1 Дифференциальные уравнения 1 порядка

Дифференциальным уравнением (ДУ) 1 порядка, разрешённым относительно производной, называется уравнение

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y),$$

где $y = y(x)$ – искомая функция; функция F задана на некоторой области $U \subset \mathbb{R}^2$. **Интегральной кривой** называется график $\{y = y(x)\} \subset U$.

Мы будем рассматривать также системы n ДУ 1 порядка

$$\begin{cases} dy/dx = F(x, y, z, \ldots) \\ dz/dx = G(x, y, z, \ldots) \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \end{cases}$$

где решением будут n-мерно-значные функции $\vec{r}(x) = (y(x); z(x); \ldots)$, а функция F задана на области $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

ДУ или система ДУ называется **автономной**, если F не зависит от x. Поскольку интегральные кривые в $(n+1)$-мерном пространстве не всегда легко воспринимаются, для наглядного представления решений автономных систем используют **фазовые кривые** – параметрические кривые $\{(y(x); z(x); \ldots)\} \subset \mathbb{R}^n$, являющиеся проекциями интегральных кривых на n-мерное пространство, перпендикулярное оси Ox.

Пример 1.1. Для ДУ $y' = y/x$ на области $U = \{(x; y) : \ x > 0\}$ решениями будут функции $y = Cx$, $C \in \mathbb{R}$; интегральные кривые – лучи, выходящие из точки O в правую полуплоскость, но сама точка O им не принадлежит.

Пример 1.2. Для автономной системы ДУ $\begin{cases} y' = -z \\ z' = y \end{cases}$ решения имеют вид $\begin{cases} y = C_1 \cos(x + C_2) \\ z = C_1 \sin(x + C_2) \end{cases}$; интегральные кривые – винтовые линии и ось Ox; фазовые кривые – окружности с центром в точке O, ориентированные против часовой стрелки, а также сама точка O.

Задачей Коши называется ДУ с заданием начальных условий:

$$\text{при } n = 1 \quad \begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(x_o) = y_o \end{cases} \quad ; \qquad \text{при } n > 1 \quad \begin{cases} y' = F(x, y, z, \ldots) \\ z' = G(x, y, z, \ldots) \\ \ldots \\ y(x_o) = y_o, z(x_o) = z_o, \ldots \end{cases}$$

Решением задачи Коши называется решение ДУ, удовлетворяющее начальным условиям.

Теорема 1.1. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – область, $n \geq 1$; функция $\vec{F} = (F; G; \ldots) : U \mapsto \mathbb{R}^n$ дифференцируема. Тогда для любой точки $A(x_o; y_o; \ldots) \in U$ существует единственное решение задачи Коши с начальными условиями $y(x_o) = y_o, \ldots$, т.е. $\exists!$ интегральная кривая $\ell \subset U : A \in \ell$; при этом ℓ продолжается до тех пор, пока не упрётся* *в границу U или не уйдёт в ∞.* Таким образом, через каждую точку области U проходит ровно одна интегральная кривая.

Теперь изучим несколько типов ДУ первого порядка и методы их решения.

1. ДУ с разделяющимися переменными: $y' = f(x)g(y)$.
Метод решения – разделить переменные. Перепишем уравнение в таком виде и проинтегрируем левую и правую части:

$$dy = f(x)g(y)dx \Longrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \Longrightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

Пример 1.3. Решим уравнение $y' = \sqrt{xy}$ при $x > 0$, $y > 0$.

$$dy = \sqrt{xy}\,dx \Longrightarrow \frac{dy}{\sqrt{y}} = \sqrt{x}\,dx \Longrightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int \sqrt{x}\,dx \Longrightarrow 2\sqrt{y} = \frac{2}{3}x^{3/2} + C.$$

Ответ: $y = \frac{1}{9}\left(x^{3/2} + C\right)^2$ (здесь $C_1 = 1{,}5C$).

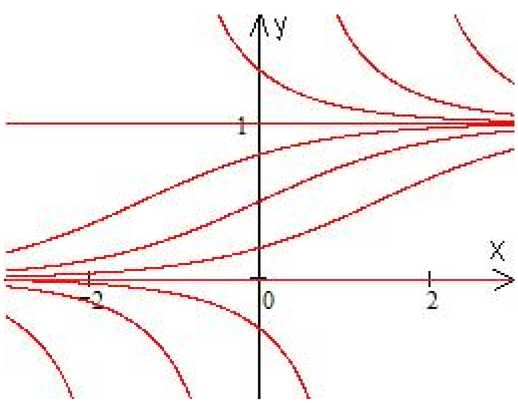
Важный частный случай ДУ с разделяющимися переменными – автономные ДУ 1 порядка. Их интегральные кривые остаются таковыми при сдвиге вдоль оси Ox.

Пример 1.4. Решить уравнение $y' = y(1-y)$.

$$dy = y(1-y)dx \Longrightarrow \frac{dy}{y(1-y)} = dx \Longrightarrow \int \frac{1}{y} - \frac{1}{y-1}dy = dx \Longrightarrow \ln\left|\frac{y}{y-1}\right| = x + C$$

$$\Longrightarrow 1 + \frac{1}{y-1} = C_1e^x \Longrightarrow y = \frac{1}{C_1e^x - 1} + 1 = \frac{C_1e^x}{C_1e^x - 1} = \frac{1}{1 - C_2e^{-x}}$$

(здесь $C_1 = \pm e^C$, $C_2 = 1/C_1$). Кроме того, есть решения $y = 0$ и $y = 1$.



2. Линейное ДУ: $y' = f(x)y + g(x)$.
Функция $g(x)$ называется неоднородностью. Если $g(x) \equiv 0$, то это однородное линейное уравнение – частный случай уравнения с разделяющимися переменными:

$$y' = f(x)y \Longrightarrow \frac{dy}{y} = f(x)dx \Longrightarrow \int \frac{dy}{y} = \ln|y| = \int f(x)dx + C \Longrightarrow y = C_1 \exp \int f(x)dx,$$

где $C_1 = \pm e^C$. Интегральные кривые остаются таковыми при растяжении вдоль оси Oy. Случай $C_1 = 0$ тоже даёт решение уравнения. Однородное линейное ДУ мы уже видели в примере 1.1.

Если нам нужно решить неоднородное линейное $y' = f(x)y + g(x)$, то сначала решим однородное линейное $y' = f(x)y$ и выберем одно ненулевое решение $y_1(x)$. Затем будем искать решение неоднородного линейного ДУ в виде $y = y_1(x) \cdot u(x)$. Уравнение на u будет с разделяющимися переменными:

$$y' = y_1'u + y_1u' = f(x)y_1u + g(x) \Longrightarrow y_1u' = g(x) \Longrightarrow u = \int \frac{g(x)}{y_1(x)}dx.$$

Пример 1.5. Решить задачу Коши $\begin{cases} y' = y \operatorname{tg} x + 1 \\ y(0) = 1/2. \end{cases}$

Сначала решим однородное линейное $y' = y \operatorname{tg} x$:

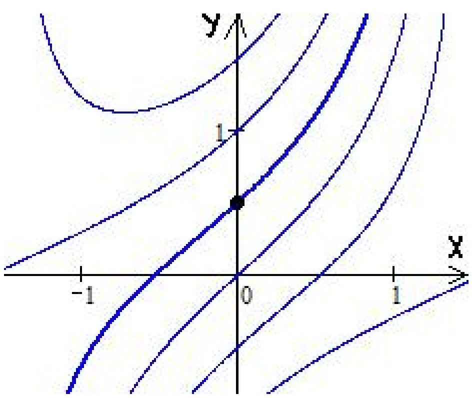
$$dy = y \operatorname{tg} x \, dx \Longrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{\sin x \, dx}{\cos x} \Longrightarrow \ln|y| = \int \frac{-d\cos x}{\cos x} = C - \ln|\cos x|.$$

Взяв для простоты $C = 0$, получаем решение однородного линейного ДУ $y_1 = \dfrac{1}{\cos x}$.

$$\text{Пусть} \quad y = \frac{u(x)}{\cos x}. \quad \text{Тогда} \quad dy = \frac{du}{\cos x} - \frac{u \cdot (-\sin x)dx}{\cos^2 x} = \Big(\frac{u}{\cos x} \operatorname{tg} x + 1\Big)dx$$
$$\Longrightarrow \frac{du}{\cos x} = dx \Longrightarrow u = \int \cos x \, dx = C_1 + \sin x.$$

Домножим на $y_1 = \dfrac{1}{\cos x}$ и получим общее решение $y = \dfrac{C_1}{\cos x} + \operatorname{tg} x$.

Начальное условие $y(0) = 1/2$ выполнено при $C_1 = 1/2$.



3. Уравнение Бернулли: $y' = f(x)y + g(x)y^a$, $0 \neq a \neq 1$.

Метод такой же:

сначала решим однородное линейное $y' = f(x)y$ и выберем ненулевое решение y_1. Затем будем искать решение уравнения Бернулли в виде $y = y_1(x) \cdot u(x)$. Уравнение на u вновь будет с разделяющимися переменными:

$$y' = y_1'u + y_1u' = f(x)y_1u + g(x)(y_1u)^a \Longrightarrow y_1u' = g(x)(y_1u)^a \Longrightarrow u^{-a}du = g(x)y_1^{a-1}dx.$$

Пример 1.6. Решим уравнение $y' = \dfrac{2y}{x} - 3xy^3$ при $x > 0$.

У однородного линейного ДУ $y' = \dfrac{2y}{x}$ есть ненулевое решение $y_1 = x^2$. Пусть $y = x^2 u$.

$$x^2u' + 2xu = \frac{2x^2u}{x} - 3x(x^2u)^3 \Longrightarrow x^2du = -3x^7u^3dx \Longrightarrow -\frac{2du}{u^3} = 6x^5dx \Longrightarrow \frac{1}{u^2} = x^6 + C,$$

откуда $y = x^2u = x^2/\sqrt{x^6+C}$. Но мы делили на u, поэтому случай $u = 0$ ($y = 0$) надо рассмотреть отдельно: $y = 0$ – тоже решение.

Ответ: $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^6+C}}$, $y = 0$.

4. Однородное ДУ: $y' = f(y/x)$.

Его интегральные кривые остаются таковыми при гомотетии относительно начала координат. Решение будем искать в виде $y = xu$. Получаем

$$y' = u + xu' = f(u) \Longrightarrow xdu = (f(u) - u)dx \Longrightarrow \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

переменные разделились.

Пример 1.7. Решим уравнение $2x^2dy = (x+y)^2dx$.

Чтобы увидеть, что оно однородное, перепишем его в виде $y' = \dfrac{(x+y)^2}{2x^2}$. Пусть $y = xu$.

$$dy = xdu + udx = \frac{(x+xu)^2}{2x^2}dx = \frac{(1+u)^2}{2}dx \Longrightarrow xdu = \frac{1+u^2}{2}dx$$
$$\Longrightarrow \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2x}dx \Longrightarrow \operatorname{arctg} u = \frac{1}{2}\ln|x| + C_o \Longrightarrow u = \operatorname{tg}\frac{\ln Cx}{2}.$$

Ответ: $y = x \operatorname{tg}\dfrac{\ln Cx}{2}$.

2 Дифференциальные уравнения высших порядков

Дифференциальным уравнением n-го порядка, разрешённым относительно старшей производной, называется уравнение

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{1}$$

где функция F задана на некоторой области $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Задача Коши в этом случае выглядит так:

$$\begin{cases} y^{(n)} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \\ y(x_o) = C_o \\ y'(x_o) = C_1 \\ \ldots \quad \ldots \\ y^{(n-1)}(x_o) = C_{n-1} \end{cases}$$

Одно ДУ n-го порядка можно переписать в виде системы n ДУ 1 порядка, обозначив $z_k = y^{(k)}$, $1 \le k < n$:

$$\begin{cases} \quad y' &= z_1 \\ \quad z_1' &= z_2 \\ \ \ldots &\ldots \\ z_{n-2}' &= z_{n-1} \\ z_{n-1}' &= F(x, y, z_1, \ldots, z_{n-1}) \end{cases}$$

поэтому теорема о существовании и единственности задачи Коши верна и для (1) при дифференциуемой F.

ДУ, допускающие понижение порядка

Случай 1. Если в ДУ 2 порядка $y'' = F(x, y, y')$ правая часть не зависит от y без штриха, то перейдём к функции $z(x) = y'$:

$$y'' = F(x, y') \Longrightarrow z' = F(x, z); \quad \text{далее } y = \int z(x)dx.$$

Пример 2.1. Решим уравнение $y'' = \dfrac{1 + (y')^2}{1 + x^2}$.
Пусть $z(x) = y'$. Получится уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dz}{1 + z^2} = \frac{dx}{1 + x^2} \Longrightarrow \operatorname{arctg} z = \operatorname{arctg} x + C_0 \Longrightarrow z = \begin{cases} x & \text{при } C_0 = \pi n \\ -1/x & \text{при } C_0 = \pi n + \pi/2 \\ \dfrac{x + C}{1 - Cx} & \text{при } C_0 \neq n\pi/2 \end{cases}$$

(здесь $C = \operatorname{tg} C_0$). Интегрируя z, получим в первом случае $y = \dfrac{x^2}{2} + C_2$, во втором $y = C_2 - \ln|x|$, а в третьем положим $C_1 = -1/C$, $C_1 \neq 0$:

$$y = \int \frac{x + C}{1 - Cx} dx = \int \frac{C_1 x - 1}{C_1 + x} dx = \int C_1 - \frac{C_1^2 + 1}{C_1 + x} dx = C_1 x - (C_1^2 + 1) \ln|C_1 + x| + C_2.$$

Случай 2. Если ДУ 2 порядка автономное: $y'' = F(y, y')$, то перейдём к функции $p(y) = y'$. Тогда $y'' = \dfrac{dy'}{dx} = \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dp}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = p'(y)p(y)$. Получаем

$$y'' = F(y, y') \Longrightarrow p'p = F(y, p).$$

Решив это ДУ 1 порядка относительно y и p, получим зависимость $p = p(y)$, далее решаем ещё одно ДУ 1 порядка $dy = p(y)dx$.

Пример 2.2. Решим уравнение $yy'' + 2(y')^2 = 0$.
Пусть $y' = p(y)$. Получаем $ypp' + 2p^2 = 0$. Отдельно рассмотрим $p = 0$, т.е. $y = C$ – это решения. Если же $p \neq 0$, $y \neq 0$, то разделим на yp^2 и получим

$$\frac{dp}{p} = -\frac{2dy}{y} \Longrightarrow \ln|p| = -2\ln|y| + C_0 \Longrightarrow p = \frac{C_1}{y^2}.$$

$$dy = \frac{C_1}{y^2}dx \Longrightarrow y^2 dy = C_1 dx \Longrightarrow y^3 = C_2 x + C_3.$$

Ответ: $y = C$, $y = \sqrt[3]{C_2 x + C_3}$.

Однородные линейные ДУ

Линейным ДУ n-го порядка называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

Функция $g(x)$ называется неоднородностью, при $g \equiv 0$ линейное уравнение однородное; функции $a_k(x)$ – коэффициенты (переменные или постоянные).

Множество решений однородного линейного ДУ представляет собой линейное пространство, поскольку если $y(x)$ и $Y(x)$ – его решения, $c, C \in \mathbb{R}$, то $cy(x) + CY(x)$ – тоже его решение.

Теорема 2.1. *Однородное линейное ДУ n-го порядка имеет фундаментальную систему решений (ФСР) – n линейно независимых решений $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, образующие базис пространства решений, т.е. любое решение представляется в виде*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x). \tag{2}$$

Доказательство. В качестве ФСР можно взять решения $y_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, таких задач Коши:

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \\ y^{(j)}(x_o) = 1 \text{ при } j = k-1 \\ y^{(j)}(x_o) = 0 \text{ при других } j = 0, 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

Тогда решение задачи Коши с начальными условиями $y^{(k)}(x_0) = C_{k+1}$ разложится в виде (2). □

Можно использовать и другие ФСР (получающиеся из указанной при помощи невырожденного линейного оператора).

Для линейных ДУ с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

существует несложный алгоритм построения ФСР. **Характеристический многочлен** данного уравнения

$$\chi(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$$

по Основной теореме алгебры имеет n комплексных корней, если считать с учётом кратности. Пусть у него действительные корни λ_j с кратностями k_j, $j = 1, \ldots, m$, и комплексные корни $z_j = \alpha_j \pm i\beta_j$ с кратностями l_j, $j = 1, \ldots, M$; при этом $k_1 + \ldots + k_m + 2(l_1 + \ldots + l_M) = n$. Тогда существует ФСР из таких функций:

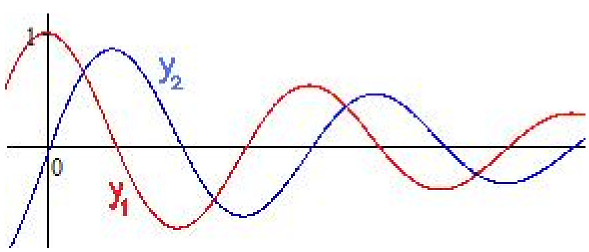
$$y_{jp}(x) = x^p e^{\lambda_j x}, \quad p = 0, \ldots, k_j - 1;$$

$$v_{jp}(x) = x^p e^{\alpha_j x}\cos(\beta_j x), \quad w_{jp}(x) = x^p e^{\alpha_j x}\sin(\beta_j x), \quad p = 0, \ldots, l_j - 1.$$

Пример 2.3. Уравнение малых колебаний маятника с вязким трением:

$y'' + 2ky' + \omega^2 y = 0$, где $0 < k < \omega$.

Характеристический многочлен $\chi(t) = t^2 + 2kt + \omega^2$ имеет некратные комплексные корни $-k \pm i\sqrt{\omega^2 - k^2}$. Им соответствуют фундаментальные решения
$y_1 = e^{-kx}\cos\big(x\sqrt{\omega^2 - k^2}\big)$, $y_2 = e^{-kx}\sin\big(x\sqrt{\omega^2 - k^2}\big)$.
Общее решение $y = e^{-kx}\Big(C_1\cos\big(x\sqrt{\omega^2 - k^2}\big) + C_2\sin\big(x\sqrt{\omega^2 - k^2}\big)\Big)$.



Пример 2.4. Решим уравнение $y^{(9)} + 3y^{(8)} - 32y^{(5)} - 96y^{(4)} + 256y' + 768y = 0$.
Характеристический многочлен

$$t^9 + 3t^8 - 32t^5 - 96t^4 + 256t + 768 = (t+3)(t^4-16)^2 = (t+3)(t-2)^2(t+2)^2(t-2i)^2(t+2i)^2$$

имеет корни $\lambda_1 = -3$ кратности 1, $\lambda_2 = 2$ и $\lambda_3 = -2$ кратности 2, и пару комплексно-сопряжённых корней $\alpha \pm \beta i = \pm 2i$ кратности 2. Получаем ФСР

$$e^{-3x}, \quad e^{2x}, \quad xe^{2x}, \quad e^{-2x}, \quad xe^{-2x}, \quad \cos 2x, \quad x\cos 2x, \quad \sin 2x, \quad x\sin 2x.$$

Ответ: $y = C_1 e^{-3x} + (C_2 + C_3 x)e^{2x} + (C_4 + C_5 x)e^{-2x} + (C_6 + C_7 x)\cos 2x + (C_8 + C_9 x)\sin 2x$.

Для линейных ДУ высших порядков с переменными коэффициентами нет универсального способа нахождения ФСР. Но если одно решение y_1 найдено, то можно представить общее решение в виде $y = z(x)y_1(x)$, и тогда порядок уравнения можно будет уменьшить на 1 благодаря тому, что z без штрихов сократится!

Пример 2.5. Решить уравнение $x^2y''+5xy'-12y = 0$, если известно решение $y_1 = x^2$. Будем искать решение в виде $y = x^2z$:

$$x^2y'' + 5xy' - 12y = x^2(2z + 4xz' + x^2z'') + 5x(2xz + x^2z') - 12x^2z = x^4z'' + 9x^3z' = 0$$

Получаем линейное уравнение 1 порядка относительно $w = z'$:

$$x^4w' + 9x^3w = 0 \Longrightarrow \frac{dw}{w} = -\frac{9dx}{x} \Longrightarrow \ln|w| = C_0 - 9\ln|x| \Longrightarrow w = \frac{C_1}{x^9}.$$

Следовательно, $z = \int wdx = C_2x^{-8} + C_3$. Получаем общее решение $y = C_2x^{-6} + C_3x^2$; ФСР: $y_1 = x^2$, $y_2 = x^{-6}$.

---

3 Неоднородные линейные ДУ высших порядков

Предположим, что нам известно частное решение y_0 уравнения

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x). \tag{3}$$

Если y – произвольное решение (3), то получим

$$(y - y_0)^{(n)} + a_{n-1}(x)(y - y_o)^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)(y - y_0)' + a_0(x)(y - y_0) = g(x) - g(x) = 0,$$

т.е. $y - y_0$ – решение однородного линейного ДУ. Таким образом, чтобы получить все решения (3), надо прибавлять однородные решения к y_0:

$$y(x) = y_0(x) + C_1y_1(x) + \ldots + C_ny_n(x).$$

Теперь осталось найти y_0.

Метод „вариации постоянных" Лагранжа.
Пусть уравнение записано в виде (3), и пусть известна ФСР $y_1, \ldots, y_n$. Представим решение (3) в виде

$$y(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) + \ldots + u_n(x)y_n(x). \tag{4}$$

Пусть производные неизвестных функций $u_1, \ldots, u_n$ удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\begin{cases} u_1'y_1 + u_2'y_2 + \ldots + u_n'y_n & = 0 \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' + \ldots + u_n'y_n' & = 0 \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & = 0 \\ u_1'y_1^{(n-2)} + \ldots + u_n'y_n^{(n-2)} & = 0 \\ u_1'y_1^{(n-1)} + \ldots + u_n'y_n^{(n-1)} & = g(x). \end{cases} \tag{5}$$

Проверим, что (4) будет решением (3).

$$y' = \sum_{k=1}^{n} u_k' y_k + \sum_{k=1}^{n} u_k y_k' = \sum_{k=1}^{n} u_k y_k'$$

$$y'' = \sum_{k=1}^{n} u_k' y_k' + \sum_{k=1}^{n} u_k y_k'' = \sum_{k=1}^{n} u_k y_k''$$

и т.д.

$$y^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} u_k' y_k^{(n-1)} + \sum_{k=1}^{n} u_k y_k^{(n)} = g(x) + \sum_{k=1}^{n} u_k y_k^{(n)}$$

Итого

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x) y' + a_0(x) y =$$
$$= g(x) + \sum_{k=1}^{n} u_k \underbrace{\left(y_k^{(n)} + a_{n-1}(x) y_k^{(n-1)} + \ldots + a_1(x) y_k' + a_0(x) y_k\right)}_{=0}$$

Пример 3.1. Решить уравнение $x^2 y'' + 5xy' - 12y = \ln x$.
Мы уже знаем ФСР (см. пример 2.5): $y_1 = x^2$, $y_2 = x^{-6}$. Поэтому ищем решение в виде

$$y = u_1(x) x^2 + \frac{u_2(x)}{x^6}.$$

Но перед тем, как составлять систему (5), надо переписать ДУ в виде (3), т.е. разделить на коэффициент при старшей производной:

$$y'' + \frac{5}{x} y' - \frac{12}{x^2} y = \frac{\ln x}{x^2}.$$

Система (5) будет выглядеть так:

$$\begin{cases} u_1' \cdot x^2 + u_2' \cdot x^{-6} &= 0 \\ u_1' \cdot 2x - 6u_2' \cdot x^{-7} &= \dfrac{\ln x}{x^2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u_2' = -u_1' \cdot x^8 \\ 2xu_1' + 6xu_1' = \dfrac{\ln x}{x^2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u_2' = (-x^5 \ln x)/8 \\ u_1' = \dfrac{\ln x}{8x^3} \end{cases}$$

Интегрированием находим u_1 и u_2 (не будем добавлять $+C$, так как нужно одно частное решение):

$$u_1 = \frac{1}{8} \int \frac{\ln x}{x^3} dx = -\frac{1}{16} \int \ln x \, d\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{16} \left(\frac{\ln x}{x^2} - \int \frac{d \ln x}{x^2} \right) =$$
$$= -\frac{1}{16} \left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2} \right) = -\frac{2 \ln x + 1}{32x^2};$$

$$u_2 = -\frac{1}{8} \int x^5 \ln x dx = -\frac{1}{48} \int \ln x \, d(x^6) = -\frac{1}{48} \left(x^6 \ln x - \int x^6 d \ln x \right) = \frac{x^6 (1 - 6 \ln x)}{288}.$$

Получаем частное решение $y_o = u_1 \cdot x^2 + \dfrac{u_2}{x^6} = -\dfrac{2 \ln x + 1}{32} + \dfrac{1 - 6 \ln x}{288} = -\dfrac{3 \ln x + 1}{36}$.

Ответ: $y = C_1 x^2 + \dfrac{C_2}{x^6} - \dfrac{3 \ln x + 1}{36}$.

Метод неопределённых коэффициентов.
Если линейное ДУ с постоянными коэффициентами, а неоднородность является квазиполиномом

$$g(x) = e^{ax}(P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx), \qquad d = \max\{\deg\, P, \deg\, Q\}, \quad z = a + bi,$$

и если число z является корнем $\chi(t)$ кратности k (если не корень, то $k = 0$), то существует частное решение

$$y_0 = x^k e^{ax}(R(x)\cos bx + S(x)\sin bx), \qquad \deg\, R, \deg\, S \leq d.$$

Остаётся найти $d+1$ коэффициентов многочлена R, а если $z \notin \mathbb{R}$, то ещё $d+1$ коэффициентов многочлена S.

Пример 3.2. Решить уравнение $y'' + y = x\sin x + \cos x$.
Характеристический многочлен $\chi(t) = t^2+1$, корни $\pm i \Longrightarrow$ ФСР $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$. Неоднородность $g(x) = x\sin x + \cos x$ является квазиполиномом с $d = 1$ и $z = i$. Число i – корень $\chi(t) = t^2 + 1$ кратности 1. Поэтому надлежит искать частное решение в таком виде с многочленами R, S степени ≤ 1:

$$\begin{aligned} y_0 = x^1 \cdot e^{0x}(R(x)\cos x + S(x)\sin x) = x((Ax+B)\cos x + (Dx+E)\sin x) = \\ = (Ax^2 + Bx)\cos x + (Dx^2 + Ex)\sin x. \end{aligned}$$

Подставим в уравнение:

$$\begin{aligned} ((2A + 4Dx + 2E - Ax^2 - Bx)\cos x + (2D - 4Ax - 2B - Dx^2 - Ex)\sin x) + \\ + ((Ax^2 + Bx)\cos x + (Dx^2 + Ex)\sin x) = x\sin x + \cos x \end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты при $\cos x$, $x\cos x$, $\sin x$ и $x\sin x$ (члены с множителем x^2 сократятся).

$$\begin{cases} 2A + 2E = 1 \\ 4D - B + B = 0 \\ 2D - 2B = 0 \\ -4A - E + E = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = -1/4 \\ B = 0 \\ D = 0 \\ E = 3/4 \end{cases} \quad \text{т.е. } y_0 = -\frac{1}{4}x^2\cos x + \frac{3}{4}x\sin x.$$

Ответ: $y = -\dfrac{1}{4}x^2\cos x + \dfrac{3}{4}x\sin x + C_1\cos x + C_2\sin x$.