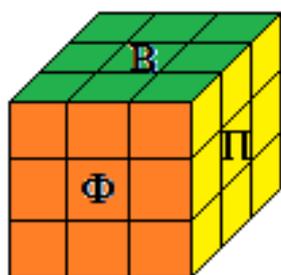


# 1. Обозначения поворотов

Куб состоит из единой крестовины

и 20 подвижных кубиков (12 бортиков и 8 уголков).

Бортик имеет две стороны (цветных наружных грани), уголок – три стороны.



НАЧАЛЬНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ:

Фасадная грань – оранжевая

Правая грань – жёлтая

Верхняя грань – зелёная

Тыльная грань – красная

Левая грань – белая (голубоватая)

Нижняя грань – синяя

Формулы выполняются слева направо.

**Ф** – вращение фасадной грани

**Т** – вращение тыльной грани (для определения направления вращения мысленно загляни сзади)

**Л** – вращение левой грани

**П** – вращение правой грани

**В** – вращение верхней грани

**Н** – вращение нижней грани

**СФ** – вращение среднего слоя, параллельного фасадной грани

**СП** – вращение среднего слоя, параллельного правой грани

**СН** – вращение среднего слоя, параллельного нижней грани (для определения направления вращения мысленно загляни снизу)

**ОФ** – вращение целого куба в направлении вращения **Ф**

**ОП** – вращение целого куба в направлении вращения **П**

**ОВ** – вращение целого куба в направлении вращения **В**

Без штриха – на 90° по часовой стрелке,

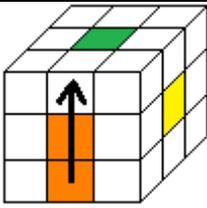
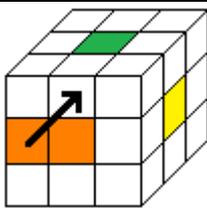
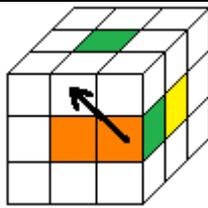
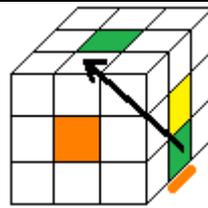
со штрихом – на 90° против часовой стрелки,

«в квадрате» – на 180°.

## 2. Алгоритм сборки

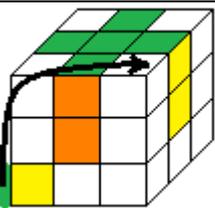
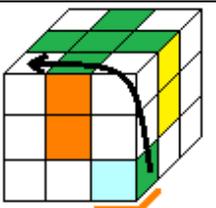
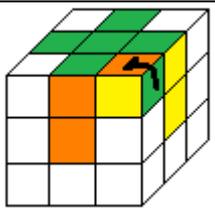
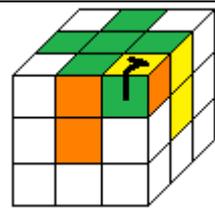
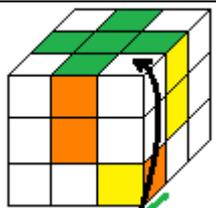
Алгоритмы, обязательные для запоминания, написаны чёрным, дополнительные – синим.

### I ЭТАП: бортики первого слоя

			
$\Phi^2$	$\Phi$	$\Phi'$	$\Pi\Phi'\Pi'$

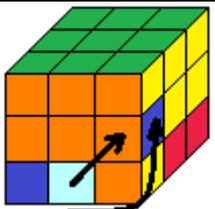
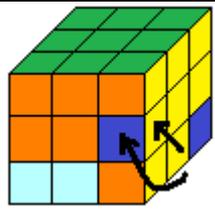
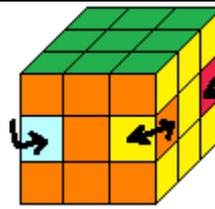
Максимальное число поворотов = 16.

### II ЭТАП: уголки первого слоя

				
$\Pi'\Pi\Pi$	$\text{ЛН}'\text{Л}'$	$\text{П}'\text{Н}'\text{ПН}^2\Phi$ $\text{Н}'\Phi'$	$\Phi\text{Н}\Phi'\text{Н}^2\text{П}'\text{Н}$ $\text{П}$	$\text{П}'\text{Н}^2\text{ПН}^2\Phi\text{Н}'\Phi'$

Максимальное число поворотов = 31.

### III ЭТАП: второй слой

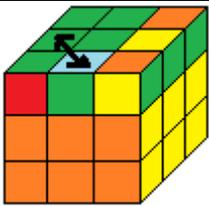
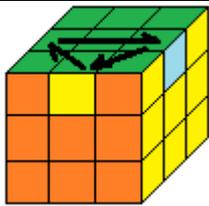
Подъём/спуск бортика		Если есть бортик на месте, но перевернутый
		
$\text{Н}'\text{П}'\text{Н}\text{ПН}\Phi\text{Н}'\Phi'$	$\text{Н}\Phi\text{Н}'\Phi'\text{Н}'\text{П}'\text{Н}\text{П}$	$(\text{T}'\text{Сн})^4$

Максимальное число поворотов = 40.

После III этапа куб перевернуть, чтобы третий слой оказался наверху.

#### IV ЭТАП: бортики третьего слоя по местам

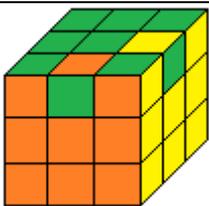
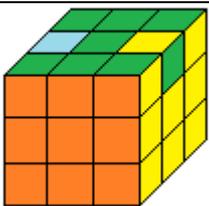
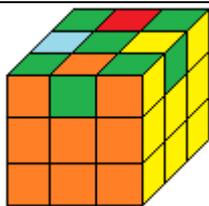
Сначала поверни верхнюю грань, чтобы поставить на место хотя бы один бортик.

		Как предыдущий, но против часовой стрелки
$\text{ВФПВП}'\text{В}'\text{Ф}'$	$\text{Ф}^2\text{В СП В}^2 \text{С}'\text{П ВФ}^2$	$\text{Ф}^2\text{В}' \text{СП В}^2 \text{С}'\text{П В}'\text{Ф}^2$

Максимальное число поворотов = 8.

#### V ЭТАП: переворачивать бортики третьего слоя

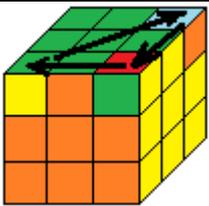
Все бортики на местах, но некоторые перевернуты – таких чётное число, в силу Инварианта №1.

		
$(\text{П Сн})^4 \text{В}' (\text{П Сн})^4 \text{В}$	$((\text{П Сн})^4 \text{В}^2)^2$	$((\text{В Сп})^4 \text{В}^2)^2$

Максимальное число поворотов = 18.

#### VI ЭТАП: уголки третьего слоя по местам

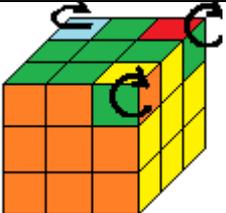
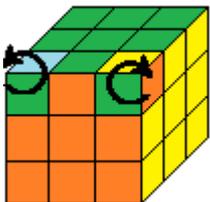
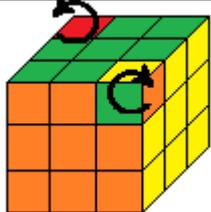
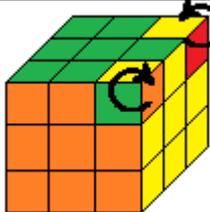
Уголки пока не на своих местах. Их перестановка чётна, в силу Инварианта №2.

	Как предыдущий, но против часовой стрелки
$\text{П}'\text{Ф}'\text{Л}'\text{ФПФ}'\text{ЛФ}$	$\text{Ф}'\text{Л}'\text{ФП}'\text{Ф}'\text{ЛФП}$

Максимальное число поворотов = 16.

## VII ЭТАП: вертеть уголки третьего слоя

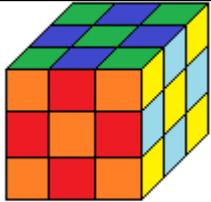
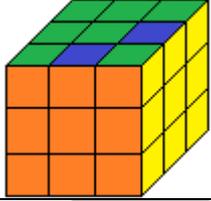
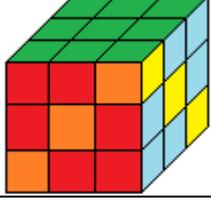
Уголки на своих местах. Их суммарная перекрученность кратна  $360^\circ$ , в силу Инварианта №3.

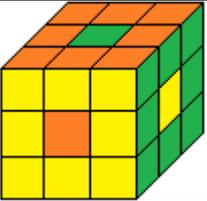
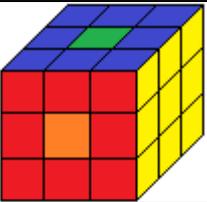
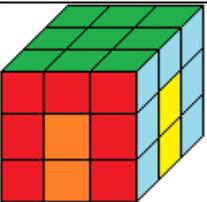
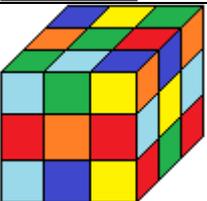
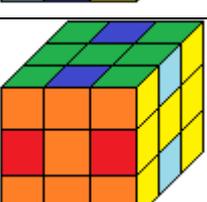
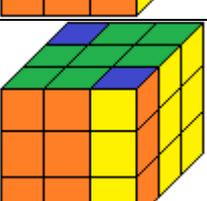
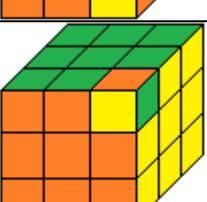
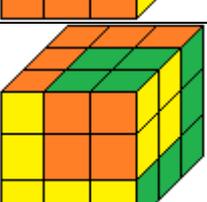
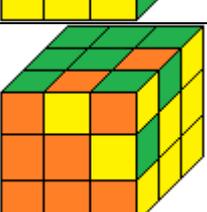
	Как предыдущий, но против часовой стрелки	
$((\text{ПФ}'\text{П}'\text{Ф})^2\text{В})^3\text{В}$	$((\text{Ф}'\text{П}\text{Ф}\text{П}')^2\text{В})^3\text{В}$	$(\text{ПФ}'\text{П}'\text{Ф})^2\text{В}'(\text{Ф}'\text{П}\text{Ф}\text{П}')^2\text{В}$
		
$(\text{ПФ}'\text{П}'\text{Ф})^2\text{В}^2(\text{Ф}'\text{П}\text{Ф}\text{П}')^2\text{В}^2$		$(\text{ПФ}'\text{П}'\text{Ф})^2\text{В}(\text{Ф}'\text{П}\text{Ф}\text{П}')^2\text{В}'$

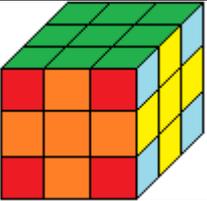
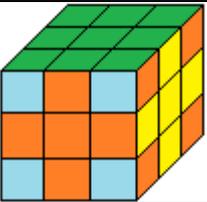
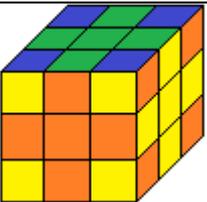
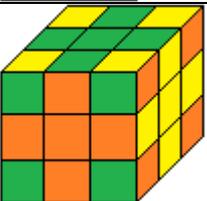
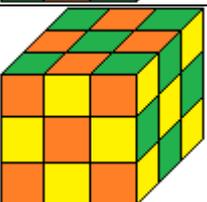
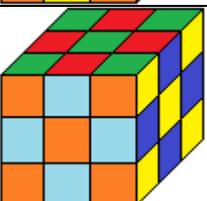
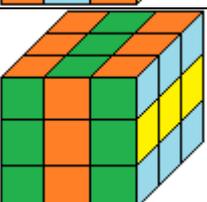
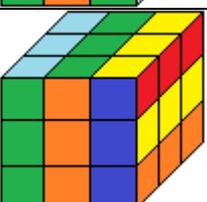
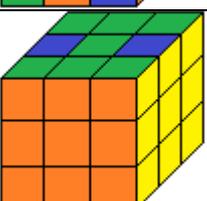
Максимальное число поворотов = 36.

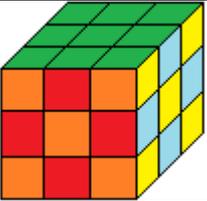
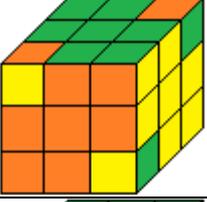
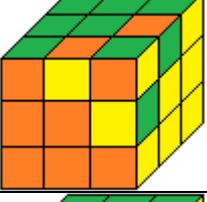
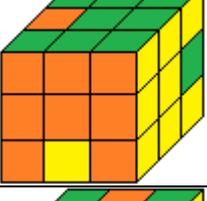
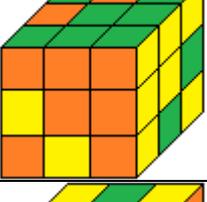
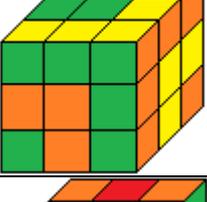
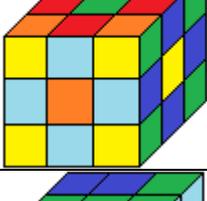
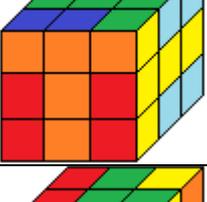
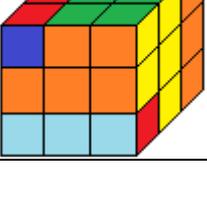
Вся сборка куба, при самом неблагоприятном раскладе, займёт 165 поворотов (3 минуты).

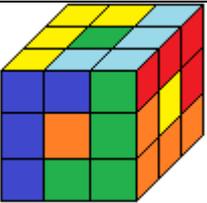
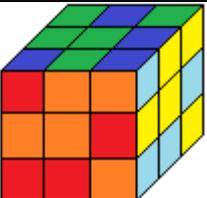
## 3. Фигуры

	[1] Шахматный куб 2-го порядка  $\text{Ф}^2\text{Г}^2\text{П}^2\text{Л}^2\text{В}^2\text{Н}^2$  Период = 2
	[2] Две рыбки (вторая рыбка на нижней грани)  $(\text{Ф}^2\text{П}^2)^3$  Период = 2
	[3] Четыре диагонали  $(\text{Ф}\text{Г}\text{Л}\text{П})^3$  Период = 2

	<p>[4] Шесть окошек</p> <p><math>C'_{\Pi} C'_{H} C_{\Pi} C_{H} O_{\Pi} O_{V}</math></p> <p>Период = 3</p>
	<p>[5] Четыре окошка</p> <p><math>C_{\Pi} C^2_{\Phi} C'_{\Pi} C^2_{\Phi} O^2_{\Pi}</math></p> <p>Период = 2</p>
	<p>[6] Табуретка</p> <p><math>C^2_{\Pi} H' C^2_{\Pi} H^2 C^2_{\Pi} B' C^2_{\Phi} C_{H} O'_{V}</math></p> <p>Период = 2</p>
	<p>[7] Глобус (на каждой грани есть все цвета, и любые два соседних квадратика разных цветов)</p> <p><math>\Phi T L P \Phi T L^2 P^2</math></p> <p>Период = 4</p>
	<p>[8] Шесть «Н»</p> <p><math>(\Phi T L P)^2 (L P \Phi T)^2</math></p> <p>Период = 2</p>
	<p>[9] Два столбика</p> <p><math>\Phi L H^2 P' N L^2 H' P H^2 L' \Phi L^2 \Phi^2</math></p> <p>Период = 2</p>
	<p>[10] Лёгкий мезон (кубик TЛH повернут в другую сторону – «антикварк»)</p> <p><math>(B'T^2B L'\Phi^2L)^2</math></p> <p>Период = 3</p>
	<p>[11] Тяжёлый мезон</p> <p><math>\Phi'V'TV^2 T'V'PV^2 P'\Phi T H \Phi'H^2 \Phi H'L'H^2 L T'</math></p> <p>Период = 3</p>
	<p>[12] Шесть рыбок</p> <p><math>L B'H^2 \Phi' V H' L^2 V'H \Phi' V H^2 L' P' H V^2 T V H' P^2 V'H T H' V^2 P</math></p> <p>Период = 3</p>

	<p>[13] Четыре плюса 2-го порядка</p> $C^2\phi C^2\Pi B^2 C^2\phi C^2\Pi H^2$ <p>Период = 2</p>
	<p>[14] Четыре плюса 4-го порядка</p> $C^2\phi H C^2\phi B^2 C^2\Pi B' C^2\Pi B^2$ <p>Период = 4</p>
	<p>[15] Шесть плюсов 2-го порядка</p> $[14] \cdot C^2\phi C^2_H \Pi^2 C^2\phi C^2_H \Pi^2$ <p>Период = 2</p>
	<p>[16] Шесть плюсов 3-го порядка</p> $[14] \cdot O'\phi \cdot [14] \cdot O\phi$ <p>Период = 3</p>
	<p>[17] Шахматный куб 3-го порядка</p> $[16] \cdot [4]$ <p>Период = 3</p>
	<p>[18] Шахматный куб 6-го порядка</p> $[16] \cdot [4] \cdot [1]$ <p>Период = 6</p>
	<p>[19] Шесть минусов</p> $L^2\Phi^2\Pi^2L^2\Phi^2\Pi L$ <p>Период = 4</p>
	<p>[20] Шесть флагов</p> $B'T^2L^2B C^2\Pi B'\Pi^2\Phi^2 H\Phi\Pi C_H \Pi'T'\Pi'C_H \Pi^2 C'_H \Pi'\Phi'T^2\Pi^2 C'\phi$ <p>Период = 12</p>
	<p>[21] Две «Н»</p> $(\Pi^2 C^2\phi)^2$ <p>Период = 2</p>

	[22] Четыре шахматные грани $(Л^2Ф^2П^2)^2В^2Н^2$ Период = 2
	[23] Диагональный треугольник $ПВФ'Н^2ФВ'Ф'Н^2ФП'$ Период = 3
	[24] Малый бортовой треугольник, или Три рыбки $П'В^2НТ'ВН'П^2В'НТ'В^2Н'П$ Период = 3
	[25] Большой бортовой треугольник $Ф'В'НТВ^2Т'ВН'ПВ^2П'Ф$ Период = 3
	[26] Пояс, или Шесть рыбок $[25] \cdot ПФ'В^2ФВН'Л'В^2ЛНВ'П'$ Период = 3
	[27] Извилистый пояс $[26] \cdot В'НФ'ТП'ЛВ'Н$ Период = 3
	[28] Крестоцветы $[4] \cdot [1]$ Период = 6
	[29] Шесть «Т» $В'НТ^2ВН'П^2В^2Ф^2П^2Т^2П^2Н^2$ Период = 6
	[30] Странный мезон $(Л'Т^2ЛВ'Ф^2В)^2$ Период = 3

	<p>[31] Двенадцать «Г»</p> <p><math>\Phi^2 T^2 L' P' V H \Phi T L P</math></p> <p>Период = 6</p>
	<p>[32] Шесть петухов</p> <p><math>V^2 H^2 L P V H \Phi T L^2 T \Phi' V H' L P'</math></p> <p>Период = 6</p>

## 4. Инварианты

Будем рассматривать систему отсчёта, связанную с крестовиной. То есть поворот типа «С» рассматривается как одновременный поворот двух противоположащих граней, а поворот типа «О» вообще не считается.

**ИНВАРИАНТ №1.** Перестановка сторон бортиков (всех 24-ёх) является чётной.

**ИНВАРИАНТ №2.** Перестановка двадцати подвижных кубиков чётна.

**ИНВАРИАНТ №3.** Назовём холодными цвета двух противоположащих граней (скажем, синий и зелёный). Просуммировав по восьми уголкам повёрнутость холодной стороны от холодной грани, получим угол, кратный  $360^\circ$ .

Чтобы доказать эти инварианты, достаточно посмотреть, что происходит при повороте одной грани. С другой стороны, вышеописанный алгоритм сборки доказывает, что любая позиция куба, удовлетворяющая трём инвариантам, возможна. Сосчитаем число возможных позиций. Бортиков 12, у каждого 2 стороны. Уголков 8, у каждого 3 стороны. Инвариант №1 уменьшает число возможностей в 2 раза, №2 – ещё в 2 раза, №3 – в 3 раза. Итого

$$N = 12! \cdot 2^{12} \cdot 8! \cdot 3^8 / 2 \cdot 2 \cdot 3 = 43\,252\,003\,274\,489\,856\,000$$

Это число более, чем вдвое превосходит число зёрен, которое попросил изобретатель шахмат!

## 5. Периодичность

Группа преобразований куба с неподвижной крестовиной имеет порядок  $N$ , с подвижной  $24N$ . Каждое преобразование имеет период, являющийся делителем  $24N$ . Более тонкими рассуждениями доказывается, что наибольший возможный период преобразования (как с неподвижной крестовиной, так и с подвижной) равен 1260.

Период формулы не меняется при её циклической перестановке, повороте и симметрии куба; обратная и сопряжённая формулы также имеют тот же период. С учётом этого данная таблица охватывает все двухходовки и все трёхходовки без «С». Периоды формул фигур указаны в разделе 3, поэтому не включены в таблицу.

Формула	Период
$\Phi^2, C^2_{\text{H}}, C^2_{\text{П}C^2_{\text{H}}}$	2
$\Phi, C_{\text{H}}, \text{П}^2C^2_{\text{H}}, C^2_{\text{В}C_{\text{H}}}, \text{ЛП}C_{\text{H}}, \text{Л}^2\Phi^2\text{П}^2$	4
$\text{П}\Phi'\text{П}'\Phi, \text{П}^2\Phi^2, \Phi\text{ТЛП}$	6
$\text{П}C_{\text{H}}, \text{Л}\Phi^2\text{П}$	8
$\text{В}^2\Phi'\text{П}'$	9
$\text{С}_{\text{П}C_{\text{H}}}, \text{П}^2C_{\text{H}}, \text{П}C^2_{\text{H}}, \text{В}^2\Phi^2\text{П}, \text{В}^2\Phi^2\text{П}^2$	12
$\text{П}C_{\text{H}}\text{ПВ}^2, \text{Л}^2\Phi\text{П}^2, \text{Л}^2\Phi^2\text{П}, \text{Л}\Phi^2\text{П}'$	24
$\Phi^2\text{П}, \text{В}^2\Phi^2\text{П}'$	30
$\text{В}^2\Phi\text{П}$	36
$\text{В}'\Phi\text{П}$	60
$\Phi'\text{П}, \text{В}^2\Phi'\text{П}$	63
$\text{В}\Phi\text{П}$	80
$\text{В}'\Phi'\text{П}'$	84
$\text{Л}\Phi\text{П}, \text{Л}\Phi'\text{П}$	90
$\Phi\text{П}$	105
$\text{Л}^2\Phi\text{П}$	168
$\text{Л}'\Phi\text{П}$	180
$\text{Л}\Phi\text{ПТ}$	315
$\text{В}\Phi'\text{П}', \text{Л}^2\Phi'\text{П}$	360
$\Phi \text{ О'В}$	1260

Большая часть материалов выбрана из журнала «Наука и жизнь» за 1980-е годы.