

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И РЯДЫ (ФН2 и ФН4, 3 семестр)

Вопросы для подготовки к контролю по модулям и к экзамену

Модуль 1. Ряды

1. Числовые ряды. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Необходимый признак сходимости. Критерий Коши сходимости числового ряда.
2. Простейшие свойства сходящихся рядов (почленное сложение рядов, умножение ряда на число, отбрасывание конечного числа членов ряда).
3. Знакоположительные ряды. Признаки сравнения.
4. Признак Даламбера. Радикальный признак Коши.
5. Интегральный признак Коши. Исследование на сходимость ряда Дирихле.
6. Абсолютная и условная сходимости рядов. Теорема о сходимости абсолютно сходящегося знакопеременного числового ряда.
7. Ряды, сходящиеся абсолютно и условно, их свойства. Теоремы о перестановке абсолютно и условно сходящихся рядов (без док-ва).
8. Знакопередающиеся ряды. Признак Лейбница. Оценка суммы и остатка ряда.
9. Признаки сходимости Дирихле и Абеля (без док-ва).
10. Функциональные ряды. Поточечная сходимость рядов. Область сходимости функционального ряда.
11. Равномерная сходимость. Геометрическая интерпретация. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.
13. Свойства равномерно сходящихся рядов. Теорема о предельном переходе для функционального ряда. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда.
14. Теорема о почленном интегрировании и функционального ряда.
15. Теорема о почленном дифференцировании функционального ряда.
16. Степенные ряды. Теорема Абеля.
17. Теорема о радиусе сходимости степенного ряда. Интервал и область сходимости
18. Свойства степенных рядов: непрерывность суммы, почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов.
19. Теорема о равенстве радиусов сходимости степенного ряда и рядов, полученных путём его почленного интегрирования и дифференцирования.
20. Ряды Тейлора и Маклорена. Аналитические функции. Теорема о том, что степенной ряд является рядом Тейлора для своей суммы.
21. Критерий разложения бесконечно дифференцируемой функции в ряд Тейлора.
22. Разложение в ряд Маклорена функций: e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^a$.
23. Бесконечномерные евклидовы пространства и ортонормированные системы
24. Ряды Фурье. Минимальное свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя.
25. Замкнутость и полнота ОНС. Равенство Парсеваля.
26. Евклидово пространство кусочно-непрерывных функций. Тригонометрическая система и её ортонормированность. Ряды Фурье по тригонометрической системе. Формулы для вычисления коэффициентов Фурье.
27. Замкнутость тригонометрической системы. Равенство Парсеваля.
28. Достаточные признаки поточечной сходимости рядов Фурье по тригонометрической системе (признак Дини, признак Дирихле) без док-ва.
29. Связь порядка малости коэффициентов Фурье со свойствами функций, разлагаемых в ряд Фурье по тригонометрической системе. Разложение в ряд Фурье чётных и нечётных функций. Разложение функций в ряды по косинусам и синусам.

Модуль 2. Кратные и криволинейные интегралы и теория поля

1. Определение двойного и тройного интегралов. Геометрический и физический смысл двойного и тройного интегралов. Теоремы о необходимых и достаточных условиях существования. Свойства кратных интегралов.
2. Вычисление двойного и тройного интегралов в декартовой системе координат путём сведения к повторным (с формулировкой соответствующей теоремы).
3. Теорема о замене переменных в двойном интеграле (без доказательства). Вычисление двойного интеграла в полярных координатах.
4. Вычисление площадей плоских фигур и объёмов тел с помощью двойного интеграла.
5. Площадь криволинейной поверхности и её вычисление с помощью двойного интеграла.
6. Замена переменных в тройном интеграле (без доказательства). Вычисление тройного интеграла в цилиндрических и сферических координатах.
8. Определение и свойства криволинейного интеграла 1-го рода, его геометрический и физический смысл. Вывод формулы для вычисления криволинейного интеграла 1-го рода.
9. Определение и свойства криволинейного интеграла 2-го рода, его физический смысл. Вывод формулы для вычисления криволинейного интеграла 2-го рода.
10. Формула Грина для односвязных и многосвязных областей.
11. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.
12. Интегрирование полных дифференциалов. Формула Ньютона—Лейбница для криволинейного интеграла от полного дифференциала. Нахождение функции по её полному дифференциалу с помощью криволинейного интеграла.
13. Поверхностный интеграл 1-го рода: определение, свойства, физический смысл и применение. Вывод формулы для вычисления поверхностного интеграла 1-го рода
14. Односторонние и двусторонние поверхности. Поверхностный интеграл 2-го рода: определение, свойства, физический смысл.
15. Вычисление поверхностного интеграла 2-го рода путём сведения к двойным интегралам.
16. Поток векторного поля. Формула Остроградского—Гаусса.
17. Дивергенция векторного поля и её физический смысл. Инвариантность дивергенции относительно выбора системы координат.
18. Циркуляция векторного поля. Формула Стокса (без доказательства).
19. Ротор векторного поля и его физический смысл. Инвариантность ротора относительно выбора системы координат.
20. Потенциальное векторное поле и его свойства.
21. Соленоидальное векторное поле и его свойства.
22. Гармоническое (лапласово) векторное поле и его свойства.
22. Определение несобственных кратных интегралов. Вычисление интеграла Пуассона.