_0^1 = -\frac{\pi}{4}.$$

2)  $\ell = \{x = \cos s, y = \sin s, z = 0; 0 \leq s \leq \pi/2\}$ ;  $dx = -\sin s ds, dy = \cos s ds$ . Ориентация другая.

$$\int_{\ell} ydx + 2xdy = \int_0^{\pi/2} (\sin s(-\sin s) + 2\cos s \cos s) ds = \int_0^{\pi/2} \frac{1 + 3\cos 2s}{2} ds = \frac{\pi}{4}.$$

**Теорема 4.2. (Формула Ньютона–Лейбница для криволинейного интеграла) :**  
 Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  – область;  $\Phi$  – скалярная функция на  $\Omega$ ; векторное поле  $\vec{V} = \nabla\Phi$  непрерывно. Пусть кусочно-гладкая кривая  $\ell \subset \Omega$ , на ней задана ориентация, при которой точка  $A$  – начало  $\ell$ , точка  $B$  – её конец. Тогда

$$\int_{\ell} \underbrace{P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz}_{d\Phi} = \Phi(B) - \Phi(A). \quad (28)$$

*Доказательство.* Вычисляем:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial\Phi}{\partial x}(X(t))\dot{x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}(X(t))\dot{y} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}(X(t))\dot{z} dt &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt}\Phi(X(t)) dt = \Phi(X(t)) \Big|_{t=\alpha}^{t=\beta} = \\ &= \Phi(B) - \Phi(A). \quad \square \end{aligned}$$

## 5 Площадь поверхности

Вспомним, что множество  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  называется простой гладкой двумерной поверхностью, если оно является образом связного открытого множества  $U \subset \mathbb{R}^2$  под действием инъективного отображения  $\vec{r} : U \mapsto \mathbb{R}^3$ , т.е.

$$\Sigma = \vec{r}(U) = \{ (x(u, v); y(u, v); z(u, v)) : (u, v) \in U \}, \quad (29)$$

причём отображение  $\vec{r} = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix}$  имеет непрерывные частные производные, и его матрица Якоби

$$J_{\vec{r}}(u, v) = \begin{bmatrix} \partial x / \partial u & \partial x / \partial v \\ \partial y / \partial u & \partial y / \partial v \\ \partial z / \partial u & \partial z / \partial v \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} & \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \end{pmatrix}$$

имеет всюду ранг 2 (т.е.  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$  и  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$  линейно независимы в каждой точке  $(u, v) \in U$ ).

Связное множество  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  называется *гладкой поверхностью*, если  $\forall A \in \Sigma \exists \varepsilon > 0$  : множество  $\Sigma \cap U_\varepsilon(A)$  является простой гладкой поверхностью.

Важнейшим частным случаем гладкой поверхности является *график* функции  $z = h(x, y)$ , имеющей непрерывные частные производные, т.е. множество вида

$$\Gamma_h = \{ (x, y, z) : (x, y) \in U, z = h(x, y) \}. \quad (30)$$

Любая гладкая поверхность локально представима в виде графика  $x = f(y, z)$ , или  $y = g(x, z)$ , или  $z = h(x, y)$ .

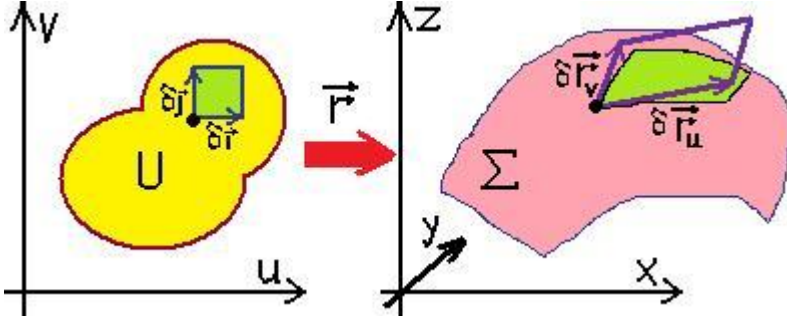
Как определить площадь гладкой поверхности? Если действовать по аналогии с кривой, т.е. взять супремум площадей многогранных поверхностей, вписанных в гладкую поверхность, то даже для ограниченного цилиндра получится  $\infty$  (парадокс „сапог Шварца“). Поэтому определим площадь поверхности не геометрически, а аналитически.

**Определение 5.1.** Пусть  $\Sigma$  – простая гладкая поверхность вида (29), причём множество  $U$  квадратуемо, а частные производные  $\partial x / \partial u, \dots, \partial z / \partial v$  непрерывны и ограничены (в этом случае мы будем говорить, что простая поверхность  $\Sigma$  **квандрируема**). Тогда площадь поверхности  $\Sigma$  равна

$$S(\Sigma) = \iint_U \sqrt{\det(J_{\vec{r}}^T J_{\vec{r}})} \, dudv = \iint_U \sqrt{\begin{vmatrix} \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u & \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v \\ \vec{r}_v \cdot \vec{r}_u & \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v \end{vmatrix}} \, dudv. \quad (31)$$

Матрица  $J_{\vec{r}}^T \cdot J_{\vec{r}} = G(u, v)$  (матрица Грама) является симметричной и положительно определённой. Выясним геометрический смысл корня из её определителя.

$$\begin{aligned}\sqrt{\det G(u, v)} &= \sqrt{\begin{vmatrix} \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u & \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v \\ \vec{r}_v \cdot \vec{r}_u & \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v \end{vmatrix}} = \sqrt{|\vec{r}_u|^2 \cdot |\vec{r}_v|^2 - (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)^2} = \\ &= \sqrt{|\vec{r}_u|^2 \cdot |\vec{r}_v|^2 - \left(|\vec{r}_u| \cdot |\vec{r}_v| \cdot \cos(\widehat{\vec{r}_u; \vec{r}_v})\right)^2} = |\vec{r}_u| \cdot |\vec{r}_v| \cdot \sin(\widehat{\vec{r}_u; \vec{r}_v}) = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|.\end{aligned}$$



Если взять на  $U$  квадрат  $\{u_0 \leq u \leq u_0 + \delta; v_0 \leq v \leq v_0 + \delta\}$  с малым  $\delta$  (его площадь  $\delta^2$ ), то его образ на  $\Sigma$  будет близок к параллелограмму, натянутому на вектора  $\delta \vec{r}_u$  и  $\delta \vec{r}_v$ , площадь которого  $\delta^2 |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|$ . Таким образом,  $\sqrt{\det G(u, v)}$  – это коэффициент увеличения площади при отображении  $\vec{r}: U \mapsto \Sigma$ .

Чтобы можно было пользоваться определением 5.1, необходимо доказать его корректность, т.е. независимость  $S(\Sigma)$  от способа задания квадратируемой гладкой поверхности  $\Sigma$  через параметры  $(u, v)$ . Пусть

$$\Sigma = \left\{ \vec{r}(u, v) : (u, v) \in U \right\} = \left\{ \vec{R}(s, t) : (s, t) \in W \right\}.$$

Тогда  $u$  и  $v$  дифференцируемы по  $s$  и  $t$ ; обозначим соответствующую матрицу Якоби через  $T(s, t)$ . Тогда по теореме о дифференцировании сложной векторзначной функции имеем  $J_{\vec{R}}(s, t) = J_{\vec{r}}(u, v) T(s, t)$ .

$$S(\Sigma) = \iint_U \sqrt{\det(J_{\vec{r}}^T(u, v) \cdot J_{\vec{r}}(u, v))} \, dudv =$$

[делаем замену переменных; теперь  $u = u(s, t)$ ,  $v = v(s, t)$ ]

$$\begin{aligned}&= \iint_W \sqrt{\det(J_{\vec{r}}^T(u, v) \cdot J_{\vec{r}}(u, v)) \cdot |\det T(s, t)|} \, dsdt = \\ &= \iint_W \sqrt{\det(T^T(s, t) \cdot J_{\vec{r}}^T(u, v) \cdot J_{\vec{r}}(u, v) \cdot T(s, t))} \, dsdt = \\ &= \iint_W \sqrt{\det(J_{\vec{R}}^T(s, t) \cdot J_{\vec{R}}(s, t))} \, dsdt,\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Если квадратируемую гладкую поверхность разрезать на несколько частей по кусочно-гладким кривым, то её площадь равна сумме площадей её частей (это следует



из аддитивности двойного интеграла). Благодаря этому свойству можно корректно определить площадь ограниченной кусочно-гладкой поверхности как сумму площадей её гладких частей.

Посмотрим, как будет выглядеть формула площади для графика (30):

$$\begin{cases} x(u, v) = u \\ y(u, v) = v \\ z(u, v) = h(u, v) \end{cases} \implies J_{\vec{r}}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \partial h / \partial u & \partial h / \partial v \end{pmatrix};$$

$$\det(G(u, v)) = \begin{vmatrix} 1 + (\partial h / \partial u)^2 & \partial h / \partial u \partial h / \partial v \\ \partial h / \partial v \partial h / \partial u & 1 + (\partial h / \partial v)^2 \end{vmatrix} = 1 + \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2.$$

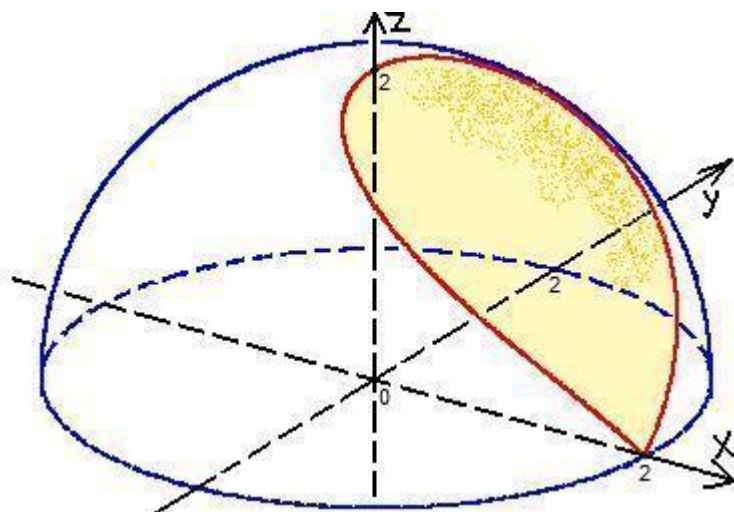
Следовательно, переобозначив  $u = x$ ,  $v = y$ , мы получаем формулу

$$S(\Gamma_h) = \iint_U \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2} dx dy. \quad (32)$$

Подинтегральное выражение в этой формуле имеет такой геометрический смысл: это секанс угла наклона касательной плоскости к плоскости  $Oxy$ , или, что то же самое, угла между нормалью и осью  $Oz$ . Действительно,

$$N_{(x,y,h(x,y))\Gamma_h} \parallel \vec{N} = \begin{bmatrix} -\partial h / \partial x \\ -\partial h / \partial y \\ 1 \end{bmatrix} \implies \cos(\widehat{\vec{N}, \vec{k}}) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial h / \partial x)^2 + (\partial h / \partial y)^2}}.$$

**Пример 5.1.** Найти площадь части полусферы  $\Sigma = \{z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}$ , вырезаемой цилиндром  $\{(x - 1)^2 + y^2 = 1\}$ .



1) Представим  $\Sigma$  как график:

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}; \quad (x; y) \in D = \{(x - 1)^2 + y^2 < 1\}.$$

Тогда секанс угла наклона равен

$$\sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}.$$

Вычислим площадь по формуле (32), перейдя к полярным координатам:

$$\begin{aligned} S(\Sigma) &= \iint_D \frac{2dx dy}{\sqrt{4-x^2-y^2}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \frac{2\rho d\rho}{\sqrt{4-\rho^2}} = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(-2\sqrt{4-\rho^2}\right)\Big|_0^{2\cos\varphi} d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4(1-|\sin\varphi|)d\varphi = 4\pi - 8. \end{aligned}$$

2) Параметризуем  $\Sigma$  широтой  $\psi$  и долготой  $\varphi$  :

$$x = 2 \cos \psi \cos \varphi; \quad y = 2 \cos \psi \sin \varphi; \quad z = 2 \sin \psi; \quad (\varphi; \psi) \in W.$$

Подставив такие  $x, y, z$  в уравнение цилиндра, получаем

$$W = \{|\varphi| < \psi < \pi/2\}.$$

Дифференцируем  $x, y, z$  по  $\psi$  и  $\varphi$  :

$$\vec{r}_\psi = 2 \begin{bmatrix} -\sin \psi \cos \varphi \\ -\sin \psi \sin \varphi \\ \cos \psi \end{bmatrix}; \quad \vec{r}_\varphi = 2 \begin{bmatrix} -\cos \psi \sin \varphi \\ \cos \psi \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Теперь нетрудно вычислить  $\det G(\varphi, \psi) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \cos^2 \psi \end{vmatrix} = 16 \cos^2 \psi$ . Итак,

$$S(\Sigma) = \int_0^{\pi/2} d\psi \int_{-\psi}^{\psi} 4 \cos \psi d\varphi = \int_0^{\pi/2} 8\psi \cos \psi d\psi = 8(\psi \sin \psi + \cos \psi)\Big|_0^{\pi/2} = 4\pi - 8.$$

## 6 Поверхностные интегралы

Пусть  $\Sigma$  – квадратируемая гладкая поверхность. Её разбиением называется такой конечный набор квадратируемых гладких поверхностей  $\{\sigma_i\}_{i=1}^m$ , что  $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$  и  $\bigcup_{i=1}^m [\sigma_i] = [\Sigma]$ , т.е.  $\Sigma$  составлена из  $\sigma_i$ -ых, склеенных по границам. Диаметр разбиения равен  $\text{diam}\{\sigma_i\} = \max_{i=1}^m \text{diam } \sigma_i$ .

**Определение 6.1.** Пусть скалярная функция  $f(x, y, z)$  определена на квадратируемой гладкой поверхности  $\Sigma$ . Пусть  $\{\sigma_i\}_{i=1}^m$  – разбиение  $\Sigma$ ; выбраны точки  $X_i \in [\sigma_i]$ . Интегральной суммой называется сумма

$$S_{\{\sigma_i\}}^{\{X_i\}}(f) = \sum_{i=1}^m S(\sigma_i) f(X_i).$$

Верхняя и нижняя суммы Дарбу по разбиению  $\{\sigma_i\}_{i=1}^m$  :

$$S_{\{\sigma_i\}}^*(f) = \sum_{i=1}^m S(\sigma_i) \sup_{[\sigma_i]} f; \quad {}_*S_{\{\sigma_i\}}(f) = \sum_{i=1}^m S(\sigma_i) \inf_{[\sigma_i]} f.$$

**Определение 6.2.** Функция  $f(x, y, z)$  интегрируема по квадратируемой гладкой поверхности  $\Sigma$ , если  $\Sigma \subset D(f)$  и существует число  $J \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  : если  $\text{diam}\{\sigma_i\} < \delta$ , то при любом выборе точек  $X_i \in \sigma_i$  имеем

$$\left| S_{\{\sigma_i\}}^{\{X_i\}}(f) - J \right| < \varepsilon. \quad (33)$$

Число  $J$  называется **поверхностным интегралом I рода** функции  $f$  по поверхности  $\Sigma$  и обозначается

$$J = \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS.$$

Для поверхностного интеграла I рода справедлив критерий Дарбу: функция  $f(x, y, z)$  интегрируема на  $\Sigma$ , если и только если совпадают верхний и нижний интегралы Дарбу

$$I_{\Sigma}^*(f) = \inf S_{\{\sigma_i\}}^*(f) \quad \text{и} \quad I_{\Sigma}^*(f) = \sup {}_*S_{\{\sigma_i\}}(f);$$

в этом случае интеграл  $J$  совпадает с ними обоими.

**Теорема 6.1.** Пусть  $\Sigma = \vec{r}(U) = \{(x(u, v); y(u, v); z(u, v)) : (u, v) \in U\}$  – квадратируемая гладкая поверхность. Пусть  $f(x, y, z)$  – непрерывная ограниченная скалярная функция, определённая на  $\Sigma$ . Тогда  $f$  интегрируема по  $\Sigma$ , и её поверхностный интеграл I рода равен

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_U f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{\det G(u, v)} \, dudv. \quad (34)$$

*Доказательство.* Интегрируемость  $f$  по  $\Sigma$  доказывается так же, как для кратного интеграла (теорема 1.2). Обозначим этот интеграл через  $J$ .

Поскольку  $U \subset \mathbb{R}^2$  – квадратуемая область, элементы матрицы  $G(u, v)$  непрерывны и ограничены, то интеграл  $I$  в правой части (34) тоже существует, а значит, при достаточно малом диаметре разбиения  $U$  на множества  $U_i$  будет выполнено

$$I - \varepsilon < {}_*S_{\{U_i\}}(f \circ \vec{r} \cdot \sqrt{\det G}) \leq S_{\{U_i\}}^*(f \circ \vec{r} \cdot \sqrt{\det G}) < I + \varepsilon. \quad (35)$$

Пусть  $\sigma_i$  – образ  $U_i$  (кроме граничных точек) при отображении  $\vec{r}$ . Тогда  $\{\sigma_i\}$  – разбиение  $\Sigma$ . Поскольку  $\text{diam}\{\sigma_i\} \leq \sup(|\partial\vec{r}/\partial u| + |\partial\vec{r}/\partial v|) \text{diam}\{U_i\}$ , мы можем, взяв достаточно малый диаметр разбиения  $\{U_i\}$ , получить столь малый диаметр  $\{\sigma_i\}$ , чтобы при любом выборе точек  $X_i \in \sigma_i$  было выполнено (33). Поскольку

$$S(\sigma_i) = \iint_{U_i} \sqrt{\det G(u, v)} \, dudv,$$

по теореме о среднем найдётся  $(u_i, v_i) \in \sigma_i$  :  $S(\sigma_i) = S(U_i) \sqrt{\det G(u_i, v_i)}$ . Возьмём  $X_i = \vec{r}(u_i, v_i)$ . Тогда интегральная сумма

$$\mathcal{S} = S_{\{\sigma_i\}}^{\{X_i\}}(f) = \sum_{i=1}^m S(U_i) \sqrt{\det G(u_i, v_i)} f(X_i) = S_{\{U_i\}}^{\{(u_i, v_i)\}}(f \circ \vec{r} \sqrt{\det G})$$

заклучена между суммами Дарбу (35) и потому  $|\mathcal{S} - I| < \varepsilon$ . В силу (33),  $|\mathcal{S} - J| < \varepsilon$ , следовательно,  $|I - J| < 2\varepsilon$ . Поскольку  $\varepsilon > 0$  произвольно, мы получаем  $I = J$ .  $\square$

### Свойства поверхностного интеграла I рода

1. Линейность:  $\iint_{\Sigma} cf + kg \, dS = c \iint_{\Sigma} f \, dS + k \iint_{\Sigma} g \, dS$ .
2. Аддитивность: если  $[\Sigma] = [\Sigma_1] \cup [\Sigma_2]$ ,  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ , то  $\iint_{\Sigma} f \, dS = \iint_{\Sigma_1} f \, dS + \iint_{\Sigma_2} f \, dS$ .
3. Оценка:  $S(\Sigma) \inf_{\Sigma} f \leq \iint_{\Sigma} f \, dS \leq S(\Sigma) \sup_{\Sigma} f$ .

### Поверхностный интеграл II рода

**Определение 6.3.** На поверхности задана ориентация, если на ней задано непрерывное поле единичных нормалей, т.е. непрерывная векторнозначная функция  $\vec{n} : \Sigma \mapsto \mathbb{R}^3$ , такая, что  $\forall X \in \Sigma$  вектор  $\vec{n}(X)$  направлен по нормали и  $|\vec{n}(X)| = 1$ .

Если на поверхности можно задать ориентацию, она называется ориентируемой или двусторонней; в противном случае – неориентируемой или односторонней. Поскольку вектора  $\vec{r}_u$  и  $\vec{r}_v$  образуют базис касательной плоскости  $T_X \Sigma$ , то единичная нормаль в точке  $X = \vec{r}(u, v)$  имеет вид

$$\vec{n}(X) = \frac{\pm 1}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} \cdot \vec{r}_u \times \vec{r}_v,$$

причём знак  $+$  или  $-$  сохраняется на всей поверхности, задаваемой отображением  $\vec{r}(u, v)$  (" $+$ " если вектора  $\vec{r}_u, \vec{r}_v$  и  $\vec{n}$  образуют правую тройку, " $-$ " если левую). Таким образом, простая гладкая поверхность ориентируема. Простейший пример неориентируемой поверхности – лист Мёбиуса.

**Определение 6.4.** Пусть векторное поле  $\vec{V}(x, y, z) = \begin{bmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{bmatrix}$  определено на

квадрируемой гладкой ориентируемой поверхности  $\Sigma$ . **Поверхностным интегралом II рода**  $\vec{V}$  по поверхности  $\Sigma$ , или **поток**  $\vec{V}$  через  $\Sigma$ , называется интеграл

$$\iint_{\Sigma} P \, dydz + Q \, dzdx + R \, dxdy = \iint_{\Sigma} (\vec{V}, \vec{n}) dS.$$

Из теоремы 6.1 следует, что непрерывное ограниченное векторное поле интегрируемо по квадрируемой ориентируемой поверхности. Выведем формулу для вычисления интеграла II рода по простой гладкой поверхности, предположив, что вектора  $\vec{r}_u, \vec{r}_v$  и  $\vec{n}$  образуют правую тройку:

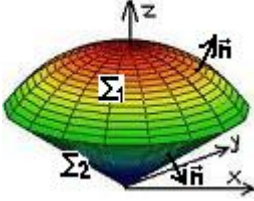
$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (\vec{V}, \vec{n}) dS &= \iint_{\Sigma} \vec{V} \cdot \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} dS = \iint_U \frac{1}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} \langle \vec{V}, \vec{r}_u, \vec{r}_v \rangle |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, dudv = \\ &= \iint_U \langle \vec{V}, \vec{r}_u, \vec{r}_v \rangle \, dudv = \iint_U \begin{vmatrix} P & x_u & x_v \\ Q & y_u & y_v \\ R & z_u & z_v \end{vmatrix} \, dudv, \quad (36) \end{aligned}$$

где  $P = P(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  и т. д.

### Свойства поверхностного интеграла II рода

1. **Линейность:**  $\iint_{\Sigma} ((c\vec{V} + k\vec{W}), \vec{n}) dS = c \iint_{\Sigma} (\vec{V}, \vec{n}) dS + k \iint_{\Sigma} (\vec{W}, \vec{n}) dS.$
2. **Аддитивность:** если  $[\Sigma] = [\Sigma_1] \cup [\Sigma_2]$ ,  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ , причём ориентации  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  совпадают с ориентацией  $\Sigma$ , то  $\iint_{\Sigma} (\vec{V}, \vec{n}) dS = \iint_{\Sigma_1} (\vec{V}, \vec{n}) dS + \iint_{\Sigma_2} (\vec{V}, \vec{n}) dS.$
3. **Оценка:**  $\left| \iint_{\Sigma} (\vec{V}, \vec{n}) dS \right| \leq S(\Sigma) \sup_{\Sigma} |\vec{V}|.$
4. Если поменять ориентацию поверхности, то поверхностный интеграл II рода поменяет знак.

**Пример 6.1.** Найти поток векторного поля  $\vec{V} = (x, x + y, z)^T$  через поверхность шарового сектора  $\Omega = \left\{ x^2 + y^2 + z^2 < 1, z > \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}} \right\}$ , нормаль направлена наружу.



Поверхность тела состоит из двух частей:

$$\partial\Omega = [\Sigma_1] \cup [\Sigma_2],$$

$$\Sigma_1 = \left\{ x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}} \right\}$$

$$\Sigma_2 = \left\{ x^2 + y^2 + z^2 < 1, z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}} \right\}$$

Параметризуем обе поверхности:

$$\Sigma_1 = \left\{ \begin{array}{l} x = \cos u \cos v \\ y = \cos u \sin v \\ z = \sin u \end{array} : \begin{array}{l} \pi/6 < u < \pi/2 \\ |v| < \pi \end{array} \right\}; \quad \Sigma_2 = \left\{ \begin{array}{l} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = u/\sqrt{3} \end{array} : \begin{array}{l} 0 < u < \sqrt{3}/2 \\ |v| < \pi \end{array} \right\}$$

Для обеих поверхностей тройка  $\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{n}$  левая. По формуле (36) получаем

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_1} \vec{V} \cdot \vec{n} dS &= - \int_{\pi/6}^{\pi/2} du \int_{-\pi}^{\pi} \begin{vmatrix} \cos u \cos v & -\sin u \cos v & -\cos u \sin v \\ \cos u(\cos v + \sin v) & -\sin u \sin v & \cos u \cos v \\ \sin u & \cos u & 0 \end{vmatrix} dv = \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} du \int_{-\pi}^{\pi} \cos^3 u \sin v \cos v + \cos u dv = \int_{\pi/6}^{\pi/2} 2\pi \cos u du = \pi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_2} \vec{V} \cdot \vec{n} dS &= - \int_0^{\sqrt{3}/2} du \int_{-\pi}^{\pi} \begin{vmatrix} u \cos v & \cos v & -u \sin v \\ u(\cos v + \sin v) & \sin v & u \cos v \\ u/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} dv = \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} du \int_{-\pi}^{\pi} \frac{u^2 \sin v \cos v}{\sqrt{3}} dv = \int_{\pi/6}^{\pi/2} 0 du = 0. \end{aligned}$$

ответ: поток векторного поля равен  $\pi$ .

## 7 Циркуляция и формула Грина

**Определение 7.1.** Кривая  $\ell = \{X(t) = (x(t); y(t); z(t)) : t \in [\alpha; \beta]\}$  называется замкнутой, если  $X(\alpha) = X(\beta)$ . Она называется несамопересекающейся, если нет другой пары значений параметра  $s, t \in [\alpha; \beta] : s < t, X(s) = X(t)$ .

Криволинейный интеграл II рода по замкнутой кривой называется **циркуляцией**, и в его обозначении может использоваться знак  $\oint$  вместо  $\int$ . Физический смысл циркуляции – работа силы по замкнутому контуру. Циркуляция не зависит от того, какую точку считать началом и концом кривой: пусть  $A$  и  $B$  – две точки на замкнутой кривой  $\ell$ , на которой задана ориентация; обозначим через  $\ell_1$  её участок, ведущий из  $A$  в  $B$ , а через  $\ell_2$  – ведущий из  $B$  в  $A$ . Тогда в силу аддитивности криволинейного интеграла II рода мы получим

$$\text{от } A \text{ до } A \quad \oint_{\ell} = \int_{\ell_1} + \int_{\ell_2}, \quad \text{от } B \text{ до } B \quad \oint_{\ell} = \int_{\ell_2} + \int_{\ell_1}.$$

**Теорема 7.1.** Пусть  $\Omega$  – область (т.е. связное открытое множество) в  $\mathbb{R}^d$ ;  $\vec{V} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^d$  – непрерывное векторное поле. Тогда следующие утверждения равносильны:

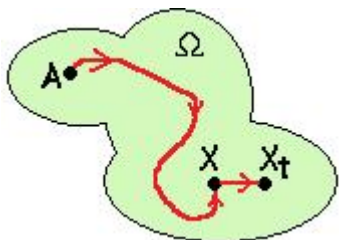
- (1)  $\vec{V}$  является **потенциальным**, т.е.  $\exists \Phi : \Omega \mapsto \mathbb{R} : \vec{V} = \nabla \Phi$  на  $\Omega$ .
- (2) Циркуляция  $\vec{V}$  по любой замкнутой несамопересекающейся кусочно-гладкой кривой  $\ell \subset \Omega$  равна 0.

*Доказательство.* (1) $\implies$ (2) по формуле Ньютона–Лейбница для криволинейного интеграла, поскольку конец совпадает с началом.

(2) $\implies$ (1): Рассмотрим для простоты случай  $d = 2$ , пусть  $\vec{V} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ . Зафиксируем точку  $A \in \Omega$ , положим  $\Phi(A) = 0$ ; для других  $X \in \Omega$  пусть  $\Phi(X) = \int_{AX} Pdx + Qdy$ , где

$AX \subset \Omega$  – гладкая кривая с началом  $A$  и концом  $X$ . Такое определение корректно: если  $\ell_1$  и  $\ell_2$  – две кривые с началом  $A$  и концом  $X$ , то возьмём кривую  $\ell_3 \subset \Omega$  с началом  $X$  и концом  $A$ , не имеющую с  $\ell_1$  и  $\ell_2$  других общих точек, тогда

$$\oint_{\ell_1 \cup \ell_3} Pdx + Qdy = 0 \implies \int_{\ell_1} = - \int_{\ell_3}; \quad \oint_{\ell_2 \cup \ell_3} Pdx + Qdy = 0 \implies \int_{\ell_2} = - \int_{\ell_3}.$$



Теперь покажем, что  $\forall X \in \Omega$  функция  $\Phi$  дифференцируема, и  $\nabla \Phi(X) = \vec{V}(X)$ . Вычислим частные производные  $\Phi$  в точке  $X = (x, y)$ . Пусть  $X_t = (x + t, y)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(X_t) - \Phi(X)}{t} &= \frac{1}{t} \left( \int_{AXX_t} Pdx + Qdy - \int_{AX} Pdx + Qdy \right) = \\ &= \frac{1}{t} \int_{XX_t} Pdx + \underbrace{Qdy}_{\text{даст } 0} = \frac{1}{t} \int_x^{x+t} P(u, y) du = P(X_\theta) \end{aligned}$$

по теореме о среднем, где  $|\theta| \leq |t|$ . Следовательно, при  $t \rightarrow 0$  также  $\theta \rightarrow 0$ , и мы получаем в пределе  $\partial\Phi/\partial x(X) = P(X)$ . Аналогично получим  $\partial\Phi/\partial y(X) = Q(X)$ . Поскольку частные производные функции  $\Phi$  непрерывны на  $\Omega$ , получаем её дифференцируемость в каждой точке  $X \in \Omega$ , при этом  $\nabla\Phi = \vec{V}$ .  $\square$

Следующая теорема (**формула Грина**) устанавливает связь между двойным интегралом по плоской области и циркуляцией по её границе.

**Теорема 7.2.** Пусть  $U \subset \mathbb{R}^2$  – ограниченная область со связной кусочно-гладкой границей  $\ell$ ; на  $\ell$  задана ориентация против часовой стрелки<sup>8</sup>. Пусть  $\vec{V}(x, y) = \begin{bmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{bmatrix}$  – векторное поле, непрерывное на  $[U]$  и имеющее непрерывные частные производные в  $U$ . Тогда верна формула

$$\oint_{\ell} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_U \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (37)$$

*Доказательство.* В силу линейности всех разновидностей интегралов, нам достаточно доказать следующие две формулы:

$$\text{для поля } P(x, y)\vec{i} \quad \oint_{\ell} P(x, y)dx = - \iint_U \frac{\partial P}{\partial y} dx dy; \quad (38)$$

$$\text{для поля } Q(x, y)\vec{j} \quad \oint_{\ell} Q(x, y)dy = \iint_U \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy. \quad (39)$$

Докажем формулу (38). Сначала пусть область  $U$  имеет вид

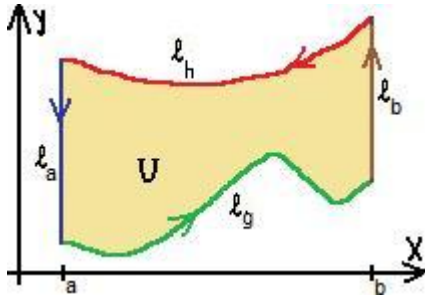
$$U = \{(x, y) : a < x < b; g(x) < y < h(x)\}, \quad (40)$$

где  $g(x)$  и  $h(x)$  – непрерывные функции с кусочно-непрерывными производными,  $h(x) > g(x)$  при  $a < x < b$ . Вычислим правую часть (38):

$$- \iint_U \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = - \int_a^b P(x, h(x)) - P(x, g(x)) dx.$$

<sup>8</sup>т.е. при движении по  $\partial U$  в заданном направлении область  $U$  остаётся слева.





Чтобы вычислить левую часть (38), заметим, что  $\ell = \partial U$  – замкнутая кусочно-гладкая кривая, составленная из следующих четырёх кривых:

$$\begin{array}{ll}
 \ell_a = \{(a; y) : g(a) \leq y \leq h(a)\} & \text{ориентирована сверху вниз;} \\
 \ell_g = \{(x; y) : a \leq x \leq b; y = g(x)\} & \text{ориентирована слева направо;} \\
 \ell_b = \{(b; y) : g(b) \leq y \leq h(b)\} & \text{ориентирована снизу вверх;} \\
 \ell_h = \{(x; y) : a \leq x \leq b; y = h(x)\} & \text{ориентирована справа налево.}
 \end{array}$$

Интегралы  $\int_{\ell_a} P(x, y)dy$  и  $\int_{\ell_b} P(x, y)dy$  равны 0, поскольку касательный вектор к вертикальному отрезку ортогонален вектору  $P(x, y)\vec{i}$ . На кривой  $\ell_g$  в качестве параметра можно взять  $x$ , тогда

$$\int_{\ell_g} P(x, y)dx = \int_a^b P(x, g(x))dx.$$

На кривой  $\ell_h$  в качестве параметра также можно взять  $x$ , но ориентация получится обратной (слева направо), поэтому

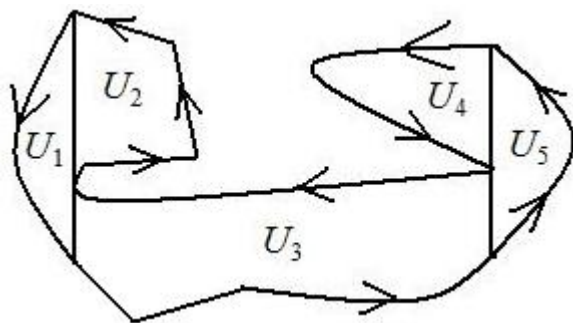
$$\int_{\ell_h} P(x, y)dx = - \int_a^b P(x, h(x))dx.$$

Сложив интегралы II рода по четырём кривым, получаем

$$\oint_{\ell} P(x, y)dx = \int_a^b P(x, g(x)) - P(x, h(x))dx,$$

и формула (38) для области  $U$  вида (40) доказана.

Практически любую ограниченную область со связной кусочно-гладкой границей можно разбить вертикальными отрезками на конечное множество областей  $U_i$  вида (40). При этом двойные интегралы сложатся по аддитивности. Для криволинейных интегралов аддитивность тоже сработает: невертикальные участки границы  $U$  состоят из невертикальных участков границ  $U_i$ -ых, и ориентации согласованы; интегралы по вертикальным отрезкам равны 0.



Доказательство (39) аналогично, отличие в том, что разбиваем  $U$  горизонтальными отрезками на области вида  $\{(x; y) : a < y < b; g(y) < x < h(y)\}$ .  $\square$

**Следствие 7.1.** Пусть область  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  односвязна, т.е. не имеет дыр;

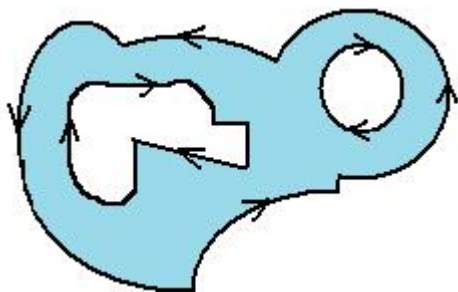
$$\vec{V}(x, y) = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^2$$

векторное поле с непрерывными частными производными, причём  $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x \forall (x, y) \in \Omega$ . Тогда  $\vec{V}$  является потенциальным.

*Доказательство.* В силу теоремы 7.1 нам достаточно доказать, что циркуляция  $\vec{V}$  по любой замкнутой несамопересекающейся кусочно-гладкой кривой  $\ell \subset \Omega$  равна 0. Если  $\ell \subset \Omega$ , то ограничиваемая ею область  $U$  также содержится в  $\Omega$ , поскольку область  $\Omega$  односвязна. Применим формулу Грина:

$$\oint_{\ell} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_U \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_U 0 dx dy = 0. \quad \square$$

**Замечание 7.1.** Из доказательства формулы Грина (переход от области простого вида к произвольной) видно, что теорема 7.2 останется справедливой даже для не односвязной области. Тогда в левой части формулы (37) будет стоять сумма нескольких циркуляций: внешнюю границу следует обходить против часовой стрелки, а границу каждой дыры – по часовой стрелке (в обоих случаях область остаётся слева).



## 8 Дивергенция. Теорема Остроградского–Гаусса

**Определение 8.1.** Пусть  $\vec{V}(x, y, z) = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix}$  – векторное поле;  $A = (x, y, z)$  – внутренняя точка его области определения. Если  $P$ ,  $Q$  и  $R$  дифференцируемы в  $A$ , то **дивергенцией** поля  $\vec{V}$  в точке  $A$  называется величина

$$\operatorname{div} \vec{V}(A) = \frac{\partial P}{\partial x}(A) + \frac{\partial Q}{\partial y}(A) + \frac{\partial R}{\partial z}(A).$$

Геометрический смысл дивергенции станет ясен позже.

**Теорема 8.1. (Остроградский–Гаусс).** Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  – ограниченная область, такая, что  $\partial\Omega$  – связная кусочно-гладкая квадратуемая поверхность; пусть на каждой гладкой части поверхности  $\partial\Omega$  задано непрерывное поле единичных нормалей  $\vec{n}$ , направленных наружу  $\Omega$ . Тогда для векторного поля  $\vec{V}(x, y, z) = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix}$ , непрерывного на  $[\Omega]$ , имеющего непрерывные частные производные в  $\Omega$ , верна формула<sup>9</sup>

$$\oiint_{\partial\Omega} (\vec{V}, \vec{n}) dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{V}(x, y, z) dx dy dz. \quad (41)$$

*Доказательство.* В силу линейности всех разновидностей интегралов, нам достаточно доказать следующие три формулы:

$$\begin{aligned} \oiint_{\partial\Omega} (P \vec{i}, \vec{n}) dS &= \iiint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz; & \oiint_{\partial\Omega} (Q \vec{j}, \vec{n}) dS &= \iiint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz; \\ \oiint_{\partial\Omega} (R \vec{k}, \vec{n}) dS &= \iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz. \end{aligned} \quad (42)$$

Докажем (42); две другие формулы доказываются аналогично. Сначала предположим, что область  $\Omega$  имеет вид

$$\Omega = \{(x; y; z) : (x; y) \in D, g(x, y) < z < h(x, y)\}, \quad (43)$$

где  $D \subset \mathbb{R}^2$  – квадратуемая ограниченная область; функции  $g$  и  $h$  непрерывны на  $[D]$ , имеют непрерывные частные производные на  $D$ , и  $h > g$  на  $D$ . Граница такой

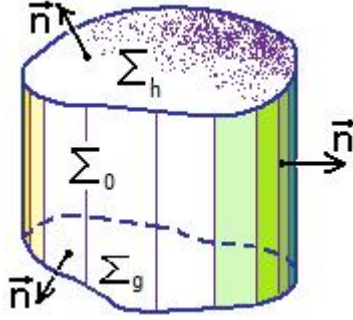
<sup>9</sup>такой знак используется вместо  $\iint$  для обозначения поверхностного интеграла II рода только в том случае, когда интеграл берётся по всей поверхности тела, причём нормали направлены наружу.

области имеет вид  $\partial\Omega = \Sigma_g \cup \Sigma_h \cup \Sigma_o$ , где

$$\Sigma_g = \left\{ \begin{array}{l} (x; y; g(x, y)) : \\ (x; y) \in D \end{array} \right\}, \quad \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial g/\partial x)^2 + (\partial g/\partial y)^2}} \begin{bmatrix} \partial g/\partial x \\ \partial g/\partial y \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_h = \left\{ \begin{array}{l} (x; y; h(x, y)) : \\ (x; y) \in D \end{array} \right\}, \quad \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial h/\partial x)^2 + (\partial h/\partial y)^2}} \begin{bmatrix} -\partial h/\partial x \\ -\partial h/\partial y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_o = \left\{ \begin{array}{l} (x; y; z) : (x; y) \in \partial D; \\ g(x, y) \leq z \leq h(x, y) \end{array} \right\}, \quad \vec{n} \text{ направлены горизонтально.}$$



Вычислим интегралы II рода по этим трём поверхностям (потоки векторного поля  $\vec{V}$  через них наружу  $\Omega$ ):

$$\iint_{\Sigma_h} (R\vec{k}, \vec{n})dS = \iint_{\Sigma_h} \frac{R(x, y, z) dS}{\sqrt{1 + (\partial h/\partial x)^2 + (\partial h/\partial y)^2}} = \iint_D R(x, y, h(x, y))dxdy;$$

$$\iint_{\Sigma_g} (R\vec{k}, \vec{n})dS = \iint_{\Sigma_g} \frac{-R(x, y, z) dS}{\sqrt{1 + (\partial g/\partial x)^2 + (\partial g/\partial y)^2}} = - \iint_D R(x, y, g(x, y))dxdy;$$

интеграл по  $\Sigma_o$  равен 0. Сложив три интеграла, получаем

$$\oiint_{\partial\Omega} (R\vec{k}, \vec{n})dS = \iint_D R(x, y, h(x, y)) - R(x, y, g(x, y))dxdy.$$

В то же время

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z}dxdydz = \iint_D dxdy \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}dz = \iint_D R(x, y, h(x, y)) - R(x, y, g(x, y))dxdy,$$

и формула (42) для области вида (43) доказана.

Практически любую область, удовлетворяющую условиям этой теоремы, можно разбить вертикальными цилиндрическими поверхностями на конечное множество областей  $\Omega_i$  вида (43). При этом тройные интегралы сложатся по аддитивности. Для поверхностных интегралов аддитивность тоже сработает: неvertикальные части  $\partial\Omega$  состоят из неvertикальных частей границ  $\Omega_i$ -ых, и ориентации согласованы; интегралы по вертикальным поверхностям равны 0.  $\square$

**Следствие 8.1.** Пусть  $U \subset \mathbb{R}^3$  – область; векторное поле  $\vec{V} : U \mapsto \mathbb{R}^3$  имеет в точке  $A \in U$  непрерывные частные производные. Тогда

$$\operatorname{div} \vec{V}(A) = \lim_{\operatorname{diam} \Omega \rightarrow 0} \left( \frac{1}{V(\Omega)} \oint_{\partial \Omega} (\vec{V}, \vec{n}) dS \right),$$

где  $A \in \Omega \subset U$ , область  $\Omega$  имеет кусочно-гладкую границу.

Таким образом, дивергенция – это плотность источников векторного поля (отношение потока из тела  $\Omega$  к его объёму). Точки, в которых  $\operatorname{div} \vec{V} > 0$ , называются источниками векторного поля; точки, в которых  $\operatorname{div} \vec{V} < 0$ , называются стоками.

*Доказательство.* Применим теорему Остроградского–Гаусса, затем теорему о среднем:

$$\oint_{\partial \Omega} (\vec{V}, \vec{n}) dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{V} \, dx dy dz = V(\Omega) \operatorname{div} \vec{V}(B), \quad B \in \Omega.$$

При  $\operatorname{diam} \Omega \rightarrow 0$  имеем  $B \rightarrow A \implies \operatorname{div} \vec{V}(B) \rightarrow \operatorname{div} \vec{V}(A)$ . □

### Свойства дивергенции

1. Дивергенция не зависит от выбора декартовой системы координат. Это вытекает из следствия 8.1.
2. Линейность:  $\operatorname{div}(c \vec{V} + k \vec{W}) = c \operatorname{div} \vec{V} + k \operatorname{div} \vec{W}$ .
3. Если  $\varphi(x, y, z)$  дифференцируема, то  $\operatorname{div}(\varphi \vec{V}) = \varphi \operatorname{div} \vec{V} + (\nabla \varphi, \vec{V})$ . Действительно,
 
$$\operatorname{div}(\varphi \vec{V}) = \frac{\partial \varphi P}{\partial x} + \frac{\partial \varphi Q}{\partial y} + \frac{\partial \varphi R}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} P + \frac{\partial \varphi}{\partial y} Q + \frac{\partial \varphi}{\partial z} R + \varphi \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right).$$

Рассмотрим пример применения формулы Остроградского–Гаусса.

**Пример 8.1.** Найдите поток векторного поля  $\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  наружу через поверхность полушара  $\Omega = \{x^2 + y^2 + z^2 < 1; z > 0\}$ . Сначала вычислим поток непосредственно. Поверхность  $\partial \Omega$  состоит из двух гладких поверхностей – круга и полусферы:

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &= \{x^2 + y^2 \leq 1; z = 0\}; & \text{вектор нормали } \vec{n}_0 &= -\vec{k}; \\ \Sigma_1 &= \{x^2 + y^2 < 1; z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}; & \text{вектор нормали } \vec{n}_1 &= \begin{bmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Поток  $\vec{V}$  через  $\Sigma_0$  равен 0, поскольку  $\vec{n}_0 \perp \vec{V}$  при  $z = 0$ . Поэтому

$$\oint_{\Sigma} (\vec{V}, \vec{n}) dS = \iint_{\Sigma_1} (\vec{V}, \vec{n}_1) dS = \iint_{\Sigma_1} 1 \, dS = S(\Sigma_1) = 2\pi.$$

По формуле Остроградского–Гаусса поток будет вычисляться так:

$$\oint_{\Sigma} (\vec{V}, \vec{n}) dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{V}(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_{\Omega} 3 \, dx dy dz = 3V(\Omega) = 3 \cdot \frac{2\pi}{3} = 2\pi.$$

## 9 Ротор и теорема Стокса

**Определение 9.1.** Пусть  $\vec{V}(x, y, z) = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix}$  – векторное поле;  $A = (x, y, z)$  – внутренняя точка его области определения. Если  $P$ ,  $Q$  и  $R$  дифференцируемы в  $A$ , то **ротором** поля  $\vec{V}$  в точке  $A$  называется вектор

$$\text{rot}\vec{V}(A) = \begin{bmatrix} R_y - Q_z \\ P_z - R_x \\ Q_x - P_y \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Этот странный „определитель” придуман лишь для удобства запоминания формулы ротора. При вычислении этого определителя элементы перемножаются сверху вниз.

**Пример 9.1.** Рассмотрим поле скоростей твёрдого тела, вращающегося вокруг  $Oz$  с угловой скоростью  $\omega$  :

$$\vec{V}(x, y, z) = \begin{bmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Его ротор равен

$$\text{rot}\vec{V}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\omega \end{bmatrix},$$

т.е. ротор параллелен оси вращения, его норма равна  $2\omega$ , и он направлен по правилу винта.

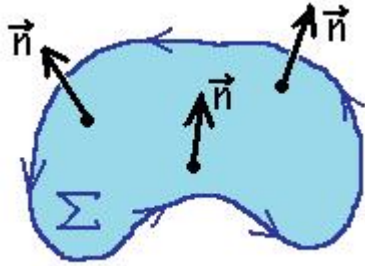
**Определение 9.2.** Пусть  $U \subset \mathbb{R}^2$  – ограниченная область,  $\partial U$  – замкнутая кусочно-гладкая кривая, ориентированная против часовой стрелки. Пусть отображение

$$\vec{r}(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix} : [U] \mapsto \mathbb{R}^3$$

инъективно и имеет непрерывные частные производные на  $[U]$ , причём матрица Якоби  $J_{\vec{r}}(u, v)$  имеет ранг 2 для всех  $(u, v) \in U$ . Тогда кривая  $\ell = \vec{r}(\partial U)$  называется **контуром** гладкой поверхности  $\Sigma = \vec{r}(U)$ .

Пусть на поверхности  $\Sigma$  задана такая ориентация, что вектора  $\partial\vec{r}/\partial u$ ,  $\partial\vec{r}/\partial v$  и  $\vec{n}(X)$  образуют в каждой точке  $X \in \Sigma$  правую тройку; на кривой  $\ell$  задана ориентация, полученная из ориентации  $\partial U$  при отображении  $\vec{r}$ . Тогда говорят, что ориентации  $\Sigma$  и  $\ell$  **согласованы**.

Правило согласования ориентаций поверхности и её контура называют „правилом винта”: если воткнуть винт в точку  $X \in \Sigma$  и крутить его в направлении обхода  $\ell$ , то он будет ввинчиваться в направлении  $\vec{n}(X)$ .



**Теорема 9.1. (Стокс).** Пусть  $\Sigma$  – простая гладкая поверхность с кусочно-гладким контуром  $\ell$ , их ориентации согласованы. Тогда для векторного поля  $\vec{V} = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix}$ , непрерывного на  $\Sigma \cup \ell$  и имеющего в каждой точке  $\Sigma$  непрерывные частные производные, верна формула

$$\oint_{\ell} P dx + Q dy + R dz = \iint_{\Sigma} (\text{rot} \vec{V}, \vec{n}) dS.$$

*Доказательство.* В силу линейности всех разновидностей интегралов, нам достаточно доказать следующие три формулы:

$$\oint_{\ell} P(x, y, z) dx = \iint_{\Sigma} \left( \left( \frac{\partial P}{\partial z} \vec{j} - \frac{\partial P}{\partial y} \vec{k} \right), \vec{n} \right) dS; \quad (44)$$

$$\oint_{\ell} Q(x, y, z) dy = \iint_{\Sigma} \left( \left( \frac{\partial Q}{\partial x} \vec{k} - \frac{\partial Q}{\partial z} \vec{i} \right), \vec{n} \right) dS;$$

$$\oint_{\ell} R(x, y, z) dz = \iint_{\Sigma} \left( \left( \frac{\partial R}{\partial y} \vec{i} - \frac{\partial R}{\partial x} \vec{j} \right), \vec{n} \right) dS.$$

Докажем формулу (44); две другие получаются аналогично. Пусть  $\Sigma = \vec{r}(U)$ ,  $\ell = \vec{r}(\partial U)$ , и пусть граница  $U$  параметризована против часовой стрелки:  $\partial U = \{(u(t); v(t)) : 0 \leq t \leq T\}$ . Тогда

$$\ell = \left\{ (x(u(t), v(t)); y(u(t), v(t)); z(u(t), v(t))) : 0 \leq t \leq T \right\}.$$

Вычислим левую часть (44):

$$\oint_{\ell} P(x, y, z) dx = \int_0^T P \left( \frac{\partial x}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial x}{\partial v} \dot{v} \right) dt = \oint_U P \frac{\partial x}{\partial u} du + P \frac{\partial x}{\partial v} dv =$$

по формуле Грина

$$= \iint_U \left( \frac{\partial}{\partial u} \left( P \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( P \frac{\partial x}{\partial u} \right) \right) dudv =$$

[предположим, что  $x$  дважды непрерывно дифференцируем по  $u$  и  $v$ ; его вторые частные производные сократятся]

$$\begin{aligned} &= \iint_U \left( \frac{\partial(P \circ \vec{r})}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial(P \circ \vec{r})}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) dudv = \\ &= \iint_U \left( \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) dudv \end{aligned}$$

(слагаемые с  $\partial P/\partial x$  сократились).

Теперь вычислим правую часть (44) по формуле (36):

$$\iint_{\Sigma} \left( \left( \frac{\partial P}{\partial z} \vec{j} - \frac{\partial P}{\partial y} \vec{k} \right), \vec{n} \right) dS = \iint_U \begin{vmatrix} 0 & \partial P/\partial z & -\partial P/\partial y \\ \partial x/\partial u & \partial y/\partial u & \partial z/\partial u \\ \partial x/\partial v & \partial y/\partial v & \partial z/\partial v \end{vmatrix} dudv = \text{то же самое.}$$

Таким образом, формула Стокса доказана для поверхности класса  $C^2$ , т.е. для случая, когда  $x$ ,  $y$  и  $z$  имеют непрерывные вторые частные производные по  $u$  и  $v$ . Но если они имеют лишь непрерывные первые производные (как оговорено в условии теоремы), т.е. поверхность класса  $C^1$ , то её можно приблизить поверхностью класса  $C^2$  так, что правая и левая части формулы Стокса будут приближены с любой точностью.  $\square$

**Следствие 9.1.** (Геометрический смысл ротора). Пусть  $U \subset \mathbb{R}^3$  – область; векторное поле  $\vec{V} : U \mapsto \mathbb{R}^3$  имеет в точке  $A \in U$  непрерывные частные производные. Тогда  $\text{rot} \vec{V}(A)$  – такой вектор, что для любого единичного вектора  $\vec{n}$

$$(\text{rot} \vec{V}(A), \vec{n}) = \lim_{\text{diam} \Sigma \rightarrow 0} \left( \frac{1}{S(\Sigma)} \oint_{\ell} Pdx + Qdy + Rdz \right),$$

где  $A \in \Sigma \subset U$ , плоская поверхность  $\Sigma$  имеет нормаль  $\vec{n}$  и кусочно-гладкий контур  $\ell$  согласованной с нею ориентации.

*Доказательство.* Применим теорему Стокса, а затем теорему о среднем:

$$\oint_{\ell} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Sigma} (\text{rot} \vec{V}, \vec{n}) dS = S(\Sigma) (\text{rot} \vec{V}(B), \vec{n}), \quad B \in \Sigma.$$

При  $\text{diam} \Sigma \rightarrow 0$  имеем  $B \rightarrow A \implies \text{rot} \vec{V}(B) \rightarrow \text{rot} \vec{V}(A)$ .  $\square$

### Свойства ротора

1. Ротор не зависит от выбора декартовой системы координат. Это вытекает из следствия (9.1).

2. Линейность:  $\text{rot}(c\vec{V} + k\vec{W}) = c\text{rot}\vec{V} + k\text{rot}\vec{W}$ .



3. Если  $\varphi(x, y, z)$  дифференцируема, то  $\text{rot}(\varphi \vec{V}) = \varphi \text{rot} \vec{V} + \nabla \varphi \times \vec{V}$ . Действительно,

$$\text{rot}(\varphi \vec{V}) = \begin{bmatrix} \partial(\varphi R)/\partial y - \partial(\varphi Q)/\partial z \\ \partial(\varphi P)/\partial z - \partial(\varphi R)/\partial x \\ \partial(\varphi Q)/\partial x - \partial(\varphi P)/\partial y \end{bmatrix} = \varphi \text{rot} \vec{V} + \begin{bmatrix} \partial\varphi/\partial y R - \partial\varphi/\partial z Q \\ \partial\varphi/\partial z P - \partial\varphi/\partial x R \\ \partial\varphi/\partial x Q - \partial\varphi/\partial y P \end{bmatrix}.$$

Важным следствием теоремы Стокса является теорема о достаточном условии потенциальности векторного поля в трёхмерном пространстве. Векторное поле, имеющее нулевой ротор в некоторой области пространства, называется **безвихревым** в этой области.

**Теорема 9.2.** Пусть область  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  **односвязна** (в пространстве это означает, что на любую замкнутую кусочно-гладкую кривую  $\ell \subset \Omega$ , не завязанную узлом,

можно натянуть гладкую поверхность  $\Sigma \subset \Omega$ ). Пусть  $\vec{V}(x, y, z) = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^3$

– векторное поле с непрерывными частными производными, и  $\text{rot} \vec{V} = 0$  на  $\Omega$ . Тогда  $\vec{V}$  является потенциальным на  $\Omega$ .

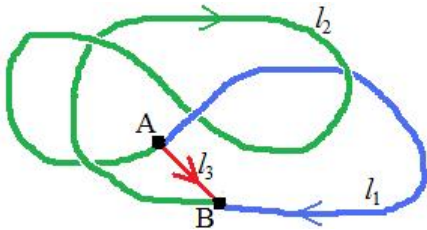
*Доказательство.* В силу теоремы 7.1 нам достаточно доказать, что циркуляция  $\vec{V}$  по любой замкнутой несамопересекающейся кусочно-гладкой кривой  $\ell \subset \Omega$  равна 0. Если  $\ell \subset \Omega$  не завязана узлом, то натянем на неё поверхность  $\Sigma \subset \Omega$ . Применим формулу Стокса:

$$\oint_{\ell} P dx + Q dy + R dz = \iint_{\Sigma} (\text{rot} \vec{V}, \vec{n}) dS = \iint_{\Sigma} (\vec{0}, \vec{n}) dS = 0.$$

Если замкнутая кривая  $\ell$  – узел, то можно разбить её на две кривые  $\ell_1$  (с началом  $A$  и концом  $B$ ) и  $\ell_2$  (с началом  $B$  и концом  $A$ ), затем добавить третью кривую  $\ell_3$  с началом  $A$  и концом  $B$ , такую, что кривые  $\ell_1 \cup \ell_3$  и  $\ell_2 \cup \ell_3$  не имеют самопересечений и не завязаны узлом. Тогда циркуляции по ним

$$\oint_{\ell_1 \cup \ell_3} = \int_{\ell_1} - \int_{\ell_3} = 0; \quad \oint_{\ell_2 \cup \ell_3} = \int_{\ell_2} + \int_{\ell_3} = 0 \implies \oint_{\ell} = \int_{\ell_1} + \int_{\ell_2} = 0.$$

□



Обратное утверждение – что потенциальное векторное поле с непрерывными частными производными является безвихревым ( $\text{rot} \nabla \Phi \equiv 0$ ) справедливо в *любой* области пространства и было доказано в прошлом семестре.

## 10 Теория поля (итоговая лекция)

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  – область. Символом  $C^k(\Omega)$  будем обозначать класс скалярных функций  $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ , имеющих на  $\Omega$  непрерывные частные производные до  $k$ -го порядка; символом  $VC^k(\Omega)$  – класс векторных полей  $\vec{V} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^3$ , имеющих на  $\Omega$  непрерывные частные производные до  $k$ -го порядка. Операции градиента, дивергенции и ротора действуют на этих классах следующим образом:

$$\begin{aligned} \nabla : C^k(\Omega) &\mapsto VC^{k-1}(\Omega) \quad \text{при каждом } k \in \mathbb{N}; \\ \operatorname{div} : VC^k(\Omega) &\mapsto C^{k-1}(\Omega) \quad \text{при каждом } k \in \mathbb{N}; \\ \operatorname{rot} : VC^k(\Omega) &\mapsto VC^{k-1}(\Omega) \quad \text{при каждом } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Рассмотрим особые разновидности векторных полей из класса  $VC^1(\Omega)$ .

**1. Векторное поле  $\vec{V}$  соленоидальное**, если  $\operatorname{div} \vec{V} = 0$  на  $\Omega$ . Такое поле не имеет источников и стоков; его поток через поверхность любого тела  $B \subset \Omega$  равен 0. Примеры из физики: магнитное поле; поле скоростей несжимаемой жидкости. Ротор любого векторного поля из класса  $VC^2(\Omega)$  является соленоидальным:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{V} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 0,$$

поскольку  $\partial^2 R / \partial x \partial y = \partial^2 R / \partial y \partial x$ ,  $\partial^2 Q / \partial x \partial z = \partial^2 Q / \partial z \partial x$ ,  $\partial^2 P / \partial z \partial y = \partial^2 P / \partial y \partial z$ .

**2. Векторное поле  $\vec{V}$  безвихревое**, если  $\operatorname{rot} \vec{V} = \vec{0}$  на  $\Omega$ . Оно имеет нулевую циркуляцию по всякой замкнутой кривой, на которую можно натянуть поверхность  $\Sigma \subset \Omega$ .

**3. Векторное поле  $\vec{V}$  потенциальное**, если существует функция  $\Phi \in C^2(\Omega)$ , такая, что  $\vec{V} = \nabla \Phi$  на  $\Omega$ . Оно имеет нулевую циркуляцию по всякой замкнутой кривой  $\ell \subset \Omega$ . Всякое потенциальное поле является безвихревым. Обратное утверждение верно лишь в том случае, если область  $\Omega$  односвязна. Примеры потенциальных полей из физики: гравитационное; электрическое (при отсутствии электродвижущей силы). Дивергенция гравитационного поля пропорциональна плотности масс (массы – стоки поля, источников нет); дивергенция электрического поля пропорциональна плотности заряда ( $\oplus$  – источники,  $\ominus$  – стоки).

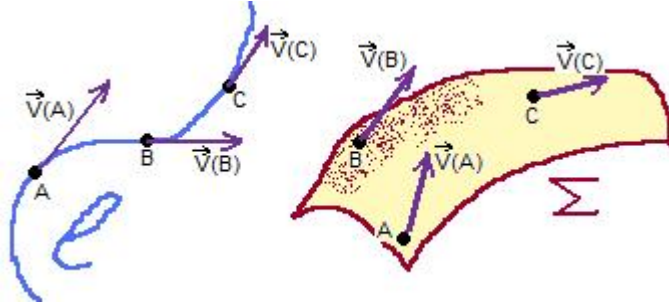
**4. Векторное поле  $\vec{V}$  гармоническое**, если оно потенциально и соленоидально, т.е. потенциал такого поля  $\Phi$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\operatorname{div} \nabla \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \equiv \Delta \Phi = 0;$$

такая функция  $\Phi$  тоже называется гармонической. Физические примеры: гравитационное и электрическое поля в вакууме.

## Векторные линии и векторные трубки

- Определение 10.1.** 1) Точка  $X \in \Omega$  **стационарна**, если  $\vec{V}(X) = \vec{0}$ .  
 2) Гладкая кривая  $\ell$  называется **векторной линией** для  $\vec{V} \in VC(\Omega)$  (непрерывного векторного поля в  $\Omega$ ), если в каждой точке  $X \in \ell$  имеем  $\vec{V}(X) \parallel T_X \ell$ .  
 3) Гладкая поверхность  $\Sigma$  называется **векторной трубкой** для поля  $\vec{V} \in VC(\Omega)$ , если в каждой точке  $X \in \Sigma$  имеем  $\vec{V}(X) \parallel T_X \Sigma$ .



Векторная линия является фазовой кривой для автономной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} dx/dt = P(x, y, z) \\ dy/dt = Q(x, y, z) \\ dz/dt = R(x, y, z), \end{cases} \quad \text{или} \quad \frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}. \quad (45)$$

Из теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши следует, что в случае  $\vec{V} \in VC^1(\Omega)$  через каждую нестационарную точку проходит ровно одна векторная линия.

Если непрерывное векторное поле потенциально (т.е.  $\vec{V} = \nabla\Phi$  для некоторой функции  $\Phi \in C^1(\Omega)$ ), то в окрестности нестационарной точки  $X_0$  поверхность уровня потенциала  $\mathcal{E} = \{X \in \Omega : \Phi(X) = \Phi(X_0)\}$  является гладкой, и вектор  $\nabla\Phi(X_0)$  перпендикулярен касательной плоскости  $T_{X_0}\mathcal{E}$ , следовательно, и векторная линия в точке  $X_0$  перпендикулярна поверхности  $\mathcal{E}$ .

**Пример 10.1.** Рассмотрим векторное поле  $\vec{V}$ , имеющее потенциал  $\Phi(x, y, z) = \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$  в области  $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ . Имеем

$$\vec{V}(x, y, z) = \nabla\Phi = \frac{2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \begin{bmatrix} -xz \\ -yz \\ x^2 + y^2 \end{bmatrix}.$$

Стационарные точки данного поля – это все точки оси  $Oz$  и плоскости  $Oxy$ , кроме, разумеется, точки  $O$ . Поверхности уровня  $\{\Phi = C\}$  представляют собою конусы (при  $0 < C < 1$ ), ось  $Oz \setminus \{O\}$  (при  $C = 1$ ), или плоскость  $Oxy \setminus \{O\}$  (при  $C = 0$ ). Решим систему (45):

$$\frac{dx}{-xz} = \frac{dy}{-yz} = \frac{dz}{x^2 + y^2}$$

Поскольку  $z \neq 0$  в нестационарных точках, домножаем на  $(-z)$  и получаем

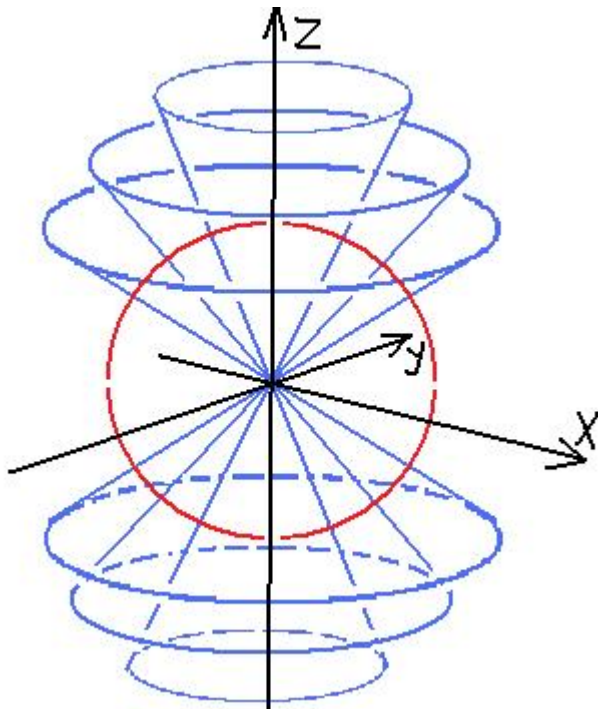
$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \implies x = Cy \text{ или } y = Cx.$$

Можно ввести новую переменную  $t > 0$ :  $x = t \cos \alpha$ ,  $y = t \sin \alpha$ , где  $\alpha$  – константа. Тогда

$$\frac{dt}{t} = -\frac{zdz}{t^2} \implies t dt = -z dz \implies t^2 = C^2 - z^2.$$

Итак, получены параметрические уравнения векторных линий:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt{C^2 - z^2} \cos \alpha \\ y = \sqrt{C^2 - z^2} \sin \alpha \end{array} ; 0 < z < C \text{ или } -C < z < 0 \right\}, \quad (46)$$



т.е. это четверти окружностей с центром  $O$  и диаметром на оси  $Oz$ . В точках с  $z = 0$  векторные линии прерываются, поскольку эти точки – стационарные. Нетрудно проверить, что через каждую нестационарную точку проходит кривая из семейства (46), следовательно, других векторных линий, кроме (46), быть не может. Очевидно, эти линии перпендикулярны всем конусам – поверхностям уровня  $\Phi$ .

Векторными трубками для  $\vec{V}$  являются, например, все верхние и нижние полусферы с центром  $O$  и все четверти плоскости, один из краёв которых – половина оси  $Oz$ , а другой лежит в плоскости  $Oxy$ .

**Пример 10.2.** 1) Для поля  $\vec{V}(x, y, z) = P(x, y, z) \vec{i}$  векторными трубками являются все цилиндры с образующими, параллельными оси  $Ox$ .

2) Для поля  $\vec{V}(x, y, z) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$  векторные трубки – все конусы с вершиной  $O$ .

Как вообще могут выглядеть векторные трубки для поля  $\vec{V}$ , становится ясно из следующей леммы.

**Лемма 10.1.** Пусть  $\vec{V} \in VC^1(\Omega)$ ; пусть  $\Sigma \subset \Omega$  – векторная трубка для  $\vec{V}$ ,  $X \in \Sigma$ . Если  $\ell \ni X$  – векторная линия для  $\vec{V}$ , то  $\ell$  проходит по  $\Sigma$ , пока не дойдёт до её края.

*Доказательство.* Достаточно доказать, что найдётся окрестность  $U_\varepsilon(X)$ , в которой  $\ell \cap U_\varepsilon(X) \subset \Sigma \cap U_\varepsilon(X)$ . Пусть, например,  $N_X$  не перпендикулярна оси  $Oz$ . Тогда при некотором  $\varepsilon > 0$  поверхность  $\Sigma \cap U_\varepsilon(X)$  имеет вид  $\{z = h(x, y) : (x, y) \in D\}$ ;  $X = (x_o, y_o, h(x_o, y_o))$ . В каждой точке  $Y = (x, y, h(x, y)) \in \Sigma \cap U_\varepsilon(X)$  касательная плоскость имеет вид

$$T_Y \Sigma = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial h / \partial x \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial h / \partial y \end{bmatrix} \right\} \implies \vec{V}(Y) = \begin{bmatrix} p(x, y) \\ q(x, y) \\ p \partial h / \partial x + q \partial h / \partial y \end{bmatrix},$$

причём функции  $p(x, y) = P(x, y, h(x, y))$ ,  $q(x, y) = Q(x, y, h(x, y))$  принадлежат классу  $C^1(D) \implies \exists!$  решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = p(x, y); & \dot{y} = q(x, y) \\ x(0) = x_o; & y(0) = y_o. \end{cases}$$

Тогда кривая  $(x(t); y(t); h(x(t), y(t)))$  совпадает с кривой  $\ell \cap U_\varepsilon(X)$  и в то же время лежит в  $\Sigma$ .  $\square$

Если  $\Sigma$  – векторная трубка для поля  $\vec{V}$ , то поток  $\vec{V}$  через  $\Sigma$  равен 0. Это следует из того, что если  $\vec{V}(X) \parallel T_X \Sigma$ , то  $\vec{V}(X) \perp \vec{n}(X)$ :

$$\iint_{\Sigma} (\vec{V}(X), \vec{n}(X)) dS = \iint_{\Sigma} 0 dS = 0.$$

**Следствие 10.1.** Пусть  $\Omega$  – область в  $\mathbb{R}^3$ , поверхность которой имеет вид  $\partial\Omega = [\Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2]$ , где  $\Sigma_i \cap \Sigma_j = \emptyset$ , нормали направлены наружу  $\Omega$ . Пусть векторное поле  $\vec{V}$  соленоидально, и  $\Sigma_0$  – векторная трубка. Тогда

$$\iint_{\Sigma_1} (\vec{V}, \vec{n}) dS = - \iint_{\Sigma_2} (\vec{V}, \vec{n}) dS$$

(сколько втекает через  $\Sigma_1$ , столько же вытекает через  $\Sigma_2$ ).

## 11 Несобственные кратные интегралы

Кратный интеграл Римана определён лишь для *ограниченных* функций на *ограниченных* множествах. Несобственные интегралы позволяют расширить его определение на неограниченные множества и неограниченные функции. Но, в отличие от одномерного случая, здесь не будет делаться различий между несобственными интегралами I и II рода. Обе разновидности несобственных интегралов и их „гибриды” описываются единообразно благодаря понятию **исчерпывания** множества.

**Определение 11.1.** Пусть на произвольном множестве  $U \subset \mathbb{R}^n$  задана скалярная функция  $f$ . Исчерпыванием  $U$  называется последовательность измеримых множеств  $K_j$ , таких, что  $f$  интегрируема на  $K_j$ ,  $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \dots$  и  $\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j = U$ .

**Определение 11.2.** Пусть скалярная функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  определена на множестве  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Говорят, что несобственный интеграл

$$\int \cdots \int_U f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (47)$$

**сходится**, если для всякого исчерпывания  $\{K_j\}$  множества  $U$  существует конечный предел

$$I = \lim_{j \rightarrow \infty} \int \cdots \int_{K_j} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

не зависящий от выбора исчерпывания. Тогда несобственный интеграл равен этому пределу.

**Определение 11.3.** Говорят, что несобственный интеграл (47) **абсолютно сходится**, если для некоторого исчерпывания  $\{K_j\}$  множества  $U$  существует конечный предел

$$I_{abs} = \lim_{j \rightarrow \infty} \int \cdots \int_{K_j} |f(x_1, \dots, x_n)| dx_1 \dots dx_n.$$

**Теорема 11.1.** 1) Если несобственный интеграл (47) абсолютно сходится, то он сходится, причём  $|I| \leq I_{abs}$ .

2) Если несобственный интеграл сходится, то он абсолютно сходится.

Таким образом, для несобственных кратных интегралов условная сходимости невозможна.

*Доказательство.* 1) Пусть (47) абсолютно сходится, т.е.  $I_{abs} < +\infty$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0$   $\exists N : \forall j \geq N$

$$I_{abs} - \frac{\varepsilon}{3} < \int \cdots \int_{K_j} |f(x_1, \dots, x_n)| dx_1 \dots dx_n \leq I_{abs}.$$

Кроме того, поскольку при  $k > j \rightarrow \infty$

$$\left| \int_{K_k \setminus K_j} \cdots \int f \, dx_1 \dots dx_n \right| \leq \int_{K_k \setminus K_j} \cdots \int |f| \, dx_1 \dots dx_n \rightarrow 0,$$

то по критерию Коши существует конечный предел

$$I = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{K_j} \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

причём  $|I| \leq I_{abs}$ . Пусть  $\{Q_i\}$  – другое исчерпывание  $U$ . Поскольку множества  $Q_i \cap K_N$  исчерпывают  $K_N$ , можно выбрать такое  $M$ , что  $\forall i > M \quad V(K_N \setminus Q_i) < \frac{\varepsilon}{3 \sup_{K_N} |f|}$ .

Тогда при  $\forall i > M$  получаем:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{Q_i} \cdots \int f \, dx_1 \dots dx_n - I \right| \leq \\ & \leq \left| \int_{K_N} \cdots \int f \, dx_1 \dots dx_n - I \right| + \int_{K_N \setminus Q_i} \cdots \int |f| \, dx_1 \dots dx_n + \int_{Q_i \setminus K_N} \cdots \int |f| \, dx_1 \dots dx_n \\ & < \frac{\varepsilon}{3} + V(K_N \setminus Q_i) \sup_{K_N} |f| + \sup_{j=N+1}^{\infty} \int_{Q_i \cap K_j \setminus K_N} \cdots \int |f| \, dx_1 \dots dx_n < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

2) Пусть нет абсолютной сходимости, т.е.  $I_{abs} = +\infty$ . Обозначим  $U_+ = \{X \in U : f(X) \geq 0\}$ ,  $U_- = \{X \in U : f(X) < 0\}$ . Интегралы  $|f|$  по подмножествам  $U_+$  (или  $U_-$ ) неограничены. Возьмём такое исчерпывание  $\{Q_k\}$ , что

$$\int_{Q_k \cap U_+} \cdots \int f \, dx_1 \dots dx_n > 2k; \quad \int_{Q_k \cap U_-} \cdots \int |f| \, dx_1 \dots dx_n < k.$$

Тогда интегралы  $f$  по  $Q_k$  стремятся к  $+\infty$ . □

**Пример 11.1.** Вычислить несобственный интеграл  $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \, dx \, dy$ .

Для плоскости  $\mathbb{R}^2$  возьмём исчерпывание кругами  $K_j = \{x^2 + y^2 \leq j^2\}$ . Вычислим через полярные координаты:

$$\iint_{K_j} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \, dx \, dy = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^j e^{-\frac{1}{2}\rho^2} \rho \, d\rho = \int_{-\pi}^{\pi} \left( -e^{-\frac{1}{2}\rho^2} \Big|_{\rho=0}^{\rho=j} \right) d\varphi = 2\pi \left( -e^{-\frac{1}{2}j^2} + 1 \right) \rightarrow 2\pi$$

при  $j \rightarrow \infty$ . Поскольку  $|f| \equiv f$ , мы убедились, что интеграл сходится абсолютно, и вычислили его. Теперь возьмём другое исчерпывание  $\mathbb{R}^2$  – квадратами  $Q_i = [-i; i]^2$ .

$$\iint_{Q_i} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \, dx \, dy = \int_{-i}^i dx \, e^{-\frac{1}{2}x^2} \int_{-i}^i e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \int_{-i}^i e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \int_{-i}^i e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \xrightarrow{i \rightarrow \infty}$$

$$\xrightarrow{i \rightarrow \infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \right)^2 = 2\pi \quad (\text{ответ уже известен}).$$

Таким образом, мы вычислили неберущийся **интеграл Пуассона**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi}.$$

**Признак сравнения.** Пусть  $g(x_1, \dots, x_n) \geq |f(x_1, \dots, x_n)|$  на  $U$ . Если несобственный интеграл  $\int \cdots \int_U g dx_1 \dots dx_n$  сходится, то сходится и интеграл от  $f$ .

*Доказательство.* Пусть  $\{K_j\}$  – исчерпывание  $U$ . Тогда

$$\int_{K_k \setminus K_j} \cdots \int |f| dx_1 \dots dx_n \leq \int_{K_k \setminus K_j} \cdots \int g dx_1 \dots dx_n \rightarrow 0 \quad \text{при } k > j \rightarrow \infty,$$

и по критерию Коши интеграл  $\int \cdots \int_U f dx_1 \dots dx_n$  абсолютно сходится.  $\square$

**Пример 11.2.** Вычислить несобственный интеграл

$$\iint_{\{0 < x^2 + y^2 \leq 1\}} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Возьмём исчерпывание кольцами  $K_j = \{j^{-2} \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Вычислим через полярные координаты:

$$\iint_{K_j} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{1/j}^1 \frac{1}{\rho} \rho d\rho = 2\pi \left(1 - \frac{1}{j}\right) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 2\pi.$$

Поскольку  $|f| \equiv f$ , доказано, что интеграл сходится абсолютно, и вычислено его значение.

**Пример 11.3.** Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\iint_{\{0 < x^2 + y^2 \leq 1\}} \frac{xy}{(x^2 + 2y^2)^{3/2}} dx dy.$$

Из оценки

$$\left| \frac{xy}{(x^2 + 2y^2)^{3/2}} \right| \leq \frac{|xy|}{x^2 + y^2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

и сходимости интеграла в примере 11.2 по признаку сравнения следует сходимость данного интеграла. В силу симметрии он  $= 0$ .

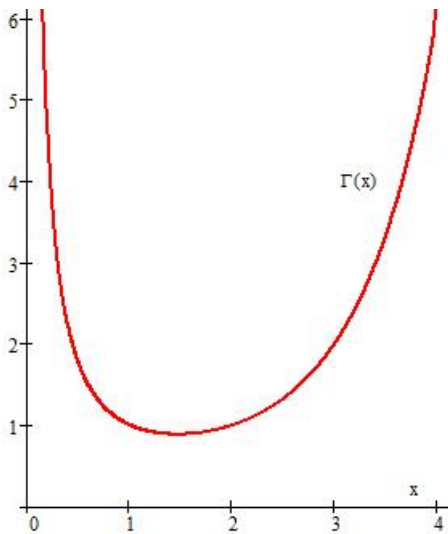


## 12 Гамма-функция и бета-функция (дополнительная лекция)

На прошлой лекции был вычислен интеграл Пуассона  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$ , имеющий большое значение для теории вероятностей. Гамма и бета-функции Эйлера также будут весьма полезны в этой науке.

**Определение 12.1.** Гамма-функция Эйлера задаётся несобственным интегралом

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0.$$



Нетрудно вычислить  $\Gamma(1) = 1$ . Более хитрый результат:  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ . Действительно,

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \left[ \begin{array}{l} u = \sqrt{2t} \\ du = \sqrt{2} dt / \sqrt{t} \end{array} \right] = \sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \sqrt{\pi}.$$

Для гамма-функции выполнено рекуррентное соотношение  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ , которое получается интегрированием по частям:  $\Gamma(x+1) =$

$$= \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = - \int_0^{+\infty} t^x de^{-t} = \underbrace{-t^x e^{-t} \Big|_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} e^{-t} d(t^x) = x \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = x\Gamma(x).$$

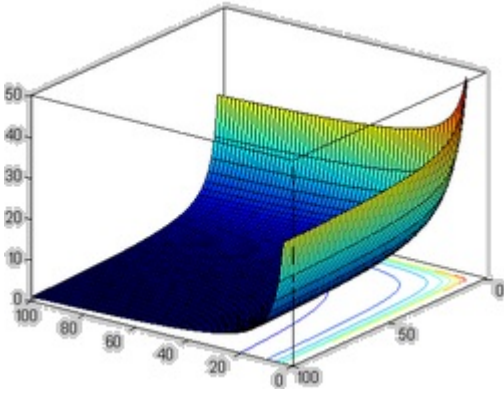
Зная  $\Gamma(1) = 1$ , мы получаем по индукции  $\Gamma(n+1) = n!$  при  $n = 0, 1, 2, \dots$ ; из  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$  получаем  $\Gamma(3/2) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ ,  $\Gamma(5/2) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$  и т. д.

**Определение 12.2.** Бета-функция двух переменных задаётся (несобственным) интегралом

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt, \quad x, y > 0.$$

Бета-функцию можно выразить и через интеграл от тригонометрических функций, сделав подстановку  $t = \sin^2 \varphi$ ,  $dt = 2 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi$ :

$$B(x, y) = \int_0^{\pi/2} \sin^{2x-2} \varphi \cos^{2y-2} \varphi \cdot 2 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1} \varphi \cos^{2y-1} \varphi d\varphi.$$



Бета-функция выражается через гамма-функции:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad x, y > 0.$$

*Доказательство.* Выразим гамма-функции, сделав замены  $x = u^2$ ,  $dx = 2udu$ ;  $y = v^2$ ,  $dy = 2v dv$ :

$$\Gamma(x) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} u^{2x-1} du, \quad \Gamma(y) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-v^2} v^{2y-1} dv;$$

перемножив эти интегралы, перейдём к полярным координатам на  $Q = \{u, v > 0\}$ :

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= 4 \iint_Q e^{-u^2-v^2} u^{2x-1} v^{2y-1} dudv = \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1} \varphi \sin^{2y-1} \varphi d\varphi \int_0^{+\infty} 2e^{-\rho^2} \rho^{2x-1+2y} d\rho = B(x, y)\Gamma(x+y). \end{aligned}$$

□

При целых неотрицательных  $k, m$  получаем соотношение

$$\int_0^1 t^k(1-t)^m dt = B(k+1, m+1) = \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(m+1)}{\Gamma(k+m+2)} = \frac{k! \cdot m!}{(k+m+1)!} = \frac{1}{(k+m+1)C_{k+m}^k}.$$