

Московский государственный технический университет
им. Н.Э.Баумана

О.В.Пугачёв, Г.П.Стась, А.В.Чередниченко

**КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ И ИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ
ПРИЛОЖЕНИЯ**

Методические указания к домашнему заданию

Утверждено редсоветом МГТУ
в качестве учебного пособия

Издательство МГТУ им. Н.Э.Баумана

2003

КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Определение 1. Однородный многочлен второй степени от n переменных x_1, x_2, \dots, x_n с действительными коэффициентами

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}x_i x_j \quad (1)$$

называют квадратичной формой.

Если (x_1, x_2, \dots, x_n) назвать координатами вектора \vec{x} в некотором базисе и из коэффициентов квадратичной формы a_{ij} составить матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

то квадратичную форму можно записать в матричном виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = \vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x}, \quad \text{где } \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T. \quad (2)$$

Симметрическую матрицу A порядка n называют матрицей квадратичной формы (1).

Ранг матрицы A называют рангом квадратичной формы. Если $\text{Rang } A = n$, то квадратичную форму называют невырожденной, а если $\text{Rang } A < n$, то её называют вырожденной.

В случае $n = 2$ (плоскость), имея $a_{12} = a_{21}$, получим

$$f(x_1, x_2) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2.$$

В случае $n = 3$ (трёхмерное пространство), имея $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{23} = a_{32}$, получим

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \\ &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3. \end{aligned}$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ

Пусть квадратичная форма $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \vec{x}_e^T \cdot A \cdot \vec{x}_e$ определяет функцию $f(\vec{x})$, заданную через координаты вектора $\vec{x}_e = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ в некотором базисе $\{e\} = \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$. Найдём представление функции $f(\vec{x})$ в некотором другом базисе $\{e'\} = \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n$. Если P — матрица перехода от базиса $\{e\}$ к базису $\{e'\}$, тогда $\vec{x}_e = P \cdot \vec{x}_{e'}$, и функция $f(\vec{x})$ в новом базисе будет выражаться через новые координаты вектора \vec{x} следующим образом:

$$\vec{x}_e^T \cdot A \cdot \vec{x}_e = (P \cdot \vec{x}_{e'})^T \cdot A \cdot (P \cdot \vec{x}_{e'}) = \vec{x}_{e'}^T (P^T \cdot A \cdot P) \vec{x}_{e'}.$$

Здесь $P^T \cdot A \cdot P = A'$ — матрица квадратичной формы в новом базисе e' . Итак,

$$f(\vec{x}) = \vec{x}_e^T \cdot A \cdot \vec{x}_e = \vec{x}_{e'}^T \cdot A' \cdot \vec{x}_{e'} \quad (3)$$

Определение 2. Квадратичная форма имеет канонический вид, если она содержит только квадраты переменных x_1, \dots, x_n :

$$f(\vec{x}) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \dots + \alpha_n x_n^2, \quad (4)$$

т. е. если её матрица

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

диагональна.

Если в каноническом виде (4) коэффициенты α_i равны ± 1 или 0, то говорят, что квадратичная форма приведена к нормальному каноническому виду.

Пусть старый базис $\{e\}$ и новый базис $\{e'\}$ ортонормированные, тогда матрица перехода от $\{e\}$ к $\{e'\}$ является ортогональной, и преобразование с этой матрицей будет ортогональным. Любую квадратичную форму ортогональным преобразованием можно привести к каноническому виду.

Итак, требуется ортогональным преобразованием привести квадратичную форму $f(\vec{x}) = \vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x}$ к каноническому виду и указать матрицу этого ортогонального преобразования. Для этого необходимо:

1. Найти собственные значения матрицы A .
2. Для каждого собственного значения найти соответствующий собственный вектор. Все собственные векторы должны быть попарно ортогональными, а их количество должно быть равно количеству собственных значений, учитывая их кратность.
3. Выписать матрицу P , столбцами которой являются координаты этих собственных векторов. Так как система собственных векторов ортонормирована (ортонормированный базис), то матрица P будет ортогональной.

Рассмотрим эти пункты подробнее.

1. Находим собственные значения матрицы A . Для этого составляем её характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ и ищем его корни. Поскольку матрица A симметрична, то все её n (с учётом кратности) собственных значений — действительные числа. Запишем их в диагональную матрицу:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Таким образом, канонический вид квадратичной формы:

$$f(\vec{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2, \quad \text{где } \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T.$$

2. Находим собственные векторы, отвечающие собственным значениям λ_i , из однородного уравнения $(A - \lambda_i E)\vec{x} = 0$. Различным собственным значениям $\lambda_i \neq \lambda_j$ соответствуют ортогональные собственные векторы $\vec{v}_i \perp \vec{v}_j$. При кратных значениях $\lambda_k = \dots = \lambda_m$ из множества собственных векторов строим систему попарно ортогональных собственных векторов $\vec{v}_k, \dots, \vec{v}_m$ (например, применив процедуру ортогонализации Грама–Шмидта).

3. Полученную систему попарно ортогональных собственных векторов нормируем, положив

$$\vec{e}_1^T = \frac{1}{|\vec{v}_1|} \vec{v}_1; \quad \vec{e}_2^T = \frac{1}{|\vec{v}_2|} \vec{v}_2; \quad \dots \quad \vec{e}_n^T = \frac{1}{|\vec{v}_n|} \vec{v}_n.$$

Составляем из столбцов–векторов ортонормированного базиса $\vec{e}_1^T, \vec{e}_2^T, \dots, \vec{e}_n^T$ матрицу ортогонального преобразования P , которой соответствует линейная замена переменных $\vec{x} = P \cdot \vec{y}$.

Пример 1. Привести квадратичную форму $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$ к каноническому виду. Указать матрицу ортогонального преобразования.

Решение. Квадратичная форма имеет вид

$$f(x_1, x_2) = (x_1, x_2) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \text{где } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Составляем характеристическое уравнение

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$. Запишем

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Канонический вид квадратичной формы: $f(y_1, y_2) = 2y_1^2 + 4y_2^2$.

2. Найдём собственные векторы, отвечающие собственным значениям $\lambda_1 =$

2, $\lambda_2 = 4$, из однородных уравнений $(A - \lambda_i E)\vec{v}_i = 0$.

$$\text{Для } \lambda_1 = 2 \text{ имеем } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \implies$$

$x_1 = -x_2 \implies \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_1 = 2$.

$$\text{Для } \lambda_2 = 4 \text{ имеем } \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \implies$$

$x_1 = x_2 \implies \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_2 = 4$.

Длины найденных векторов равны $|\vec{v}_1| = \sqrt{2}$, $|\vec{v}_2| = \sqrt{2}$.

3. Убедившись, что $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$, нормируем эту систему векторов, положив

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Составим матрицу ортогонального преобразования из столбцов-векторов ортонормированного базиса \vec{e}_1, \vec{e}_2 :

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Базис \vec{e}_1, \vec{e}_2 – ортонормированный; поскольку $\det P = +1$, базис правильно ориентирован (правая пара).

Пример 2. Привести квадратичную форму $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$ к каноническому виду. Указать матрицу ортогонального преобразования.

Решение. Квадратичная форма имеет вид

$$f(\vec{x}) = (x_1, x_2, x_3) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \text{где } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Составляем характеристическое уравнение

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2 - \lambda & -2 \\ 0 & -2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0$$

Это уравнение третьей степени, и так как его коэффициенты – целые числа, то целое число может быть его корнем лишь в случае, если оно делитель свободного члена, поэтому ищем корни среди чисел $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$. Подстановкой убеждаемся, что $\lambda_1 = -1$. Многочлен должен без остатка делиться на $\lambda - \lambda_1 = \lambda + 1$. Делим:

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 3\lambda - 10 = (-\lambda^3 - \lambda^2) + (7\lambda^2 + 7\lambda) + (-10\lambda - 10) =$$

$$= -\lambda^2(\lambda + 1) + 7\lambda(\lambda + 1) - 10(\lambda + 1) = (-\lambda^2 + 7\lambda - 10)(\lambda + 1),$$

откуда $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 5$. Запишем

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Канонический вид квадратичной формы $f(y_1, y_2, y_3) = -y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2$.

2. Найдём собственные векторы, отвечающие собственным значениям $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 5$, из однородных уравнений $(A - \lambda_i E) \vec{v}_i = 0$.

Для $\lambda_1 = -1$ имеем

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Это однородная система трёх уравнений с тремя неизвестными, её определитель $\det(A - \lambda_1 E) = 0$, поэтому ранг матрицы системы меньше 3. Так как

базисный минор $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, ранг равен 2. Оставляем первые два уравнения

и получаем одно фундаментальное решение $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2$. Таким образом, собственному значению $\lambda_1 = -1$ отвечает собственный вектор

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Для $\lambda_2 = 2$ имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_3 = 0 \\ -2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Это однородная система трёх уравнений с тремя неизвестными, её определитель $\det(A - \lambda_2 E) = 0$, поэтому ранг матрицы системы меньше 3. Так как

базисный минор $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, ранг равен 2. Оставляем первые два уравнения

и получаем одно фундаментальное решение $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$. Таким образом, собственному значению $\lambda_2 = 2$ отвечает собственный вектор

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Для $\lambda_3 = 5$ аналогично получаем собственный вектор $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Длины полученных векторов равны $|\vec{v}_1| = 3$; $|\vec{v}_2| = 3$; $|\vec{v}_3| = 3$.

3. Так как собственные значения $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 5$ различны,

то отвечающие им собственные векторы $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ попарно ортогональны. Нормируем эту систему векторов, положив

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Составим из столбцов-векторов ортонормированного базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ матрицу ортогонального преобразования

$$P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

которой соответствует линейная замена переменных $\vec{x} = P \cdot \vec{y}$. Базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — ортонормированный, и $\det P = +1$ — базис правильно ориентирован (правая тройка).

Пример 3. Привести квадратичную форму $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$ к каноническому виду. Указать матрицу ортогонального преобразования.

Решение. Квадратичная форма имеет вид

$$f(\vec{x}) = (x_1, x_2, x_3) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \text{где } A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Составляем характеристическое уравнение

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 4 & -2 \\ 4 & 4 - \lambda & -2 \\ -2 & -2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 9\lambda^2 = 0 \implies \lambda_1 = 9; \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

$$\text{Запишем } \Lambda = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Канонический вид квадратичной формы $f(y_1, y_2, y_3) = 9y_1^2$.

2. Найдём собственные векторы, отвечающие собственным значениям $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, из однородных уравнений $(A - \lambda_i E) \vec{v}_i = 0$.

Для $\lambda_1 = 9$ имеем

$$\begin{pmatrix} -5 & 4 & -2 \\ 4 & -5 & -2 \\ -2 & -2 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -5x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 - 8x_3 = 0 \end{cases}$$

Это однородная система трёх уравнений с тремя неизвестными, её определитель $\det(A - \lambda_1 E) = 0$, поэтому ранг матрицы системы меньше 3. Так как

базисный минор $\begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \neq 0$, ранг равен 2. Оставляем первые два уравнения и получаем одно фундаментальное решение $x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = -1$. Таким образом, собственному значению $\lambda_1 = 9$ отвечает собственный вектор $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Для $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ имеем

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Ранг матрицы этой системы равен 1. Оставив одно третье уравнение, имеем

$x_3 = 2x_1 + 2x_2$, и общее решение этой системы $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$. Убедимся,

что при любых x_1, x_2 , не равных нулю одновременно, этот вектор ортогонален вектору \vec{v}_1 . Действительно, $\vec{v}_1 \cdot \vec{x} = 2x_1 + 2x_2 - (2x_1 + 2x_2) = 0$. Из множества

собственных векторов $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$ выберем \vec{v}_2 , полагая $x_1 = 1, x_2 =$

0 (x_1, x_2 — независимые переменные), $x_3 = 2x_1 + 2x_2 = 2$. Таким образом, для собственного значения $\lambda_2 = 0$ найден собственный вектор $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Осталось из множества собственных векторов $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$ выбрать \vec{v}_3 , отвечающий собственному значению $\lambda_3 = 0$, так, чтобы $\vec{v}_3 \perp \vec{v}_2$, т. е.

$$\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_2 = 0 \implies x_1 + 2(2x_1 + 2x_2) = 0 \implies 5x_1 = -4x_2.$$

Полагая $x_1 = 4$, получим $x_2 = -5$ и $x_3 = 2x_1 + 2x_2 = -2$. Таким образом,

$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$. Нормируя полученную систему попарно ортогональных собственных векторов, получаем

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_3 = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Составим из столбцов-векторов ортонормированного базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ матрицу

ортогонального преобразования

$$P = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} & 3 & 4 \\ 2\sqrt{5} & 0 & -5 \\ -\sqrt{5} & 6 & -2 \end{pmatrix},$$

которой соответствует линейная замена переменных $\vec{x} = P \cdot \vec{y}$.

Базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — ортонормированный; $\det P = +1$ — правильно ориентированный (правая тройка).

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Ортогональным преобразованием привести квадратичную форму к каноническому виду и записать матрицу ортогонального преобразования.

1.

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_1x_2$$

2.

$$f(x_1, x_2) = 9x_1^2 + 6x_2^2 - 4x_1x_2$$

3.

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2$$

4.

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_3$$

5.

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_3^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$$

6.

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_2x_3$$

Ответы

1.

$$f(y_1, y_2) = -y_1^2 + 4y_2^2 \quad P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$f(y_1, y_2) = 5y_1^2 + 10y_2^2 \quad P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3.

$$f(y_1, y_2) = 5y_2^2 \quad P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

4.

$$f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + 2y_2^2 + 3y_3^2 \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.

$$f(y_1, y_2, y_3) = 4y_1^2 + 4y_2^2 - 5y_3^2 \quad P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

6.

$$f(y_1, y_2, y_3) = \sqrt{2} x_1^2 - \sqrt{2} x_2^2 \quad P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

ИССЛЕДОВАНИЕ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОМОЩЬЮ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

Общее уравнение поверхности второго порядка:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0 \quad (5)$$

Сумма $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = f(x, y, z)$ образует квадратичную форму, которая ортогональным преобразованием приводится к каноническому виду. Столбцы матрицы $P = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ этого ортогонального преобразования образуют ортонормированный базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ и являются собственными векторами симметрической матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

квадратичной формы $f(x, y, z)$.

Матрица P перехода от старого ортонормированного базиса к новому ортонормированному базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ является ортогональной и $\det P = +1$ (это можно сделать всегда, изменив направление одного собственного вектора на противоположное). Следовательно, существует такой поворот исходной системы координат, что в новой системе координат квадратичная форма в новых переменных будет иметь канонический вид.

Пусть x', y', z' — новые координаты, в которых квадратичная форма имеет канонический вид. Подставив в уравнение (5)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

получим уравнение поверхности в новом базисе:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2d_1 x' + 2d_2 y' + 2d_3 z' + c = 0 \quad (6)$$

Здесь возможны следующие случаи при $i = 1, 2, 3$:

1) $\lambda_i = 0, d_i = 0$, тогда в уравнении (6) отсутствует i -ая переменная, и уравнение определяет цилиндрическую поверхность. Если, например, $\lambda_3 = d_3 = 0$, то $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2d_1 x' + 2d_2 y' + c = 0$ есть уравнение кривой второго порядка, являющейся направляющей данной цилиндрической поверхности.

2) $\lambda_i = 0, d_i \neq 0$. Пусть, например, $\lambda_3 = 0, d_3 \neq 0$. Тогда, выделив полные квадраты, получим

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{d_1}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{d_2}{\lambda_2} \right)^2 + 2d_3 z' + c_1 = 0.$$

Сделаем параллельный перенос системы координат:

$$\begin{cases} x' + \frac{d_1}{\lambda_1} = X \\ y' + \frac{d_2}{\lambda_2} = Y \\ z' + \frac{c_1}{2d_3} = Z \end{cases}$$

Уравнение поверхности второго порядка примет вид:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = -2d_3 Z.$$

3) $\lambda_i \neq 0$ при всех $i = 1, 2, 3$. Тогда, выделив полные квадраты, получим:

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{d_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{d_2}{\lambda_2}\right)^2 + \lambda_3 \left(z' + \frac{d_3}{\lambda_3}\right)^2 + c_1 = 0.$$

Сделаем параллельный перенос системы координат:

$$\begin{cases} x' + \frac{d_1}{\lambda_1} = X \\ y' + \frac{d_2}{\lambda_2} = Y \\ z' + \frac{d_3}{\lambda_3} = Z \end{cases}$$

Уравнение поверхности второго порядка примет вид:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + c_1 = 0.$$

Придавая коэффициентам различные значения и вводя стандартные обозначения, получим следующие поверхности второго порядка:

$$1. \quad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1 \quad -$$

эллипсоид ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$).

$$2. \quad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1 \quad -$$

однополостный гиперboloид ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$).

$$3. \quad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = -1 \quad -$$

двуполостный гиперboloид ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$).

$$4. \quad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 0 \quad -$$

конус ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$).

$$5. \quad \frac{X^2}{p} + \frac{Y^2}{q} = 2Z \quad -$$

эллиптический параболоид ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0, d_3 \neq 0$).

$$6. \quad \frac{X^2}{p} - \frac{Y^2}{q} = 2Z \quad -$$

гиперболический параболоид ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 = 0, d_3 \neq 0$).

$$7. \quad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \quad -$$

эллиптический цилиндр ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = d_3 = 0$).

$$8. \quad \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = \pm 1 \quad -$$

гиперболический цилиндр ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 = d_3 = 0$).

$$9. \quad \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0 \quad -$$

пара пересекающихся плоскостей ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 = d_3 = 0$).

$$10. \quad X^2 = 2pY \quad -$$

параболический цилиндр ($\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = d_3 = 0$).

ПРИМЕРЫ

Привести уравнение кривой ортогональным преобразованием к каноническому виду. Указать преобразование. Построить кривую и все используемые системы координат.

Пример 4.

$$7x^2 + 2xy + 7y^2 + 28\sqrt{2} \cdot x + 4\sqrt{2} \cdot y + 8 = 0.$$

Решение. Квадратичная форма $f(x, y) = 7x^2 + 2xy + 7y^2$, её матрица —

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение матрицы:

$$\begin{vmatrix} 7 - \lambda & 1 \\ 1 & 7 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 14\lambda + 48 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 8$. Находим собственные векторы, отвечающие собственным значениям $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 8$, из уравнения $(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$.

При $\lambda_1 = 6$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \text{собственный вектор.}$$

При $\lambda_2 = 8$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x_2 - x_1 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \text{собственный вектор.}$$

Нормируем, получаем $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ — ортогональные векторы, отвечающие разным собственным числам. Матрица ортогонального преобразования

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det P = +1.$$

Поскольку ортогональное преобразование сохраняет ориентацию, оно является поворотом на угол α , где

$$P = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} \cos \alpha = 1/\sqrt{2} \\ \sin \alpha = -1/\sqrt{2} \end{cases} \implies \alpha = -\frac{\pi}{4}.$$

Этому ортогональному преобразованию соответствует линейная замена переменных

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y') \end{cases}$$

Подставляем это в уравнение кривой:

$$\begin{aligned} \frac{7}{2}(x'+y')^2 + \frac{2}{2}(x'+y')(-x'+y') + \frac{7}{2}(-x'+y')^2 + 28(x'+y') + 4(-x'+y') + 8 &= \\ = 6x'^2 + 8y'^2 + 24x' + 32y' + 8 &= 6(x'+2)^2 + 8(y'+2)^2 - 48 = 0 \end{aligned}$$

и получаем

$$\frac{(x'+2)^2}{8} + \frac{(y'+2)^2}{6} = 1.$$

Делаем параллельный перенос

$$x' + 2 = X; \quad y' + 2 = Y.$$

Получаем каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1,$$

где $a = \sqrt{8}$, $b = \sqrt{6}$, с центром в точке O' , координаты которой таковы:

$$O'(X = 0, Y = 0);$$

$$O'(x' = -2, y' = -2);$$

$$O'(x = -2\sqrt{2}, y = 0).$$

Построим декартову систему координат xOy на векторах \vec{i} и \vec{j} . Далее в ней строим векторы $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ и $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, они определяют новые координатные оси Ox' и Oy' . В этой системе строим точку O' с координатами $x' = -2$, $y' = -2$, которая является началом системы координат $XO'Y$, где ось $O'X$ параллельна оси Ox' , а ось $O'Y$ параллельна оси Oy' .

Пример 5.

$$6x^2 + 8xy - 4\sqrt{5} \cdot x - 8\sqrt{5} \cdot y - 26 = 0.$$

Решение. Квадратичная форма $f(x, y) = 6x^2 + 8xy$, её матрица —

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение матрицы:

$$\begin{vmatrix} 6 - \lambda & 4 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 8$. Находим собственные векторы, отвечающие собственным значениям $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 8$, из уравнения $(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$.

При $\lambda_1 = -2$:

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \text{собственный вектор.}$$

При $\lambda_2 = 8$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \text{собственный вектор.}$$

Так как собственные числа различны, то отвечающие им собственные векторы ортогональны. Нормируем, получаем $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Матрица ортогонального преобразования

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det P = +1.$$

Этому ортогональному преобразованию соответствует линейная замена переменных

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' + 2y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x' + y') \end{cases}$$

Подставляем в уравнение кривой:

$$\begin{aligned} -2x'^2 + 8y'^2 - 4(x' + 2y') - 8(-2x' + y') - 26 &= -2x'^2 + 8y'^2 + 12x' - 16y' - 26 = \\ &= -2(x' - 3)^2 + 8(y' - 1)^2 - 16 = 0, \end{aligned}$$

и получаем

$$\frac{(x' - 3)^2}{8} - \frac{(y' - 1)^2}{2} = -1.$$

Делаем параллельный перенос

$$x' - 3 = X; \quad y' - 1 = Y.$$

Получаем каноническое уравнение сопряжённой гиперболы:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = -1,$$

где $a = \sqrt{8}$, $b = \sqrt{2}$.

Построим декартову систему координат xOy на векторах \vec{i} и \vec{j} . Далее в ней строим векторы $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ и $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, они определяют новые координатные оси Ox' и Oy' . В этой системе строим точку O' с координатами $x' = 3$, $y' = 1$, которая является началом системы координат $XO'Y$, где ось $O'X$ параллельна оси Ox' , а ось $O'Y$ параллельна оси Oy' .

Пример 6.

$$-16x^2 - y^2 + 8xy + 6\sqrt{17} \cdot x - 10\sqrt{17} \cdot y + 51 = 0.$$

Решение. Квадратичная форма $f(x, y) = -16x^2 - y^2 + 8xy$, её матрица —

$$A = \begin{pmatrix} -16 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение матрицы:

$$\begin{vmatrix} -16 - \lambda & 4 \\ 4 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 17\lambda = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = -17$, $\lambda_2 = 0$. Находим собственные векторы, отвечающие собственным значениям $\lambda_1 = -17$, $\lambda_2 = 0$, из уравнения $(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$.

При $\lambda_1 = -17$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \text{собственный вектор.}$$

При $\lambda_2 = 0$:

$$\begin{pmatrix} -16 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \text{собственный вектор.}$$

Так как собственные числа различны, то отвечающие им собственные векторы ортогональны. Нормируя, получаем $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Матрица ортогонального преобразования

$$P = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \det P = +1.$$

Этому ортогональному преобразованию соответствует линейная замена переменных

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{17}}(4x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{17}}(-x' + 4y') \end{cases}$$

Подставляем в уравнение кривой:

$$\begin{aligned} -17x'^2 + 6(4x' + y') - 10(-x' + 4y') + 51 &= -17x'^2 + 34x' - 34y' + 51 = 0 \implies \\ (x' - 1)^2 &= -2(y' - 2). \end{aligned}$$

Делаем параллельный перенос

$$x' - 1 = X; \quad y' - 2 = Y.$$

Получаем каноническое уравнение параболы: $X^2 = 2pY$, у которой $p = -1$. Построим декартову систему координат xOy на векторах \vec{i} и \vec{j} . Далее в ней строим векторы $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ и $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, они определяют новые координатные оси Ox' и Oy' . В этой системе строим точку O' с

координатами $x' = 1, y' = 2$, которая является началом системы координат $XO'Y$, где ось $O'X$ параллельна оси Ox' , а ось $O'Y$ параллельна оси Oy' .

Пример 7. Привести уравнение поверхности ортогональным преобразованием к каноническому виду. Указать преобразование перехода от исходной декартовой системы координат $Oxyz$ к новой системе координат $Ox'y'z'$. Сделать параллельный перенос начала координат в точку O' . Построить поверхность в системе координат $O'XYZ$.

$$2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 4xy + 8xz + 4yz + 18x + 36y + 36z + \frac{243}{2} = 0$$

Решение. Квадратичная форма данной поверхности имеет вид

$$f(x, y, z) = 2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 4xy + 8xz + 4yz.$$

Её матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Запишем характеристическое уравнение матрицы A :

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 & 4 \\ -2 & 5 - \lambda & 2 \\ 4 & 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^3 - 9\lambda^2 + 108) = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = \lambda_3 = 6$.

Находим собственные векторы, отвечающие собственным значениям $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = \lambda_3 = 6$, из уравнения $(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$.

При $\lambda_1 = -3$ имеем:

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ -2x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

Это линейная система трёх уравнений с тремя неизвестными, определитель её матрицы равен 0, поэтому ранг матрицы меньше 3, но базисный минор

$\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} \neq 0$, поэтому ранг матрицы равен 2. Оставляя первые два уравнения и полагая $x_1 = 2$, получаем $x_2 = 1, x_3 = -2$. Таким образом,

собственному значению $\lambda_1 = -3$ отвечает собственный вектор $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

При $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$ имеем:

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -4x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Ранг матрицы этой системы равен 1, поэтому можно оставить одно уравнение $x_2 = -2x_1 + 2x_3$, и общее решение этой системы

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1 + 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Убедимся, что при любых x_1, x_3 этот вектор ортогонален вектору $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$: скалярное произведение

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1 + 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2x_1 - 2x_1 + 2x_3 - 2x_3 = 0.$$

Остаётся из множества векторов $\begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1 + 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$ выбрать два взаимно ортогональных вектора. При $x_1 = 1$ и $x_3 = 2$ получаем $x_2 = 2$, и для собственного значения $\lambda_2 = 6$ получим отвечающий ему собственный вектор $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, уже ортогональный вектору $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, отвечающему собственному значению $\lambda_1 = -3$. Теперь из множества собственных векторов $\begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1 + 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$ выберем вектор \vec{v}_3 так, чтобы $\vec{v}_2 \perp \vec{v}_3$, т. е.

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = x_1 - 4x_1 + 4x_3 + 2x_3 = -3x_1 + 6x_3 = 0 \implies x_1 = 2x_3.$$

Полагая $x_3 = 1$, получим $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ — собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_3 = 6$.

Нормируя полученную систему попарно ортогональных векторов, получаем

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Составим из столбцов-векторов ортонормированного базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ матрицу ортогонального преобразования

$$P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

которой соответствует линейная замена переменных

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2x' + y' + 2z' \\ x' + 2y' - 2z' \\ -2x' + 2y' + z' \end{pmatrix}$$

Базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — ортонормированный; $\det P = +1$ — правильно ориентированный (правая тройка).

Итак, канонический вид квадратичной формы

$$2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 4xy + 8xz + 4yz = -3x'^2 + 6y'^2 + 6z'^2.$$

Подставляя в уравнение поверхности

$$x = \frac{1}{3}(2x' + y' + 2z'), \quad y = \frac{1}{3}(x' + 2y' - 2z'), \quad z = \frac{1}{3}(-2x' + 2y' + z'),$$

получаем

$$\begin{aligned} -3x'^2 + 6y'^2 + 6z'^2 + 6(2x' + y' + 2z') + 12(x' + 2y' - 2z') + 12(-2x' + 2y' + z') + \frac{243}{2} = \\ = -3x'^2 + 6y'^2 + 6z'^2 + 54y' + \frac{243}{2} = 0, \end{aligned}$$

выделяем полный квадрат:

$$-3x'^2 + 6\left(y' + \frac{9}{2}\right)^2 + 6z'^2 = 0,$$

делаем параллельный перенос начала координат

$$x' = X, \quad y' + \frac{9}{2} = Y, \quad z' = Z.$$

Имеем каноническое уравнение поверхности: $-\frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{1} + \frac{Z^2}{1} = 0$.

Это уравнение конуса. Строим его методом сечений.

В плоскости $X = 0$ $Y^2 + Z^2 = 0$, получаем точку $(X = 0, Y = 0, Z = 0)$.

В плоскостях $X = c$ $Y^2 + Z^2 = c^2/2$ — окружности.

В плоскости $Y = 0$ $Z^2 = X^2/2 \implies Z = \pm X/\sqrt{2}$ — это две пересекающиеся прямые, проходящие через точку $(X = 0, Y = 0, Z = 0)$.

В плоскости $Z = 0$ $Y^2 = X^2/2 \implies Y = \pm X/\sqrt{2}$ — это две пересекающиеся прямые, проходящие через точку $(X = 0, Y = 0, Z = 0)$.

Пример 8. Привести уравнение поверхности ортогональным преобразованием к каноническому виду. Указать преобразование перехода от исходной декартовой системы координат $Oxyz$ к новой системе координат $Ox'y'z'$. Построить поверхность в системе координат $Ox'y'z'$.

$$x^2 - 8y^2 + z^2 + 2xz + 4\sqrt{2} \cdot x - 4\sqrt{2} \cdot z = 0$$

Решение. Квадратичная форма данной поверхности имеет вид

$$f(x, y, z) = x^2 - 8y^2 + z^2 + 2xz.$$

Её матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Запишем характеристическое уравнение матрицы A :

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & -8 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda + 8)(\lambda - 2) = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = -8$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 2$. Находим собственные векторы, отвечающие собственным значениям $\lambda_1 = -8$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 2$, из уравнения $(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$.

При $\lambda_1 = -8$

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 9x_1 + x_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ x_1 + 9x_3 = 0 \end{cases}$$

Легко видеть, что $x_1 = x_3 = 0$, а x_2 — любое число. Собственному значению

$$\lambda_1 = -8 \text{ отвечает собственный вектор } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ -8x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Легко видеть, что $x_2 = 0$, $x_1 = -x_3$, и собственному значению $\lambda_2 = 0$

$$\text{отвечает собственный вектор } \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda_3 = 2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ -10x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Действуем аналогично. Тогда $x_2 = 0$, $x_1 = x_3$, и собственному значению

$$\lambda_3 = 2 \text{ отвечает собственный вектор } \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Так как собственные числа различны, то отвечающие им собственные векторы попарно ортогональны. Нормируя эту систему векторов, получаем:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Составим из столбцов–векторов ортонормированного базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ матрицу ортогонального преобразования

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Здесь $\det P = -1$, т. е. тройка векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — неправильно ориентированная (левая). Этому преобразованию соответствует линейная замена переменных

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Канонический вид квадратичной формы

$$x^2 - 8y^2 + z^2 + 2xz = -8x'^2 + 2z'^2.$$

Подставляя в уравнение поверхности

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(y' + z'), \quad y = x', \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}}(-y' + z'),$$

получаем

$$-8x'^2 + 2z'^2 + 4(y' + z') - 4(-y' + z') = -8x'^2 + 2z'^2 + 8y' = 0,$$

или $\frac{x'^2}{1} - \frac{z'^2}{4} = y'$ — каноническое уравнение гиперболического параболоида.

Строим его методом сечений.

В плоскости $x' = 0$ кривая $z'^2 = -4y'$ — парабола.

В плоскости $y' = 0$ будет $z' = \pm 2x'$ — две пересекающиеся прямые, проходящие через точку $(x' = 0, y' = 0, z' = 0)$.

В плоскостях $y' = c$ будет $x'^2 - z'^2/4 = c$ — гиперболы.

В плоскости $z' = 0$ кривая $x'^2 = y'$ — парабола.

В плоскостях $z' = c$ кривые $x'^2 = y' + c^2/4$ — тоже параболы.

Пример 9. Привести уравнение поверхности ортогональным преобразованием к каноническому виду. Указать преобразование перехода от исходной декартовой системы координат $Oxyz$ к новой системе координат $Ox'y'z'$. Построить поверхность в системе координат $Ox'y'z'$.

$$2x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 4xy + 2xz + 2yz + 2x + 2y + 4z - 5 = 0$$

Решение. Квадратичная форма данной поверхности имеет вид

$$f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 4xy + 2xz + 2yz.$$

Её матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Запишем характеристическое уравнение матрицы A :

$$A = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 2 & 1 \\ 2 & 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 18\lambda = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$.

Находим собственные векторы, отвечающие собственным значениям $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$, из уравнения $(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$.

При $\lambda_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Собственному значению $\lambda_1 = 0$ отвечает собственный вектор $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

При $\lambda_2 = 3$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \implies x_1 = x_2 = -x_3.$$

Собственному значению $\lambda_2 = 3$ отвечает собственный вектор $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

При $\lambda_3 = 6$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 2x_1 \end{cases}$$

Собственному значению $\lambda_3 = 6$ отвечает собственный вектор $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Так как собственные числа различны, то отвечающие им собственные векторы попарно ортогональны. Нормируя эту систему векторов, получаем:

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Составим из столбцов-векторов ортонормированного базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ матрицу ортогонального преобразования

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Здесь $\det P = +1$, и $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ — правая тройка векторов. Этому преобразованию соответствует линейная замена переменных

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Канонический вид квадратичной формы

$$2x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 4xy + 2xz + 2yz = 3y'^2 + 6z'^2.$$

Подставляя в уравнение поверхности

$$x = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{3}} + \frac{z'}{\sqrt{6}}, \quad y = -\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{3}} + \frac{z'}{\sqrt{6}}, \quad z = -\frac{y'}{\sqrt{3}} + \frac{2z'}{\sqrt{6}},$$

получаем

$$3y'^2 + 6z'^2 + 2\sqrt{6} \cdot z' - 5 = 3y'^2 + 6 \left(z' + \frac{1}{\sqrt{6}} \right)^2 - 6 = 0,$$

$$\text{или } \frac{y'^2}{2} + \frac{\left(z' + \frac{1}{\sqrt{6}} \right)^2}{1} = 1 \quad - \quad \text{уравнение эллиптического цилиндра}$$

с направляющей, являющейся эллипсом $\frac{y'^2}{2} + \left(z' + \frac{1}{\sqrt{6}} \right)^2 = 1$, и образующими, параллельными оси Ox' .

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Привести уравнение кривой ортогональным преобразованием к каноническому виду. Указать преобразования. Построить кривую и все используемые системы координат.

1.

$$28x^2 + 12y^2 - 12xy - 16\sqrt{10} \cdot x + 12\sqrt{10} \cdot y + 10 = 0$$

2.

$$14x^2 - 4y^2 + 24xy + 12\sqrt{5} \cdot x + 16\sqrt{5} \cdot y - 10 = 0$$

3.

$$7x^2 - 2y^2 + 12xy + 30\sqrt{5} \cdot x + 60\sqrt{5} \cdot y - 55 = 0$$

4.

$$9x^2 + 4y^2 - 12xy - 20\sqrt{13} \cdot x + 22\sqrt{13} \cdot y = 0$$

5.

$$-16x^2 + 24xy - 9y^2 + 70x + 10y - 125 = 0$$

Привести уравнение поверхности ортогональным преобразованием к каноническому виду. Указать преобразования. Построить поверхность в системе координат $O'XYZ$.

6.

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4xy - 4yz + 24y - 6z - 47 = 0$$

7.

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 6yz - 4x + 2\sqrt{2} \cdot y - 2\sqrt{2} \cdot z + 25 = 0$$

8.

$$10x^2 + 10y^2 + 10z^2 + 6xz + 8yz + 60z = 0$$

9.

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4xy + 9\sqrt{2} \cdot x + 7\sqrt{2} \cdot y - 4z + 10 = 0$$

Ответы

1. $\lambda_1 = 10, \lambda_2 = 30$

$$P = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \frac{(x' + 1)^2}{3} + \frac{(y' + 1)^2}{1} = 1 \quad - \text{ эллипс.}$$

2. $\lambda_1 = -10, \lambda_2 = 20$

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad -\frac{(x' + 1)^2}{2} + \frac{(y' + 1)^2}{1} = 1 \quad - \text{ гипербола.}$$

3. $\lambda_1 = -5, \lambda_2 = 10$

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \frac{(x' + 9)^2}{2} - \frac{(y' + 6)^2}{1} = -1 \quad - \text{ гипербола.}$$

4. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 13$

$$P = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad (y' + 4)^2 = -2(x' - 8) \quad - \text{ парабола.}$$

5. $\lambda_1 = -25, \lambda_2 = 0$

$$P = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad (x' - 1)^2 = 2(y' - 2) \quad - \text{ парабола.}$$

6. $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$

$$P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad -\frac{(x' - 7)^2}{20} + \frac{(y' + 1)^2}{10} + \frac{(z' - 2)^2}{4} = 1 \quad - \text{ однополостный гиперболоид.}$$

7. $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 5$

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad -\frac{(x' + 2)^2}{25} + \frac{(y' - 2)^2}{25} + \frac{z'^2}{5} = -1 \quad - \text{ двухполостный гиперболоид.}$$

8. $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 10, \lambda_3 = 15$

$$P = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & -8 & 3\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & 6 & 4\sqrt{2} \\ -5\sqrt{2} & 0 & 5\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \frac{(x' - 3\sqrt{2})^2}{24} + \frac{y'^2}{12} + \frac{(z' + \sqrt{2})^2}{8} = 1 - \text{эллипсоид.}$$

9. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4$

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (y' - 1)^2 + 2(z' + 2)^2 = (x' + 4) - \begin{array}{l} \text{эллиптический} \\ \text{параболоид.} \end{array}$$

ПРИВЕДЕНИЕ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ МЕТОДОМ ЛАГРАНЖА

Как мы видели, для нахождения ортогонального преобразования, приводящего квадратичную форму к каноническому виду, требуется находить корни характеристического многочлена $\chi(\lambda) = \det(A - \lambda E)$. Это не всегда удаётся сделать, если степень многочлена (равная размерности пространства) больше двух.

Однако, если перед нами стоит задача привести квадратичную форму к каноническому виду в каком-нибудь, *не обязательно ортонормированном* базисе, то её можно решить более простым способом, чем ортогональные преобразования — *методом Лагранжа*.

Метод Лагранжа состоит в последовательном выделении полных квадратов из квадратичной формы. При этом матрица перехода к новым переменным может оказаться не ортогональной, т. е. новые переменные являются координатами вектора при разложении по косоугольному базису. Поясним метод Лагранжа на примере.

Пример 10. Рассмотрим квадратичную форму из примера 2:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3.$$

Поскольку в ней присутствует член $3x_1^2$, мы можем выделить полный квадрат по x_1 . Для этого соберём все слагаемые, содержащие x_1 , и дополним до полного квадрата:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= 3 \left(x_1^2 + \frac{4}{3}x_1x_2 + \frac{4}{9}x_2^2 \right) - \frac{4}{3}x_2^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 4x_2x_3 = \\ &= 3 \left(x_1 + \frac{2}{3}x_2 \right)^2 + \frac{2}{3}x_2^2 + x_3^2 - 4x_2x_3. \end{aligned}$$

Соберём далее все слагаемые, содержащие x_2 , и дополним до полного квадрата:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= 3 \left(x_1 + \frac{2}{3}x_2 \right)^2 + \frac{2}{3} (x_2^2 - 6x_2x_3 + 9x_3^2) - 6x_3^2 + x_3^2 = \\ &= 3 \left(x_1 + \frac{2}{3}x_2 \right)^2 + \frac{2}{3} (x_2 - 3x_3)^2 - 5x_3^2. \end{aligned}$$

Введём новые переменные

$$\begin{cases} x_1 + \frac{2}{3}x_2 = z_1 \\ x_2 - 3x_3 = z_2 \\ x_3 = z_3 \end{cases}, \text{ то есть } \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix},$$

и канонический вид квадратичной формы f в новых переменных z_1, z_2, z_3 будет $f(z_1, z_2, z_3) = 3z_1^2 + \frac{2}{3}z_2^2 - 5z_3^2$. Если

$$\begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \text{ то } \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и будет матрицей перехода от ортогонального базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ к косоугольному базису

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

в котором квадратичная форма f имеет канонический вид

$$f(z_1, z_2, z_3) = 3z_1^2 + \frac{2}{3}z_2^2 - 5z_3^2.$$

В примере 2 квадратичная форма $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$ приводилась к другому каноническому виду $f(y_1, y_2, y_3) = -y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2$.

В различных видах данной квадратичной формы остаётся неизменным не только количество ненулевых коэффициентов, но и количество положительных и отрицательных коэффициентов в силу закона инерции квадратичных форм.

Пример 11. Дана квадратичная форма

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

В ней присутствует член $2x_1^2$, поэтому мы можем выделить полный квадрат вида

$$2(a + b + c)^2 = 2(a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2).$$

Соберём все члены, содержащие x_1 , и дополним до полного квадрата, полагая $a = x_1$, $b = -x_2/2$, $c = x_3$. Итак,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= 2 \left(x_1^2 - 2x_1 \cdot \frac{x_2}{2} + 2x_1x_3 + \frac{x_2^2}{4} - 2 \cdot \frac{x_2}{2} \cdot x_3 + x_3^2 \right) - \\ &- \frac{x_2^2}{2} + 2x_2x_3 - 2x_3^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_2x_3 = 2 \left(x_1 - \frac{x_2}{2} + x_3 \right)^2 + \frac{9}{2}x_2^2 + 6x_2x_3 + 3x_3^2. \end{aligned}$$

В той части квадратичной формы, которая осталась после выделения $2(x_1 - \frac{x_2}{2} + x_3)^2$, присутствует $\frac{9}{2}x_2^2$, поэтому мы можем выделить снова полный квадрат. Итак,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= 2\left(x_1 - \frac{x_2}{2} + x_3\right)^2 + \frac{9}{2}\left(x_2^2 + 2 \cdot \frac{2}{3}x_2x_3 + \frac{4}{9}x_3^2\right) - 2x_3^2 + 3x_3^2 = \\ &= 2\left(x_1 - \frac{x_2}{2} + x_3\right)^2 + \frac{9}{2}\left(x_2 + \frac{2}{3}x_3\right)^2 + x_3^2. \end{aligned}$$

Введём новые переменные

$$\begin{cases} x_1 - \frac{x_2}{2} + x_3 = z_1 \\ x_2 + \frac{2}{3}x_3 = z_2 \\ x_3 = z_3 \end{cases}, \text{ то есть } \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

будет матрицей перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ к косоугольному базису

$$\vec{e}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}'_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}'_3 = \begin{pmatrix} -4/3 \\ -2/3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

в котором квадратичная форма f имеет канонический вид

$$f(z_1, z_2, z_3) = 2z_1^2 + \frac{9}{2}z_2^2 + z_3^2.$$

Пример 12. Дана квадратичная форма

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

Здесь отсутствуют члены с x_1^2 , x_2^2 и x_3^2 , поэтому метод, описанный в предыдущих примерах, не удаётся применить сразу, придётся сделать некоторые преобразования.

$$\text{Легко видеть, что } x_1x_2 = \left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2}\right)^2.$$

Введём вспомогательные переменные

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} \\ t_2 &= \frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2} \end{aligned} \implies \begin{aligned} x_1 &= t_1 + t_2 \\ x_2 &= t_1 - t_2 \end{aligned}$$

тогда квадратичная форма f выразится таким образом:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2t_1^2 - 2t_2^2 - 4(t_1 + t_2)x_3 + 6(t_1 - t_2)x_3 = 2t_1^2 - 2t_2^2 + 2t_1x_3 - 10t_2x_3.$$

Теперь можно действовать по схеме, описанной в примере 10.

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= 2t_1^2 - 2t_2^2 + 2t_1x_3 - 10t_2x_3 = \\ &= 2 \left(t_1^2 + t_1x_3 + \frac{1}{4}x_3^2 \right) - \frac{1}{2}x_3^2 - 2 \left(t_2^2 + 5t_2x_3 + \frac{25}{4}x_3^2 \right) + \frac{25}{2}x_3^2 = \\ &= 2 \left(t_1 + \frac{1}{2}x_3 \right)^2 - 2 \left(t_2 + \frac{5}{2}x_3 \right)^2 + 12x_3^2. \end{aligned}$$

$$\text{Введём новые переменные } \begin{cases} t_1 + \frac{1}{2}x_3 = z_1 \\ t_2 + \frac{5}{2}x_3 = z_2 \\ x_3 = z_3 \end{cases},$$

$$\text{то есть } \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

и канонический вид квадратичной формы f в новых переменных z_1, z_2, z_3 будет $f(z_1, z_2, z_3) = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 12z_3^2$.

$$\text{Если } \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

$$\text{то } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix},$$

и обратная матрица

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

будет матрицей перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ к косоугольному базису

$$\vec{e}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}'_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

в котором квадратичная форма f имеет канонический вид:

$$f(z_1, z_2, z_3) = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 12z_3^2.$$

Пример 13. Квадратичная форма

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

с матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ положительно определена, так как $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 > 0$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$.

Пример 14. Квадратичная форма

$$f(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 - x_2^2 - 14x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

с матрицей $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -14 \end{pmatrix}$ отрицательно определена, так как $\Delta_1 = -2 < 0$, $\Delta_2 = 1 > 0$, $\Delta_3 = -1 < 0$.

Пример 15. Квадратичная форма

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3$$

с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ является знакопеременной, так как $\Delta_2 = -1 < 0$. Действительно, выделив полные квадраты, получим $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 - (x_2 + x_3)^2$.

ЗНАКООПРЕДЕЛЁННОСТЬ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

Квадратичные формы подразделяют на различные типы.

Определение 3. Квадратичную форму $f(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$, где $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, будем называть

- а) положительно (отрицательно) определённой, если для любого ненулевого столбца $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ выполняется неравенство $f(\vec{x}) > 0$ ($f(\vec{x}) < 0$);
- б) неотрицательно (неположительно) определённой, если для любого ненулевого столбца $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ выполняется неравенство $f(\vec{x}) \geq 0$ ($f(\vec{x}) \leq 0$);
- в) знакопеременной (неопределённой), если существуют такие столбцы \vec{x} и \vec{y} , что $f(\vec{x}) > 0$ и $f(\vec{y}) < 0$.
- г) вырожденной, если существует ненулевой столбец \vec{x} , для которого $f(\vec{x}) = 0$.

Представив квадратичную форму f в каноническом виде, получаем критерии для типа квадратичной формы в зависимости от собственных значений её матрицы.

- 1) Все собственные значения $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, тогда f — положительно определённая.
- 2) Все собственные значения $\lambda_i < 0$, $i = \overline{1, n}$, тогда f — отрицательно определённая.
- 3) Собственные значения имеют разные знаки: $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1, k}$, $\lambda_j < 0$, $j = \overline{k+1, k+m}$, тогда f — знакопеременная.
- 4) Есть нулевое собственное значение $\lambda_i = 0$, тогда f — вырожденная.

Итак, найдя все собственные значения матрицы A квадратичной формы $f(\vec{x})$, можно установить тип квадратичной формы. Но это можно сделать и не вычисляя собственных значений матрицы A . Пусть квадратичная форма представлена в виде $f = \vec{x}^T A \vec{x}$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Главные угловые миноры этой матрицы

$$\Delta_1 = a_{11}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Критерий Сильвестра. Квадратичная форма $f(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ положительно определена тогда и только тогда, когда $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$ (все главные миноры положительны).

Квадратичная форма $f(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ отрицательно определена тогда и только тогда, когда $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, $\Delta_4 > 0, \dots, (-1)^n \Delta_n > 0$ (знаки главных миноров чередуются, начиная с минуса).

Если у невырожденной квадратичной формы найдётся главный минор, равный нулю; либо главный минор чётного порядка отрицателен; либо есть два главных минора нечётного порядка с разными знаками; то в этих случаях квадратичная форма знакопеременна.

Квадратичная форма $f(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ определяется невырожденной симметрической матрицей A , поэтому симметрическая матрица A будет положительно определена ($A > 0$), если все её главные миноры положительны, соответственно A будет отрицательно определена, если знаки её главных миноров чередуются, начиная с минуса.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа и определить её тип (положительно определённая, отрицательно определённая, знакопеременная). Проверить результат, найдя собственные числа и оценив главные миноры матрицы квадратичной формы.

1. $f(x_1, x_2, x_3) = 7x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$
2. $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$
3. $f(x_1, x_2) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2$

Ответы

1. $f(x_1, x_2, x_3) = 7(x_1 - \frac{2}{7}x_3)^2 + 5(x_2 - \frac{2}{5}x_3)^2 + \frac{162}{35}x_3^2$;
 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 9; \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0$;
 положительно определённая.
2. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + \frac{x_3}{2})^2 - (x_1 - x_2 - \frac{3}{2}x_3)^2 + 2x_3^2$;
 $\lambda_1 = \frac{-1-\sqrt{33}}{2}, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = \frac{-1+\sqrt{33}}{2}; \Delta_1 = 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 < 0$; знакопеременная.
3. $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - (x_2 - x_1)^2$;
 $\lambda_1 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}; \Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0$; отрицательно определённая.

Список литературы

1. А.Н.Канатников, А.П.Крищенко, Линейная алгебра (серия "Математика в техническом университете", выпуск IV), М., Издательство МГТУ, 1999. 336 с.
2. Системы линейных уравнений, линейные преобразования и квадратичные формы, методические указания к ДЗ по курсу линейной алгебры (под редакцией Р.С.Зотиной), М., Издательство МГТУ, 1980. 34 с.
3. Р.С.Зотина, В.В.Кузнецов, Р.Ф.Сперанская, Сборник задач по векторной и линейной алгебре, М., Издательство МГТУ, 1976. 61 с.
4. Сборник задач по линейной алгебре (под редакцией С.К.Соболева), М., Издательство МГТУ, 1991. 154 с.
5. Н.Е.Козлов, Е.М.Пашовкин, Г.М.Цветкова, Линейная алгебра и аналитическая геометрия, методические указания к выполнению ДЗ, М., Издательство МГТУ, 1988. 37 с.